Przybliżone rozwiązania równań funkcyjnych

Krzysztof Król

Instytut Matematyki
Politechnika Śląska w Gliwcach
Kaszubska 23
44-100 Gliwice
e-mail: Krzysztof.Krol@polsl.pl

Streszczenie

Podczas referatu rozważymy przybliżone rozwiązania liniowego równania funkcyjnego

$$y[f(x)] = g(x)y(x) + F(x), \tag{1}$$

gdzie funkcje f, g, F są dane, a y jest nieznaną funkcją. Zastosujemy następujące algorytmy wyznaczania przybliżonych rozwiązań równania funkcyjnego: metodę najmniejszych kwadratów (całkową i dyskretną), metodę momentów, metodę kolokacji i metodę dekompozycji.

W całkowej metodzie najmniejszych kwadratów dokładne rozwiązanie równania (1) może być przybliżone przez funkcję

$$y_n(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdzie $\Phi_j,\ j = 1, \ldots, n$ są danymi, ciągłymi i liniowo niezależnymi funkcjami, a współczynniki p_j, $j = 1, \ldots, n$ są rozwiązaniami układu równań

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \int_a^b \Psi_i(x)\Psi_j(x)\, dx = \int_a^b \Psi_i(x)F(x)\, dx,$$

gdzie $\Psi_i(x) = \Phi_i[f(x)] - g(x)\Phi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Następnie stosując metodę kolokacji do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania równania (1) otrzymamy, że współczynniki p_j, $j = 1, \ldots, n$ są rozwiązaniami układu równań

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \Psi_j(x_i) = F(x_i), \qquad i = 1, \ldots n,$$

gdzie $\Psi_j(x_i) := \Phi_j[f(x_i)] - g(x_i)\Phi_j(x_i)$ oraz
$S := \{x_i : x_i \in [a, b], x_i \neq x_j\ dla\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots n\}$ i $x_i \in S$.

Stosując metodę momentów uzyskamy, że dokładne rozwiązanie równania (1) może być przybliżone przez funkcję

$$y_n(x) = F(x) + \sum_{j=1}^{n} p_j \Phi_j(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdzie współczynniki $p_j, j = 1, \dots, n$, są rozwiązaniami układu równań

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \left[\int_a^b \Psi_j(x)\Phi_i(x)\, dx \right] = \int_a^b (1 + g(x))F(x)\Phi_i(x)\, dx - \int_a^b F[f(x)]\Phi_i(x)\, dx,$$

dla $i = 1, \dots, n$, oraz $\Psi_j(x) := \Phi_j[f(x)] - g(x)\Phi_j(x)$, $x \in [a, b]$.

Przy pewnych założeniach pokażemy, że dokładne rozwiązanie równania (1) może być przybliżone przez funkcję

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \qquad x \in [a, b],$$

gdzie

$$\varphi_0(x) = -\frac{F(x)}{g(x)},\ \varphi_n(x) = \frac{\varphi_{n-1}(x)}{g(x)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dowiedziemy, że jeśli istnieje $0 \leqslant \alpha < 1$ taka, że

$$\|\varphi_{n+1}\| \leqslant \alpha \|\varphi_n\|, \quad n = 0, 1, \dots$$

to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny do dokładnego rozwiązania równania (1).

Każdą z wymienionych metod zastosujemy do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania przykładowego równania funkcyjnego.