Notatki do referatu "Nieprzemienne dylatacje unitarne"

Sebastian Foks

Listopad/Grudzień 2023

Celem prezentacji jest przedstawienie obecnej teorii dylatacii odnoszącej się do nieprzemiennych układów kontrakcji. W tym celu wprowadźmy na początek następujące pojęcia:

Definicja 0.1 (Klasy operatorów)**.** *Gdy H, K są przestrzeniami Hilberta, symbolem $\mathcal{B}(H,K)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich operatorów liniowych, ciągłych $T : H \to K$ z normą $\|T\| := \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$. Operator T nazywamy* ***kontrakcją*** *(odp.* ***izometrią****), gdy*

$$\forall\ x \in H \quad \|Tx\| \leqslant \|x\| \quad (\textit{odp. } \|Tx\| = \|x\|)$$

Izometrie surjektywne nazywamy ***operatorami unitarnymi****.*

Dla domkniętej podprzestrzeni $M \subset H$ jako ***projekcję*** *(rzut) na M określamy operator P_M spełniający warunek:*

$$P_M x = y \quad \Leftrightarrow \quad y \in M \quad \textit{oraz} \ \forall_{z\in M} \ \langle x - y, z\rangle = 0$$

Jak wiemy, istnieje prosty sposób na to, czy dany operator jest izometrią, operatorem unitarnym lub projekcją:

Lemat 0.1 (Charakterystyka izometrii, operatora unitarnego i projekcji)**.**

(i) Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy $T^*T = I_H$.

(ii) Natomiast T jest unitarny, jeżeli $T^* = T^{-1}$, czyli: $T^*T = TT^* = I_H$.

(iii) Gdy $P \in \mathcal{B}(H)$, to:

$$(\exists_{M\subset H} \ P = P_M) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P = P^2 = P^*\big)$$

Podstawą teorii dylatacji unitarnych są między innymi operatory przesunięcia oraz rozkład Wolda:

Definicja 0.2 (Przesunięcie jednostronne)**.** *Niech T będzie operatorem określonym w przestrzeni $\ell^2_H(\mathbb{Z}_+)$, oraz niech wymiar przestrzeni H wynosi k. Operator T nazywamy przesunięciem krotności k, kiedy dla każdego $\mathbf{x} \in \ell^2_H(\mathbb{Z}_+)$ zachodzi:*

$$T\mathbf{x} = (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

Gdy $n = 0$, to $x_{n-1} = x_{-1}$. Definiujemy tutaj $x_{-1} := 0$.

*Operator T nazywamy **przesunięciem elementarnym**, gdy jest przesunięciem krotności* 1*.*

Przesunięcie dwustronne definiujemy tak samo, jak powyżej, tylko że dla $\ell^2_H(\mathbb{Z})$ oraz x_{-1} nie stanie się po przesunięciu równym zero.

Twierdzenie 0.1 (Rozkład Wolda)**.** *Każdy liniowy operator izometryczny S działający na przestrzeni Hilberta H wyznacza w sposób jednoznaczny rozkład przestrzeni H na sumę $H = H_1 \oplus H_2$, gdzie podprzestrzenie H_1 i H_2 mają następujące własności:*

1. *Podprzestrzenie H_1 i H_2 redukują operator S*
2. *Operator S ograniczony do H_1 jest operatorem unitarnym. Gdy jest natomiast ograniczony do H_2 jest on przesunięciem krotności $k = \dim(H \ominus SH)$.*
3. *Podprzestrzenie H_1 i H_2 przymują następującą postać:*

$$H_1 = \bigcap_{n=0}^{\infty} S^n H$$

$$H_2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n L, \quad L = H \ominus SH$$

gdzie H_2 jest podprzestrzenią domkniętą oraz L jest nazwana podprzestrzenią wędrującą izometrii S.

W skrócie mówiąc, rozkład Wolda umożliwia rozbić izometrię S na sumę prostą dwóch operatorów tj. przesunięcie jednostronne oraz pewny operator unitarny. Ponieważ możemy rozszerzyć bez straty ogólności przesunięcie jednostronne do przesunięcia dwustronnego (co jest operatorem unitarnym), to z racji tego, że suma prosta operatorów unitarnych będzie operatorem unitarnym, jesteśmy w stanie rozszerzyć ("to dilate") izometrię do operatora unitarnego tj. $S = U|_H$. Wtedy U nazywa się **dylatacją unitarną** operatora S. Oczywiście zachodzi to również, jeżeli weźmiemy potęgę izometrii tj. $S^n = U^n|_H$

Żeby otrzymać dylatację unitarną dla kontrakcji T, musimy znaleźć dylatację izometryczną kontrakcji (wtedy mając izometrię wiemy, że istnieje dylatacja unitarna) oraz używać zamiast zwykłego zawężenia tzw. kompresji (tj.

$T = P_H U|_H$).

Okazuje się, że jesteśmy w stanie skonstruować taki operator S, który będzie dylatacją izometryczną dla T:

Twierdzenie 0.2. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla każdej kontrakcji $T \in \mathcal{B}(H)$ istnieje potęgowa dylatacja izometryczna $S \in \mathcal{B}(K)$, gdzie K jest pewną przestrzenią Hilberta zawierającą H. Jest ona postaci:*

$$S\mathbf{h} = \{Th_0, D_T h_0, h_1, \dots\}$$

gdzie $D_T = \sqrt{(I_H - T^*T)}$ jest tzw. operatorem defektu dla T i ponadto dla $\mathbf{h} \in \ell^2_H(\mathbb{Z}_+) =: K$

Istnienie dylatacji unitarnej pociąga za sobą również tzw. nierówność von Neumanna:

$$\|p(T)\| \leqslant \sup_{z \in \mathbb{D}} |p(z)|$$

gdzie p jest zespolonym wielomianem skończonego stopnia oraz $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Powstaje teraz pytanie, czy istnieje dylatacja unitarna również dla układu n przemiennych ze sobą kontrakcji? Odpowiedź jest tylko częściowo pozytywna.

Dla $n = 2$ gwarantuje nam twierdzenie Ando istnienie dylatacji unitarnej dla pary przemiennych kontrakcji (zatem otrzymamy: $T_1^n T_2^m = P_H U_1^n U_2^m|_H$):

Twierdzenie 0.3 (Ando)**.** *Niech T_1, T_2 będzie parą przemiennych kontrakcji w przestrzeni Hilberta H. Wtedy istnieje taka przestrzeń Hilberta K zawierająca H, oraz para przemiennych izometrii S_1, S_2 w K, że*

$$T_1^{n_1} T_2^{n_2} = P_H \; S_1^{n_1} S_2^{n_2}|_H$$

dla

$$\forall_{i \in \{1,2\}} \quad S_i\mathbf{h} = \{T_i h_0, D_{T_i} h_0, 0, h_1, \dots\}$$

W związku z tym zachodzi tutaj również nierówność von Neumanna:

$$\|p(T_1, T_2)\| \leqslant \sup_{(z,w) \in \mathbb{D}^2} |p(z, w)|$$

Dla $n \geqslant 3$ jednak nie zawsze istnieje dylatacja unitarna, trzeba narzucić dodatkowe warunki. Jednym z nich jest np. warunek Brehmera:

Definicja 0.3 (Warunek Brehmera)**.** *Układ n przemiennych kontrakcji $(T_1, \dots, T_n)$ spełnia warunek Brehmera, gdy:*

$$\forall_{N \subseteq \{1,\dots,n\}} \quad \sum_{M \subseteq N} (-1)^{\# M} T_M T_M^* \geqslant 0$$

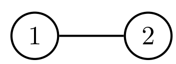
gdzie $T_M := T_{m_1} \cdot \ldots \cdot T_{m_k}$ jeżeli $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. W dodatku $T_\varnothing$ jest równy operatorowi identyczności.

Tę sytuację możemy wykorzystać jako wprowadzenie do unitarnej dylatacji nieprzemiennych kontrakcji. Tutaj oznaczenie "nieprzemienne" oznacza "nie są przemienne w klasycznym znaczeniu" tj. gdy komutator dwóch dowolnych operatorów z układu n kontrakcji jest równy 1.

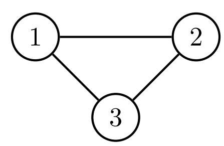
1 Przemienność według grafu a istnienie dylatacji unitarnej

Przemienność operatorów ze sobą można uogólnić za pomocą tzw. "przemienności według grafu":

Definicja 1.1 (Przemienność według grafu)**.** *Niech* $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(H)$ *będzie układem* n *operatorów oraz niech* G *będzie grafem o wierzchołkach* $\{1, \dots, n\}$*. Mówimy, że* $T_1, \dots, T_n$ *komutują ze sobą według* G*, gdy* $T_iT_j = T_jT_i$*, jeżeli* (i, j) *jest krawędzią w* G*.*



Rysunek 1: Przykład grafu G dla pary przemiennych operatorów



Rysunek 2: Przykład grafu G dla trójki przemiennych operatorów

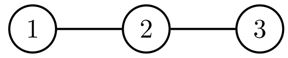
W związku z tym istnieje twierdzenie, które w konsekwencji uogólnia, czemu dla $n \geqslant 3$ przemiennych ze sobą kontrakcji nie zawsze istnieje dylatacja unitarna:

Twierdzenie 1.1 (o istnieniu dylatacji unitarnej dla operatorów przemiennych według grafa)**.** *Niech* G *będzie acyklicznym grafem z* n *wierzchołkami* $\{1, \dots, n\}$*. Dla każdego układu* n *kontrakcji* $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{B}(H)$ *przemiennych według* G *istnieje układ takich* n *operatorów unitarnych* $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{B}(K)$ *przemiennych według* G*, że:*

$$T_1 \dots T_n = P_H U_1 \dots U_n|_H$$

Na odwrót zachodzi, że jeżeli G *posiada cykl, to istnieje taki układ* n *kontrakcji przemiennych według* G*, że nie posiada dylatacji unitarnej przemiennej według* G*.*

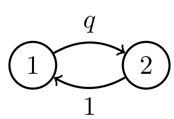
To wytłumacza, czemu nie zawsze istnieje na ogół dylatacja unitarna dla $n \geqslant 3$ przemiennych ze sobą kontrakcji: Jest tak, ponieważ otrzymamy cykl (dla $n = 3$ jak widać przyjmuje graf postać trójkąta, dla $n = 4$ czworokąta, itd.).



Rysunek 3: Przykład grafu G dla trójki (T_1, T_2, T_3) z przemiennością $T_1T_2 = T_2T_1$ oraz $T_2T_3 = T_3T_2$. Jak widać, **nie** zachodzi $T_1T_3 = T_3T_1$. Ponieaż G nie zawiera cykli, to na podstawie poprzedniego twierdzenia istnieje dylatacja unitarna, która jest według tego schematu przemienna.

2 Operatory q-przemienne

Definicja 2.1 (Operatory q-przemienne)**.** *Niech $q := e^{i\alpha}$ będzie stałą zależną od parametru rzeczywistego α. Nazywamy operatory T_1, T_2 operatorami q-przemiennymi, gdy $T_2T_1 = qT_1T_2$.*



Rysunek 4: Przykład grafu G dla operatorów q-przemiennych. W porównaniu do wcześniejszych grafów, uwzględniamy tutaj wagi krawędzi oraz wprowadzamy krawędzie skierowane.

Praca autorstwa Dinesh Kumar Keshari i Nirupama Mallick pod tytułem "q-commuting dilation" z 2019 pokazała, że dla każdej pary q-przemiennych kontrakcji istnieje dylatacja we formie pary q-przemiennych operatorów unitarnych.

Ponieważ PDF nie jest nigdzie dostępny (tylko abstrakt jest do znalezienia), to na podstawie abstraktu przypuszczam (to są tylko moje osobiście domyślenia!), że uzasadniono to na podstawie tego, że być może istnieje izomorfizm między dwoma krawędziami skierowanymi o wadze z modułem 1 (*Rysunek 4*) oraz zwykłą krawędzią nieskierowaną (*Rysunek 1*), przez co możemy zastosować poprzednie twierdzenie dla operatorów q-przemiennych.

W każdym razie ciekawą rzeczą tutaj jest pojawienie się zjawiska tzw. η-dylatacji. Pozwala to nam pokazać związek między parą q-przemiennych operatorów oraz parą przemiennych operatorów.

Najpierw ale wprowadźmy jeszcze następujące pojęcia:

Definicja 2.2 ($\mathcal{A}_\alpha$ - C^*-algebra generowana przez parę q-przemiennych operatorów unitarnych)**.** *C^*-algebrę nazywamy taką algebrę banacha (tj. taka algebra z mnożeniem, że mamy dla normy $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ dla a, b - elementy z algebry), która jest wyposażona z działaniem inwolucji (tj. $(a+b)^* = a^* + b^*$ oraz $(ab)^* = b^*a^*$) i spełnia warunek:*

$$\|a^*a\| = \|a\|\|a^*\|$$

Jeżeli jest generowana przez parę q-przemiennych operatorów unitarnych, mówimy, że jest ta algebra nieprzemiennym torusem.

Dodatkowo nazywamy ją wymierną/niewymierną, gdy $\frac{\alpha}{2\pi}$ jest wymierne/niewymierne.

2.1 η-dylatacja

Definicja 2.3 (η-dylatacja)**.** *Niech $\eta \in \mathbb{C}$ oraz $(T_1, \ldots, T_n)$ będzie układem n kontrakcji w przestrzeni Hilberta H. Jako η-dylatację będziemy nazywać taki układ n przemiennych operatorów $(\eta U_1, \ldots, \eta U_n)$ w nadprzestrzeni Hilberta K, że:*

$$\forall_{i\in\{1,\ldots,n\}} \quad T_i = \eta P_H U_i|_H$$

Uwaga. *Będziemy skrótowo pisać, że $(\eta\tilde{U}, \eta\tilde{V})$ jest η-dylatacją (U, V), gdy $(U, V) \prec \eta(\tilde{U}, \tilde{V})$.*

Naszym celem jest znalezienie takiej wartości η_α, że:

$$\eta_\alpha := \inf\{\eta > 1 \mid (U, V) \prec \eta(\tilde{U}, \tilde{V})\}$$

Okaże się, że najmniejsza wartość η_α dla $q = e^{i\alpha}$ wyraża się następująco:

$$\eta_\alpha = \frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$$

Dowód tego jest dość żmudną sprawą, spróbuję to tutaj możliwie jak najlepiej przedstawić.

Na początek potrzebujemy kilka twierdzeń:

Twierdzenie 2.1. *Niech U, V będą q-przemiennymi operatorami unitarnymi dla $q = e^{i\alpha}$. Wtedy istnieje taka dylatacja dla U, V, że jest w postaci operatorów normalnych M, N o normie $\|M\|, \|N\| \leqslant \eta$.*

To twierdzenie zostawimy bez dowodu.

Twierdzenie 2.2. *Niech U, V będą q-przemiennymi operatorami unitarnymi dla $q = e^{i\alpha}$. Jeżeli M, N są takimi przemiennymi operatorami normalnymi, że są dylatacją dla U, V oraz $\|M\|, \|N\| \leqslant \eta$, to $\eta \geqslant \frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$.*

Dowód. Dowód polega na tym, że jeżeli zakładamy, że $\|M\|, \|N\| \leqslant r$ dla $r < \frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$, to wtedy powinniśmy dostać sprzeczność z nierównością von Neumanna (a więc nie istniałaby taka dylatacja):

$$\|P(U, V)\| > \sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} |P(z, w)|$$

Uwaga: W porównaniu tutaj ze "zwykłą" nierównością von Neumanna dla operatorów unitarnych, bierzemy tutaj - ze względu na górne oszacowanie normy operatorów przez r - supremum po $r\overline{\mathbb{D}^2}$!

Dla łatwości zakładamy, że P to wielomian (o macierzowych współczynnikach) o stopniu 1.

Miejmy na uwadze, że $\mathcal{A}_\alpha \cong C^*(U,V)$. Wtedy każda niezredukowana reprezentacja $C^*(U,V)$ (ozn. $\pi(\cdot)$) jest postaci:

$$\pi(U) = aX,\ \ \pi(V) = bY$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{D}$ oraz:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & q^{k-1} \end{bmatrix}$$

oraz

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie jako k definiujemy najmniejszą liczbę naturalną, dla której $q^k = 1$.

Ustalmy:

$$P(z,w) = P_\lambda(z,w) = \lambda I + z\overline{a}X^* + w\overline{b}Y$$

dla $\lambda > 0$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $U = aX$ oraz $V = bY$. Wtedy:

$$P(U,V) = \lambda I \otimes I + X^* \otimes X + Y \otimes Y$$

Otrzymamy, że $\|P(U,V)\| = \lambda + 2$. Wyliczamy $\sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} \|P(z,w)\|$:

$$\sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} \|P(z,w)\|^2 = \sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} \|\lambda I + z\overline{a}X^* + w\overline{b}Y\|^2 =$$

$$= \sup_{(z',w')\in\overline{\mathbb{D}^2}} \|\lambda I + rz'\overline{a}X^* + rw'\overline{b}Y\|^2 \leqslant \dots$$

Tutaj wyliczamy $\|\lambda I + rz'\overline{a}X^* + rw'\overline{b}Y\|^2$:

$$\|\lambda I + rz'\overline{a}X^* + rw'\overline{b}Y\|^2 = \langle(\lambda I + rz'\overline{a}X^* + rw'\overline{b}Y)f, (\lambda I + rz'\overline{a}X^* + rw'\overline{b}Y)f\rangle$$

dla $\|f\| = 1$. Oszacujemy i liczymy w sposób następujący:

$$\langle \lambda If, \lambda If\rangle = \lambda^2$$

$$\langle \lambda If, rz'\overline{a}X^*f\rangle = \lambda r\langle z'aXf, f\rangle$$

$$\langle rz'\overline{a}X^* f, \lambda I f\rangle = \lambda r\langle z'\overline{a}X^* f, f\rangle$$
$$\langle \lambda I f, rw'\overline{b}Y f\rangle = \lambda r\langle w' b Y^* f, f\rangle$$
$$\langle\ rw'\overline{b}Y f, \lambda I f\rangle = \lambda r\langle w'\overline{b}Y f, f\rangle$$
$$\langle \dots X^* f, \dots Y f\rangle, \langle \dots Y f, \dots X^* f\rangle, \langle \dots X^* f, \dots X^* f\rangle, \langle \dots Y f, \dots Y f\rangle \leqslant r^2\|X\|\|Y\| \leqslant r^2$$

Zatem otrzymamy:

$$\dots \leqslant \sup_{(z',w')\in\overline{\mathbb{D}^2}} \lambda^2 + \lambda r\langle (z'aX + z'\overline{a}X^* + w'\overline{b}Y + w'bY^*)f, f\rangle + 4r^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(z',w')\in\overline{\mathbb{D}^2}} \lambda^2 + \lambda r\|z'aX + z'\overline{a}X^* + w'\overline{b}Y + w'bY^*\| + 4r^2 =$$

dla $\gamma := z'a$ oraz $\delta := w'\overline{b}$ mamy:

$$= \sup_{(\gamma,\delta)\in\overline{\mathbb{D}^2}} \lambda^2 + \lambda r\|\gamma X^* + \overline{\gamma}X + \delta Y + \overline{\delta}Y^*\| + 4r^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda r\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\| + 4r^2$$

Ostatnia równość wiąże się z tym, że macierze X i Y spełniają warunek $\|X + X^* + Y + Y^*\| = \|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|$.

Dalej liczymy:

$$\frac{1}{\lambda}\left(\|P(U,V)\|^2 - \sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} \|P(z,w)\|^2\right) \geqslant 4 - r\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\| + \frac{4-4r^2}{\lambda}$$

Stąd wynika, że prawa strona będzie (dla dostatecznie dużych λ) tylko wtedy dodatnia, jeżeli $r < \frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$. Udowodniliśmy więc tego, czego chcieliśmy (bo to oznacza, że $\|P(U,V)\|$ jest większe od $\sup_{(z,w)\in r\overline{\mathbb{D}^2}} \|P(z,w)\|$, skoro różnica jest dodatnia). Więc dla takiego oszacowania r, nierówność von Neumanna nie będzie spełniona. □

Twierdzenie 2.3. *Istnieje dla operatorów unitarnych q-przemiennych U, V dylatacja w postaci pary przemiennych operatorów normalnych o normie* $\frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$.

Dowód. Że taka wartość dla normy dylatacji może zachodzić, właśnie pokazaliśmy w poprzednich twierdzeniach. Dowód więc polega tutaj na konstrukcji odpowiedniej dylatacji z taką normą.

Niech $h_\alpha := \|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|$. Najpierw pokażemy, że istnieje taki stan φ na $\mathcal{A}_\alpha$, że $|\varphi(u_\alpha)| = |\varphi(v_\alpha)| = \frac{\|h_\alpha\|}{4}$.

Wybierając taki stan ψ, że:

$$|\psi(u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*)| = \|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|$$

oraz korzystając z faktu, że istnieje taki automorfizm σ na $\mathcal{A}_\alpha$, że $\sigma(u_\alpha) = v_\alpha^*$ oraz $\sigma(v_\alpha) = u_\alpha$, to definiujemy:

$$\varphi := \frac{1}{4}(\psi + \psi \circ \sigma + \psi \circ \sigma^2 + \psi \circ \sigma^3)$$

Okaże się też, że istnieje wektor na $x \in L := \mathbb{C}^k$, że dla wszystkich $a \in \mathcal{A}_\alpha$ mamy $\varphi(a) = \langle x, \pi(a)x \rangle$ (gdzie π i k to jest to samo co z poprzedniego twierdzenia).

Nasze szukane dylatacje o normie $\frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$ konstruujemy w następujący sposób:

$$\tilde{U} = U \otimes \frac{\pi(u_\alpha)}{\varphi(u_\alpha)}, \quad \tilde{V} = V \otimes \frac{\pi(v_\alpha)}{\varphi(v_\alpha)}$$

Będą to dylatacje na przestrzeni $K = H \otimes L$. Rozważmy teraz izometrię:

$$\forall_{h \in H} \quad Wh = h \otimes x$$

gdzie x jest ten wektor w L związany z postacią stanu φ.

Okaże się, że $\tilde{U}$ i U (oraz analogicznie $\tilde{V}$ i V) są (izometrycznie) równoważne ze sobą, co oznacza, że faktycznie $\tilde{U}$ i $\tilde{V}$ są dylatacjami U i V:

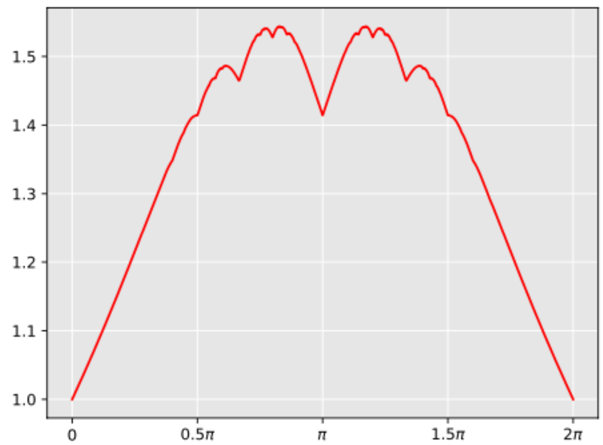
$$W^* \tilde{U} W = \frac{\langle x, \pi(u_\alpha)x \rangle}{\varphi(u_\alpha)} U = U$$

$$W^* \tilde{V} W = \frac{\langle x, \pi(v_\alpha)x \rangle}{\varphi(v_\alpha)} V = V$$

□

Łącząc te twierdzenia razem, jesteśmy w stanie wskazać, że faktycznie najmniejsze oszacowanie dla wartości η będzie przyjmowało postać $\frac{4}{\|u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*\|}$ (wtedy po prostu "unormujemy" operatory normalne do operatorów unitarnych, stąd ich norma "wyskoczy przed operator" i staje się naszą szukaną wartością η_α (w związku z tym z normalnej dylatacji otrzymamy η-dylatację)).

Żeby móc wyznaczyć wartość η_α, używano narzędzi i metod obliczeniowych. Obecnie przypuszcza się, że minimum jest osiągnięty dla $\alpha_s := \frac{2\pi}{\delta_s} = 2\pi(\sqrt{2}-1)$, gdzie δ_s jest srebrnym podziałem tj. $\sqrt{2} + 1$.

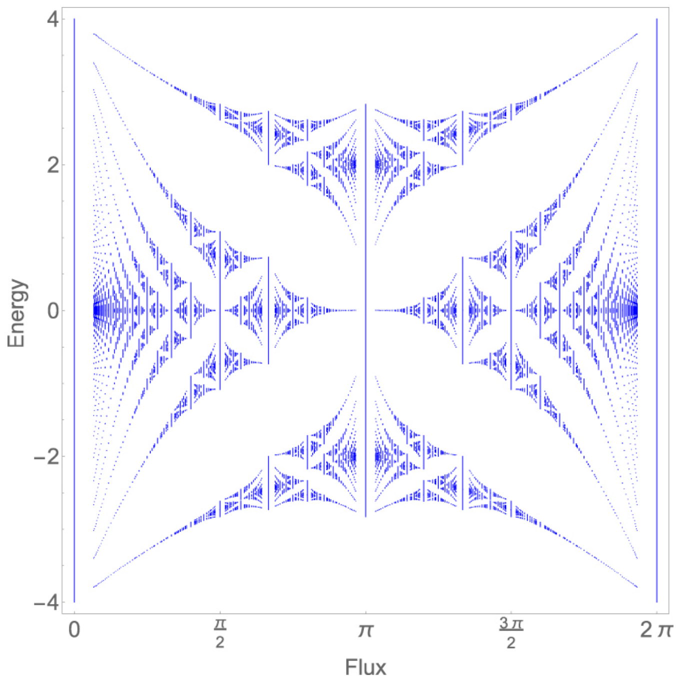


Rysunek 5: Różne wartości η_α dla różnych $\alpha \in [0, 2\pi]$ tże $\frac{\alpha}{2\pi}$ jest wymierne.

2.2 Interpretacja fizyczna

Operator postaci $h_\alpha := u_\alpha + u_\alpha^* + v_\alpha + v_\alpha^*$ jest tak zwanym **almost Mathieu operator**. **Definiujemy go dla każdego** α. Występuje on jako Hamiltonian w modelu matematycznym opisującym elektron w kracie pod wpływem pola magnetycznego.

Co ciekawe, próbując obrazować widmo tego operatora dla różnych α tże. $\frac{\alpha}{2\pi}$ jest wymierne (wartości widma są wyliczone numerycznie), to otrzymamy tzw. Hofstadter butterfly:



Rysunek 6: **Hofstadter butterfly**

To, co się okazało, że widmo h_α wydaje się zmieniać *w sposób ciągły* w zależności od α (to w sumie jest też na tyle logiczne, że widmo Hamiltoniana (a więc h_α) opisuje stany energii - tutaj w zależności od α).

Inna bardzo cieakwa rzecz jest tzw. *Ten Martini Problem*: Czy widmo h_α jest zbiorem Cantora dla takich α że $\frac{\alpha}{2\pi}$ jest niewymierne? Odpowiedź jest TAK.

Wracając ale do ciągłości widma: Matematycy Choi, Elliott i Yui pokazali, że widmo $\sigma(h_\alpha)$ jest (w metryce Hausdorffa) ciągłe w sensie Höldera dla wykładnika $\frac{1}{3}$. Natomiast Avron, Mouche i Simon pokazywali to dla $\frac{1}{2}$.

Za pomocą teorii dylatacji jesteśmy w stanie udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4 (o $\frac{1}{2}$-Hölder ciągłości h_α)**.** *Widmo $\sigma(h_\alpha)$ jest $\frac{1}{2}$-Hölder ciągłe względem odległości Hausdorffa dla zwartych podprzestrzeni w $\mathbb{R}$.*

Przypomnijmy przed dowodem najpierw, co to oznacza "ciągłość w sensie Höldera":

Definicja 2.4 (Ciągłość w sensie θ-Höldera)**.** *Jest to w pewnym sensie uogólnienie ciągłości według Lipschitza:*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\|x - y\|^\theta$$

dla $0 < \theta \leqslant 1$.

Dowód. Do dowodu musimy przytoczyć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.5 (o ciągłości skali dylatacyjnej)**.** *Niech* α, β *będą rzeczywiste oraz* $q = e^{i\alpha}$ *i* $p = e^{i\beta}$*. Niech* $\eta = e^{\frac{|\alpha-\beta|}{4}}$*. Wtedy dla dowolnej pary q-przemiennych operatorów unitarnych* U, V *istnieje taka para operatorów p-przemiennych* $\tilde{U}, \tilde{V}$*, że* $(U, V) \prec \eta(\tilde{U}, \tilde{V})$*.*

Więc jeżeli $\alpha \approx \beta$, to tutaj $\eta \approx 1$.

Zatem:

$$\eta u_\beta = \begin{pmatrix} u_\alpha & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

a więc:

$$\eta h_\beta = \begin{pmatrix} h_\alpha & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

Bo ale:

$$\|x\|, \|y\| \leqslant \sqrt{1 - \eta^2} \approx 0$$

to mamy:

$$\eta h_\beta \approx \begin{pmatrix} h_\alpha & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Wartość z nie jest w dowodzie ważna. Dostaniemy dla widm:

$$\sigma(h_\alpha) \subseteq \sigma(\begin{pmatrix} h_\alpha & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}) \approx \sigma(\eta h_\beta) \approx \sigma(h_\beta)$$

W analogiczny sposób można pokazać na odwrót, że $\sigma(h_\beta)$ się w sposób przybliżony zawiera w $\sigma(h_\alpha)$.

Co to oznacza? Wprowadźmy teraz krótki lemat:

Lemat 2.1. *Dla* $U \in \mathcal{B}(K)$ *i* $U' \in \mathcal{B}(H)$ *opertorów unitarnych (dla* $H \subset K$*) oraz* R *będąc kompresją* U *na* $H^\perp$ *mamy:*

$$\|U - (U' \oplus R)\| \leqslant 2\sqrt{1 - c^2}$$

Dowód. Jak mamy:

$$U = \begin{pmatrix} cU' & E \\ F & R \end{pmatrix}$$

to wtedy liczymy wprost:

$$\|U - (U' \oplus R)\| = \| \begin{pmatrix} (c-1)U' & E \\ F & 0 \end{pmatrix} \| \leqslant \| \begin{pmatrix} (c-1)U' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \| + \| \begin{pmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{pmatrix} \| \leqslant \dots$$

Zakładając, że $\|E\|, \|F\| \leqslant \sqrt{1 - c^2}$, otrzymamy:

$$\dots \leqslant 1 - c + \sqrt{1 - c^2} \leqslant 2\sqrt{1 - c^2}$$

□

Teraz trzeba:

$$\eta h_\beta = \begin{pmatrix} h_\alpha & x \\ y & z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h_\beta = \begin{pmatrix} \eta h_\alpha & \tilde{x} \\ \tilde{y} & \tilde{z} \end{pmatrix}$$

Bez straty ogólności możemy dalej traktować $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ jako x, y, z. Wtedy licząc:

$$\sqrt{1-\eta^2} = \sqrt{1 - e^{\frac{|\alpha-\beta|}{2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|\alpha-\beta|}$$

Możemy zastosować lemat, i otrzymamy faktycznie ciągłość $\frac{1}{2}$-Höldera:

$$d(\sigma(h_\alpha, h_\beta)) \leqslant \kappa \cdot \sqrt{2}\sqrt{\alpha-\beta}$$

gdzie κ pojawia się przez następujące górne oszacowanie wielomianu:

$$\|p(x_1, \ldots, x_n) - p(y_1, \ldots, y_n)\| \leqslant \kappa \cdot \max\{\|x_1 - y_1\|, \ldots, \|x_n - y_n\|\}$$

Tutaj d jest odległością Hausdorffa. $\square$