Adam Paweł Wojda
Zakład Matematyki Dyskretnej
Wydział Matematyki Stosowanej
AGH – Kraków

Autoreferat

W prezentacji mojego dorobku naukowego skoncentruję się głównie na pracach matematycznych, które w załączonej liście publikacji wymienione są jako *Prace w recenzowanych czasopismach matematycznych*. Prace o numerach 23-35 tej listy są opublikowane po habilitacji. Artykuły 1 i 3 z listy *Prac przygotowanych do druku* są przyjęte (p. listy od redakcji, odpowiednio, Discrete Mathemaics i Discussiones Mathematicae - Graph Theory.)
Prace w opublikowane w czasopismach niematematycznych są napisane w początkowym okresie mojej pracy i dotyczą zastosowań matematyki w urbanistyce i ekonomii.

Główną domeną moich zainteresowań naukowych jest teoria grafów, przede wszystkim zaś teoria grafów ekstremalnych. Artykuły opublikowane (oraz przygotowane do druku) dotyczą następujących zagadnień:

1) Cykle i ścieżki w grafach zwykłych i skierowanych (w tym problemy hamiltonowskie i ich uogólnienia).
Temu zagadnieniu są poświęcone prace 1-14, 18, 19, 21-26, 28, 31 i 34 listy prac opublikowanych w czasopismach matematycznych oraz prace 3, 4 oraz 6 na liście prac przygotowanych do druku.

2) Problemy zawierania przez grafy (zwykłe lub skierowane) o wystarczająco dużym rozmiarze dowolnych grafów o zadanym rozmiarze. Problematyka ta wiąże się w sposób naturalny z pakowaniem grafów o niewielkim rozmiarze (w graf pełny) i, w konsekwencji, z grafami samodopełniającymi.
Prace 15-17, 20, 27, 29, 30, 32 listy prac opublikowanych w czasopismach matematycznych oraz prace 1, 2 i 5 spośród prac przygotowanych do druku dotyczą tak rozumianych problemów ekstremalnych.

3) **Kolorowanie krawędzi grafów samodopełniających**, któremu poświęcone są prace 33 i 35 listy opublikowanych prac matematycznych.

Jestem promotorem 3 zakończonych przewodów doktorskich (2 w PAN, 1 w Akademii Pedagogicznej w Krakowie) oraz opiekunem naukowym 2 doktorantów którzy, moim zdaniem, mają wszelkie szanse obronienia swoich prac doktorskich w 2004 roku. Dwie prace obronione (dr B. Orchel i dr I. Zioło) dotyczą problematyki drugiej a jedna (dr M. Zwonek) trzeciej. Dwie osoby przygotowujące doktoraty zajmują się tematyką pierwszą.

A oto najważniejsze wyniki, które udało mi się uzyskać w każdym z wymienionych zagadnień.

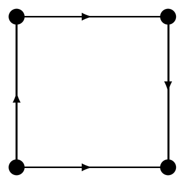
1) **Cykle i ścieżki w grafach zwykłych i skierowanych.**
Pierwsze wyniki otrzymane przeze mnie jeszcze w latach 70. były otrzymane wspólnie lub z inspiracji promotora mojej pracy doktorskiej, prof. Z. Skupienia (prace 2-5 i 7-9). Wśród tych prac najistotniejszymi wynikami są, moim zdaniem, następujące:

- Warunek wystarczający dla grafów $k-$krawędziowo hamiltonowskich (praca 3) (będący uogólnieniem warunku Skupienia dla $k = 0$).
- Wyniki dotyczące własności hamiltonowskich potęg grafów $p-$hamiltonowskich (praca 6).
- Charakterystyka grafów nie $(p, q)-$hamiltonowskich ekstremalnych ze względu na pewne własności (praca 9, wspólna ze Skupieniem). W pracy tej uogólniono (dla grafów $(p, q)-$hamiltonowskich) znane warunki Chvátala, Berge'a i Diraca-Pósy. Samo pojęcie grafów $(p, q)-$hamiltonowskich zdefiniowane w pracy 3, uogólnia pojęcia grafów $p-$hamiltonowskich oraz $q-$krawędziowo hamiltonowskich i pozwoliło sformułować warunki wystarczające, które były naturalnymi uogólnieniami warunków znanych wcześniej.
- W 5, między innymi, znaleziono minimalny rozmiar grafów silnie $(p, q)-$hamiltonowskich otrzymując w ten sposób dość daleko idące uogólnienie twierdzenia Moona[1]. Pewno nie najlepiej się stało, że praca 5 ukazała się w czasopiśmie, które zarzuciło publikowanie

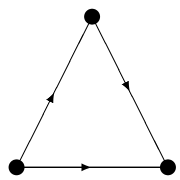
[1]J.W. Moon, On a problem of Ore, Math. Gaz., 49 (1965) 40-41.

artykułów i ograniczyło się do publikowania abstraktów nadesłanych preprintów (po czym w ogóle zniknęło).

W pracach 10-14, 18, 19, 26, 31 i 34 listy prac opublikowanych w recenzowanych czasopismach matematycznych rozważane są problemy cykli i ścieżek w grafach skierowanych. Pierwsze z tych prac były zainspirowane tak zwanymi *objazdami*. W 1974 roku Alspach, Reid i Roselle[2] udowodnili, że każdy silnie spójny turniej rzędu $n \leq 10$ zawierający $(3,2)-$objazd, tzn. turniej tranzytywny o trzech wierzchołkach, zawiera $D(p,2)$ (t.j. cykl rzędu p, w którym dokładnie jeden łuk jest zorientowany niezgodnie z pewną orientacją cyklu) dla wszystkich p spełniających $3 \leq p \leq n$.

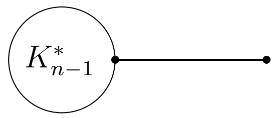


$D(4,2)$



$D(3,2)$

W 11 wykazano, że każdy graf skierowany G rzędu n o co najmniej $(n-1)(n-2)+2$ łukach zawiera wszystkie cykle hamiltonowskie złożone z dwóch bloków chyba, że $G = N_n$, gdzie N_n jest (jedynym) grafem skierowanym rzędu n zawierającym wierzchołek wiszący stopnia 2.



Graf N_n

[2]B. Alspach, K.B. Reid i D.P. Roselle, Bypasses in asymetric digraphs, J. Combinatorial Theory, Ser. B 17 (1974) 11-18.

Zaproponowana przeze mnie i Benhocina w 12 (rok 1983) hipoteza, że każdy graf skierowany rzędu n i o rozmiarze co najmniej $(n-1)(n-2)+2$ zawiera wszystkie orientacje cykli długości p dla $3 \leq p \leq n$ lub jest izomorficzny z grafem N, lub cykl jest tzw. antycyklem lub silnym cyklem hamiltonowskim zaś G jednym z trzech dość oczywistych grafów wykluczonych, do dziś pozostaje, o ile mi wiadomo, otwarta.

W 13 i 14 rozważany jest problem istnienia różnych orientacji cykli w turniejach. Być może najistotniejszym wynikiem tych prac jest zawarte w pracy 14 następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Każdy turniej T rzędu $n \geq 3$ zawiera każdą orientację cyklu rzędu p dla $3 \leq p \leq n$ składającą się z dwóch bloków, lub jest jednym z pięciu turniejów wykluczonych (o $3, 4, 5$ lub 6 wierzchołkach).*

Twierdzenie 1 jest oczywiście związane z hipotezą Rosenfelda[3], że każdy turniej o co najmniej 10 wierzchołkach zawiera wszystkie, poza być może silną, orientacje cykli wszystkich długości cykli. Ta bardzo trudna hipoteza dopiero zupełnie niedawno została wykazana przez F. Haveta dla turniejów o co najmniej 68 wierzchołkach. Niemniej twierdzenie 1 jest ciągle najlepszym wynikiem dla turniejów o rzędzie mniejszym.

W pracy 26 wykazaliśmy (z M. Woźniakiem), że każdy zrównoważony, skierowany graf dwudzielny rzędu $2n \geq 6$ o rozmiarze co najmniej $n^2 - 2n + 3$ zawiera prawie symetryczny cykl Hamiltona (tzn. cykl Hamiltona w którym co najwyżej jeden łuk nie jest symetryczny), lub graf jest jedynym grafem wykluczonym.
Twierdzenie to implikuje znane wcześniej wyniki N. Chakruna, M. Manoussakisa i Y. Manoussakisa[4], którzy przy identycznych założeniach udowodnili jedynie istnienie hamiltonowskiego antycyklu w grafie.

[3]M. Rosenfeld, Antidirected Hamiltonian cycles in tournaments, J. Combinatorial Theory, Ser. B (1974) 234-242).

[4]N. Chakroun, M. Manoussakis i Y. Manoussakis, Number of arcs, cycles and paths in bipartite digraphs, w Combinatorics and Graph Theory, Banach Center Publications, ed. M. Borowiecki i Z. Skupień, vol. 35.

Praca 31 (z 1995 roku) była zainspirowana problemem opublikowanym rok wcześniej przez G. Schaara[5]. Problem ten polegał na wyznaczeniu dla skierowanego, silnie spójnego grafu G następujących dwóch parametrów:

$$e_H(G) = \min\{l : G^l \text{ jest hamiltonowski}\}$$

$$e_{HC}(G) = \min\{l : G^l \text{ jest hamiltonowsko spójny}\}$$

Okazało się, że można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2 *Jeśli G jest silnie $k-$spójnym grafem skierowanym rzędu $n \geq 2$, $l, p, q \in \mathbf{N}$, $l \geq (n + (p+q))/2k$, $p+q \leq n-2$. Wówczas G^l jest silnie $(p,q)-$hamiltonowski.*

Grafy silnie $(0,0)-$hamiltonowskie to dokładnie grafy hamiltonowskie zaś silnie $(0,1)-$hamiltonowskie to grafy hamiltonowsko spójne. Z drugiej strony, twierdzenie 2 jest najlepsze możliwe wobec, także wykazanego w 31, twierdzenia:

Twierdzenie 3 *Niech n, k, l, p i q będą liczbami naturalnymi spełniającymi $1 \leq k$, $p+q \leq n-2k-1$ oraz $n+p+q = (l-1)2k + r$, gdzie $1 \leq r \leq 2k$. Wówczas istnieją silnie spójne grafy skierowane G rzędu n takie, że G^{l-1} nie jest silnie $(p,q)-$hamiltonowski.*

Oczywiście z twierdzenia 2 wynikają nierówności: $e_H(G) \leq \lceil n/2k \rceil$ dla $n \geq 2$, $e_{HC}(G) \leq \lceil (n+1)/2k \rceil$ dla $n \geq 3$ dla grafów G silnie $k-$spójnych.

Następne prace dotyczące problemów istnienia pewnych cykli w grafach dotyczą grafów nieskierowanych. W pracy 21 (wspólnej z Benhocinem) udało się scharakteryzować niehamiltonowskie grafy $2-$spójne rzędu n, w których

$$d(x,y) = 2 \Rightarrow \max\{d(x), d(y)\} \geq \frac{n-1}{2}$$

[5]G. Schaar, Remarks on Hamiltonian properties of powers of graphs, Discrete Appl. Math. 51 (1994) 181-186.

oraz, przede wszystkiem, wykazać, że grafy 2−spójne spełniające warunek Fana:

$$d(x,y)=2 \Rightarrow \max\{d(x),d(y)\} \geq \frac{n}{2}$$

są pancykliczne lub izomorficzne z $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ $K'_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ lub grafem Fana.

W pracach 22 i 28 rozważane jest istnienie w grafach (nieskierowanych) cykli lub cykli hamiltonowskich zawierających zadane zbiory krawędzi niezależnych. Najbardziej istotnymi wynikami tych prac wydają mi się następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4 *Jeśli w grafie G rzędu $n \geq 3$ suma stopni dowolnych dwóch niepołączonych wierzchołków wynosi co najmniej $(4n-4)/3$ to każdy zbiór krawędzi niezależnych grafu jest zawarty w pewnym cyklu hamiltonowskim G lub $G = \frac{n+2}{3}K_1 * H$, gdzie H jest grafem rzędu $\frac{2n-2}{3}$ zawierającym $\frac{n-1}{3}$ krawędzi niezależnych.*

Twierdzenie 4 jest polepszeniem twierdzenia Häggkvista[6] z 1979 roku.

Twierdzenie 5 *Każdy graf G rzędu $n \geq 3$ o minimalnym stopniu co najmniej k i rozmiarze co najmniej $h(n,k) = \max\{g(n,k), g(n, \frac{2n-2}{3}\}$, gdzie $g(n,k) = (4n^2 - 4nk - 4n + 2k = 5k^2)/8$ zawiera dowolny zbiór krawędzi niezależnych w pewnym cyklu hamiltonowskim lub k jest parzyste, $G = H(n,k_0)$, gdzie $H(n,k) = (k/2K_1) * K_k * K_{n-3k/2}$ zaś $k_0 \in \{k, (2n-2)/3\}$.*

Niech $F(n,k) = \max\{n(n,k), f(n,n/2)\}$, gdzie $\begin{pmatrix} n-k+1 \\ 2 \end{pmatrix} + (k-1)/2 + (k-1)^2$. Zbiór grafów postaci $((k-1)/2K_2) * K_{k-1} * K_{n-2k+2}$ oznaczmy przez $G(n,k)$.

Twierdzenie 6 *Jeśli k, n są nieujemnymi liczbami całkowitymi, $n \geq 3$, $k \leq n-1$, zaś G jest grafem rzędu n spełniającym $\delta(G) \geq k$ rozmiaru co najmniej $F(n,k)$, wówczas dowolny zbiór krawędzi niezależnych grafu jest zawarty w pewnym cyklu lub $G \in G(n,k_0)$, $k_0 \in \{k, n/2\}$.*

[6] R. Häggkvist, On $F-$Hamiltonian graphs, w J.A. Bondy i U.S.R. Murthy eds., Graph Theory and Related Topics, Academic Press New York (1979) 219-231.

Aktualnie zajmuję się także wspomnianymi właśnie problemami. W przygotowanej do druku pracy *Cycles through matchings in bipartite graphs* (praca 4 na liście prac czekających na opublikowanie, wspólna z Amar, Flandrin i Gancarzewiczem) zajmujemy się analogicznymi problemami w grafach dwudzielnych. W pracy tej dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 7 *Niech $G = (B, W; E)$ będzie zrównoważonym grafem dwudzielnym rzędu $2n$.*

1) *Jeśli dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x \in B$, $y \in W$ zachodzi*

$$d(x) + d(y) \geq 4n/3$$

wówczas każdy zbiór krawędzi niezależnych jest zawarty w cyklu hamiltonowskim grafu G.

2) *Jeśli $n > 4$ i dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x \in B$, $y \in W$ zachodzi*

$$d(x) + d(y) \geq 5n/4$$

wówczas dowolny zbór krawędzi niezależnych grafu G jest zawarty w pewnym cyklu.

W pracy zamieszczony został przykład grafu, który dowodzi ostrości pierwszej części twierdzenia. Część druga najprawdopodobniej nie jest ostra, zaproponowaliśmy następującą hipotezę.

Hipoteza 1 *Jeśli $n > 4$ i dla dowolnych niepołączonych wierzchołków $x \in B$, $y \in W$ zachodzi*

$$d(x) + d(y) \geq n + 2$$

wówczs dowolny zbór krawędzi niezależnych grafu G jest zawarty w pewnym cyklu.

W pracy 34 (wspólnej z G. Gancarzewiczem) dowodzimy, ze każdy 3−spójny graf G rzędu n spełniający warunek typu Fana:

$$d(x, y) = 2 \Rightarrow \max\{d(x), d(y)\} \geq \frac{n + k}{2}$$

zawiera dowolny zbiór k krawędzi M w pewnym cyklu, lub ma minimalny nieparzysty podzbiór zbioru M, którego usunięcie rozspójnia graf G.

2) **Problemy ekstremalne (pakowanie) dla grafów zwykłych i skierowanych.**
Pierwszą pracą z tej dziedziny jest artykuł 15 (wspólny z Benhocinem). Dowodzi się w nim, że jeśli graf rzędu $n \equiv 0, 1$ $(mod\ 4)$ ma rozmiar nie większy niż $n-1$, to jest zawarty w grafie samodopełniającym (rzędu n), a więc także w swoim dopełnieniu. Dla grafów skierowanych udowodniono podobne twierdzenie dla rozmiaru co najwyżej n i postawiono następującą hipotezę.

Hipoteza 2 *Każdy graf skierowany rzędu n i rozmiaru co najwyżej $2n-4$ jest zawarty w swoim dopełnieniu.*

Hipoteza 2 jest do dziś otwarta, choć pewnym, wyraźnym postępem jest wykazanie (wspólnie z I. Zioło) w artykule 32, że każdy graf skierowany rzędu n o rozmiarze co najwyżej $\frac{3(n-2)}{2}$ jest zawarty w swoim dopełnieniu, lub jest izomorficzny z pewnym grafem o 4 wierzchołkach. Wydaje się, że ten ostatni wynik będzie bardzo trudno poprawić.
W pracy 20 udało się wykazać (wspólnie z Benhocinem i Veldmanem), że jeśli G i H są grafami skierowanymi rzędu n i o sumie rozmiarów co najwyżej $2n-1$, to G i H są pakowalne lub jedną z opisanych par wyjątków.

Grafów skierowanych dotyczy także hipoteza, która ukazała się w 17.

Hipoteza 3 *Niech liczby całkowite m i n spełniają $2 \le m \le n/2$. Oznaczmy przez $f(n,k)$ najmniejszą liczbę taką, że istnieją dwa grafy skierowane G i H rzędu n takie, że rozmiar G jest równy k, rozmiar H jest równy $f(n,k)$ oraz H nie zawiera się w dopełnieniu G. Wówczas*

$$f(n, n-m) = 2n - \lfloor n/m \rfloor$$

W 17 podano przykład rodziny grafów dowodzący, że hipoteza 3 jest ostra. Mimo, że jest cytowana w popularnej monografii Yapa [7] do chwili obecnej pozostaje otwarta.

Aby zacytować najważniejsze wyniki następnych prac zdefiniujmy wpierw *pakowanie* dwóch grafów dwudzielnych. Niech $G = (L, R; E)$ i $G' = (L', R'; E)$ będą dwoma grafami dwudzielnymi. Mówimy, że G i H są *pakowalne* jeżeli istnieje bijekcja $\varphi : L \cup R \to L' \cup R'$ spełniająca następujące warunki:

1) $\varphi(L) = L'$,

2) jeśli $xy \in E$ to $\varphi(x)\varphi(y) \notin E'$.

W głównym twierdzeniu 27 (z Woźniakiem) dowodzimy, że każdy graf rzędu n i rozmiaru co najwyżej $n-2$ da się trzykrotnie spakować w K_n^* (lub jest jednym z dwóch wyjątków (rzędu 5 lub 8)).
W pracach 29 (z Fouquetem) i 30 (z Vaderlindem) otrzymano rezultaty dotyczące pakowania grafów dwudzielnych. Przez $e(G)$ oznaczać będziemy rozmiar grafu G.

W 29 udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8 *Niech G i H będą dwoma zrównoważonymi grafami dwudzielnymi rzędu $2n$ spełniającymi $e(G) \leq 2n$ i $e(H) \leq p - 2$. Wówczas grafy G i H są pakowalne.*

Niemal natychmiast jest widoczne, że znane twierdzenie[8] o tym, że *każdy dwudzielny graf zrównoważony rzędu $2n$ o rozmiarze co najmniej $n^2 - n + 2$ jest hamiltonowski* jest wnioskiem z twierdzenia 8.

Innym twierdzeniem zawartym w 29 jest następujące (polepszone nieco w pracy 30).

Twierdzenie 9 *Dowolne dwa grafy dwudzielne $G = (L, R; E)$ i $H = (L', R'; E')$ takie, że $|L| = |L'| = p$, $|R| = |R'| - q$ spełniające warunek $e(G) + e(H) < p + q$ są pakowalne.*

[7] H.P. Yap, Some Topics in Graph Theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 108, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[8] p. np. C. Berge, Graphs, North-Holland Mathematical Library 6, Amsterdam 1985.

W pracy 29 scharakteryzowano także wszystkie niepakowalne pary grafów spełniających warunek $e(G) + e(H) = p + q$.

Spośród prac przygotowanych do druku, prace 1 i 3 są już przyjęte przez redakcje (1 do Discrete Mathematics, 3 do Discussioness Mathematicae). Pierwsza z tych prac jest poświęcona grafom ekstremalnym bez drzew o zadanym rozmiarze. Jeśli przedstawiona tam hipoteza jest prawdziwa, byłoby to daleko idące uogólnienie jednego z twierdzeń Skupienia z 1976 roku[9]. W drugiej (współautor A. Dudek) jest mowa o nasyconych grafach dwudzielnych bez P_m (a więc grafach nie zawierających ścieżki P_m, lecz takich w których po dodaniu jakiejkolwiek krawędzi P_m jest już zawarta) o minimalnym rozmiarze. W pracy tej znaleziono zarówno rozmiar jak i same grafy dwudzielne nasycone bez P_m o minimalnym rozmiarze dla pewnych wartości m, znajdując tym samym odpowiednik znanego twierdzenia Kásony'ego i Tuzy [10] dla grafów dwudzielnych. Wydaje się ciekawe, że problem charakteryzacji grafów nasyconych bez P_m o minimalnym rozmiarze jest znacznie trudniejszy niż problem grafów ekstremalnych bez ścieżek rzędu k. W przygotowanej do druku pracy 6 (z A. Dudek i G. Katoną) dowodzimy między inymi, że minimalny rozmiar grafów nasyconych ze względu na ścieżkę hamiltonowską jest nie większy niż $2n \log_3(n)$ (nie udało sie znaleźć wartości dokładnej, a jedynie pewną estymację, co zresztą wystarczyło do obalenia znanej hipotezy Zelinki[11]).

3) **Kolorowanie krawędzi grafów samodopełniających.**
Grafy samodopełniajace zostały zdefiniowane niezależnie przez Sachsa[12] i Ringela[13]. O grafach tych wiadomo, że mają rząd n przystający do 0 lub 1 modulo 4, zaś izomorfizm grafu $G = (V; E)$ z jego dopełnieniem $\overline{G}$ jest permutacją zbioru V, która w rozkładzie na cykle rozłączne ma wszystkie cykle długości przystającej do 0 modulo 4, a w przypadku

[9]Z. Skupień, Hamiltonian shortage, path partitions of vertices and matchings in graphs, Coll. Math. 36 (1976) 305-318.

[10]L. Kászonyi i Zs. Tuza, Saturated graphs with minimal number of edges, J. Graph Theory 10 (1986) 203-210.

[11]B. Zelinka, Graphs minimal with respect to absence of hamiltonian path, Discuss. Math. Graph Theory 18 (1998) 205-208.

[12]H. Sachs, Über Selbstkomplementäre Graphen, Publ. Math. Debrecen 9 (1963) 354-358.

[13]G. Ringel, Selbstkomplementäre Graphen, Arch. Math. 14 (1963) 270-288.

nieparzystym dokładnie jeden cykl jest długości 1 (punkt stały) podczas gdy pozostałe są długości przystającej do 0 modulo 4. Bardzo łatwo można zauważyć, że graf samodopełniający G może być regularny tylko wtedy gdy jego rząd jest równy $n = 4k + 1$ i wtedy stopień dowolnego wierzchołka jest równy $2k$.

Wiadomo[14], że indeks chromatyczny $\chi'(G)$ dowolnego grafu G spełnia $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. O grafach G dla których zachodzi $\Delta(G) = \chi'(G)$ mówimy, że są klasy pierwszej, o pozostałych, że są klasy drugiej.

Problemowi indeksu chromatycznego grafów samodopełniających poświęcone są prace 33 i 35. W obu pracach udowodniono pewne twierdzenia stanowiące dodatkową motywację następującej, sformułowanej przeze mnie hipotezy.

Hipoteza 4 *Każdy graf samodopełniający, który nie jest regularny jest klasy pierwszej.*

W pierwszej z prac dowodzi się prawdziwości hipotezy 4 dla samodopełniających grafów cyklicznych (to jest takich, których permutacja samodopełniająca ma dokładnie jeden cykl), w drugiej, że jedynymi samodopełniającymi grafami przepełnionymi są grafy regularne (wiadomo, że wszystkie grafy przepełnione są klasy drugiej). Ten ostatni wynik oznacza także, że udowodnienie hipotezy 4 byłoby dodatkową motywacją znanej hipotezy Chetwynd i Hiltona[15] uważanej za beznadziejnie trudną.

[14] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p graph, Diskret. Anal. 3 (1964) 25-30.

[15] Hipoteza ta mówi, że graf G spełniający $\Delta(G) > n/3$ jest klasy drugiej wtedy i tylko wtedy gdy jest przepełniony. zob. A.G. Chetwynd i A.J.W. Hilton, Star multigraphs with three vertices of maximum degree, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 100 (1986) 303-317.