Zadania z matematyki dla studentów Elektrotechniki

A. Paweł Wojda

Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

Zadania przedstawione w niniejszym zbiorze tylko w niewielkiej części są oryginalne. Momo to uznałem, że udostępnienie ich w tej formie studentom może być wygodne. Są to bowiem zadania które studenci są zobowiązani przygotowywać na ćwiczenia, to właśnie, na stronie **www** Wydziału Matematyki Stosowanej AGH mogą je w każedej chwili znaleźć. Adres strony: *http://www.uci.agh.edu.pl* Zadania egzaminacyjne – to znaczy takie które pojawiły się kiedyś już na egzaminach, mogą być wskazówką jakiego stopnia trudności można się spodziewać na egzaminie.

A. Paweł Wojda
Kraków, 1 grudnia 2000

Rozdział 2

Program

Program przedstawiony w układzie tygodniowym - numery 1-14 oznaczają tygodnie semestru (tydzień 15-ty jest przeznaczony na wyrównanie powstałych z różnych powodów opóźnień).
Część łatwiejszych teoretycznie zagadnień realizowana będzie wyłącznie podczas ćwiczeń - w niektórych przypadkach zaznaczono to w propozycji.
Program nie zawiera zagadnień optymalizacji, rachunku prawdopodobieństwa ani metod numerycznych. Na realizację tych haseł, czy choćby wspomnienie o nich, nie pozwala zbyt mala liczba godzin wykładu (150).

2.1 Semestr 4 g. w. + 4 g. ćw.

1. Wiadomości wstępne

1. Zbiory. Iloczyn kartezjański. Kwantyfikatory. Relacja $\leq$ w $\mathbf{R}$. Kresy. Zasada ciągłości w $\mathbf{R}$. Funkcje - iniekcja, suriekcja i bijekcja.
   Na ćwiczeniach: zasada indukcji matematycznej. Powtórka rachunku zdań.
   Funkcje odwrotne. Funkcje cyklometryczne.

2. Zbieżność i granice ciągów rzeczywistych

Ciągi. Przypomnienie wiadomości ze szkoły o zbieżności i granicach ciągów rzeczywistych: jedyność granicy, ograniczoność ciągów zbieżnych, twierdzenia o operacjach arytmetycznych na ciągach zbieżnych, twierdzenie o trzech ciągach. Ciągi monotoniczne.

Tw. Bolzano Weierstrassa.
Na ćwiczeniach: Elementy geometrii analitycznej w przestrzeni: iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany w przestrzeni. Prosta na płaszczyźnie. Prosta i płaszczyzna w przestrzeni.

2. Przykłady ważnych granic: $\sqrt[n]{n}$, $(1 + \frac{1}{n})^n$. Stała Eulera. Funkcje hiperboliczne. Punkt skupienia zbioru. Granice dolna i górna ciągów rzeczywistych.
   Warunek Cauchy'ego, zupełność $\mathbf{R}$.

3. Granice i ciąłość funkcji.

Definicja i własności granic funkcji. Twierdzenia o granicach operacji arytmetycznych. Rozszerzenie pojęcia granicy na $\bar{\mathbf{R}}$

3. Ciągłość funkcji w punkcie.
   Twierdzenia o ciągłości złożenia i operacji arytmetycznych na funkcjach liczbowych. Ważne granice funkcji: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.
   Punktowa i jednostajna zbieżność ciągów funkcyjnych. Ciągłość granicy ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych.

4. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

4. Nieskończenie małe. Funkcje O i o $(x \to x_0)$.
   Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej. Interpretacje, podstawowe własności, pochodne funkcji elementarnych. Różniczka. Lemat Fermata. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego (o przyrostach).

5. Reguła de l'Hospitala. Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów. Twierdzenia Taylora i MacLaurina. Wypukłość funkcji. Badanie zmienności funkcji. Styczna do krzywej w postaci parametrycznej.

5. Rachunek całkowy zmiennej rzeczywistej.

6. Funkcja pierwotna - podstawowe twierdzenia o całkowaniu. Całki funkcji elementarnych. Metody całkowania.

7. Calka Riemanna - definicja i interpretacje. Twierdzenia o całkowalności i własnościach funkcji całkowalnych. Własności całek Riemanna. Twierdzenie Newtona-Leibnitza.

8. Twierdzenie o wartości średniej dla całek Riemanna. Wzory na całkowanie przez części i przez podstawianie dla całek Riemanna. Zastosowania całek Riemanna. Całki niewłaściwe.

6. Algebra i geometria analityczna

9. Przestrzenie wektorowe nad **R** i **C**. Przykłady $\mathbf{R^n}$, $\mathbf{R^{nxm}}$ - macierze. Podprzestrzenie wektorowe.
   Liniowa niezależność wektorów. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej.
   Odwzorowania liniowe. Jądro i obraz. Rząd odwzorowania liniowego.

10. Macierz odwzorowania liniowego. Operacje na odwzorowaniach liniowych i macierzach.
    Wyznacznik macierzy - definicja i własności.

11. Twierdzenie Laplace'a (rozwinięcie wyznacznika względem wiersza lub kolumny). Macierz odwrotna. Twierdzenie Cramera. Układy równań liniowych. Metoda Gaussa. Twierdzenie Kroneckera Capelliego.

12. Zmiana bazy w przestrzeni wektorowej. Macierz przejścia. Macierze podobne.
    Formy liniowe, dwuliniowe, kwadratowe. Formy hermitowskie.
    Twierdzenie Sylvestera. Iloczyn skalarny wektorów.

13. Wartości i wektory własne. Diagonalizacja macierzy. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Wielomian minimalny macierzy. Postać Jordana.
    Na ćwiczeniach: Metoda Lagrange'a sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej.

7. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

14. Metryki i przestrzenie metryczne. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej.
    Przykłady. Metryka Czebyszewa - metryka jednostajnej zbieżności.
    Zbieżność i ciągłość w przestrzeniach metrycznych.
    Warunek Cauchy'ego i przestrzenie metryczne zupełne.
    Norma - przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha. Nierówność
    Cauchy'ego. Metryka standardowa w $\mathbf{R}^n$.

2.2 Semestr 4 g. w. + 4 g. ćw.

1. Funkcje wielu zmiennych rzeczywistych - granice i ciągłość. Pochodna funkcji jednej zmiennej rzeczywistej o wartościach w przestrzeni unormowanej.
   Pochodne cząstkowe. Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Pochodne kierunkowe.

2. Różniczka funkcji w przestrzeni unormowanej. Przykłady w $\mathbf{R^n}$. Interpretacja geometryczna. Związek z pochodną kierunkową. Przypadek funkcji $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$, macierz pochodnej.
   Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych.

3. Zastosowania różniczek: ekstrema funkcji wielu zmiennych, funkcje uwikłane, zastosowania geometryczne, ekstrema warunkowe. Metoda mnożnika
   Lagrange'a Pole wektorowe: potencjał, rotacja i diwergencja.

8. Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych.

4. Całki podwójne - definicja. Twierdzenie o wartości średniej. Interpretacje. Zamiana całki podwójnej na iterowaną.
   Całki potrójne - definicja, zamiana na całkę iterowaną.

5. Zamiana zmiennych w calkach wielokrotnych. Współrzędne sferyczne i cylindryczne.
   Całki krzywoliniowe skierowane. Interpretacja fizyczna. Zamiana na całkę Riemanna.

6. Twierdzenie Greene'a i jego konsekwencje, niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania. Potencjał.
   Całka krzywoliniowa nieskierowana: definicja, interpretacja, zamiana na całkę Riemanna.

7. Calka powierzchniowa niezorientowana. Interpretacje. Zamiana na calkę
   podwójną.
   Całka powierzchniowa zorientowana i niezorientowana. Twierdzenie Stokesa i twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego.

8. Informacja o całce Lebesque'a.

9. Szeregi.

9. Szereg w przestrzeni unormowanej. Zbieżność szeregu. Twierdzenia o zbieżności szeregów i ich sumach.
   Warunek konieczny zbieżności szeregu. Kryterium Leibniza.
   Szeregi bezwzględnie zbieżne. Zbieżność szeregów bezwzględnie zbieżnych
   w przestrzeniach Banacha.
   Szeregi geometryczne i harmoniczne. Kryteria: porównawcze, Cauchy'ego i d'Alemberta zbieżności bezwzględnej. Kryterium całkowe.

10. Szereg Taylora funkcji. Twierdzenie o szeregu Taylora.
    Szeregi funkcyjne - jednostajna zbieżność. Kryterium Weierstrassa.
    Szeregi potęgowe - promień zbieżności. Szereg pochodny szeregu potęgowego. Funkcje: wykładnicza, cos i sin w $\mathbf{C}$.
    Twierdzenie o różniczkowaniu szeregów. Kryterium całkowe zbieżności szeregów.

10. Funkcje zmiennej zespolonej.

11. Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej i zmiennej zespolonej. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Wzory Cauchy-Riemanna.

12. Funkcje holomorficzne. Szeregi potęgowe. Funkcje całkowite. Twierdzenie podstawowe Cauchy'ego. Wzór Cauchy'ego.
    Funkcja holomorficzna w pierścieiu $0 <| z - z_0 |< R$. Szereg Laurenta.
    Residuum funkcji. Twierdzenie całkowe o residuach.

11. Równania różniczkowe zwyczajne.

13. Równania różniczkowe zwyczajne. Problem Cauchy'ego. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. Równania o zmiennych rozdzielonych, równania liniowe rzędu pierwszego.

14. Równania Lagrange'a i Clairauta. Równania zupełne - czynnik całkujący. Równania Bernouliego. Równania rzędu drugiego sprowadzalne do równań różniczkowych rzędu pierwszego.

2.3 Semestr 2 g. w. + 2 g.ćw.

1. Równania liniowe rzędu drugiego. Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach. Rozwiązywanie równań liniowych jednorodnych o stałych współczynnikach.

2. Metody uzmiennania stałej i przewidywania dla równań liniowych niejednorodnych rzędu n o stałych współczynnikach.
3. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach.
4. Metody rozwiązywania układów równań liniowych o stałych współczynnikach.

12. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego.

5. Równania różniczkowe cząstkowe liniowe rzędu pierwszego.
6. Równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego. Klasyfikacja.
7. Równania: przewodnictwa, struny i Laplace'a.

13. Szeregi Fouriera

8. Iloczyn skalarny funkcji. Ciągi ortogonalne funkcji. Wzory Eulera-Fouriera. Wielomiany ortogonalne i aproksymacja kwadratowa. Nierówność Bessela.
9. Rozwijalność funkcji w szereg Fouriera.
10. Warunki i twierdzenie Dirichleta. Szeregi sinusowe i kosinusowe. Postać zespolona szeregu Fouriera.

14. Przekształcenia całkowe.

11. Wzór i przekształcenie całkowe Fouriera.
12. Przekształcenie Laplace'a.
13. Rachunek operatorowy i zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych.
14. Informacja o teorii dystrybucji.

Rozdział 3

Wiadomości wstępne

1. Sprawdź, że poniższe zdania są tautologiami:

   $p \wedge (\sim p)$ - zasada wyłączonego środka

   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ - zasada transpozycji

   $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$ - zasada podwójnego zaprzeczenia

   $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$

   $$\left.\begin{array}{l} \sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q) \\ \sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q) \end{array}\right\} \text{ - prawa de Morgana}$$

2. Zaprzecz formy zdaniowe

   (a) $\forall x \in X\ \phi(x)$ (b) $\exists x \in X \phi(x)$

3. Znajdź zbiory:

   (a) $\bigcap_{x \in (1,2)} (x^2 + 1, 8 - x)$

   (b) $\bigcup_{x \in (1,2)} < x^2 + 1, 8 - x >$

4. Wykaż, że w zbiorze liczb rzeczywistych M jest kresem górnym zbioru A wtedy i tylko wtedy gdy

   1. $\forall x \in A\ x \leq M$

   2. $\forall x < M\ \exists y \in A : x < y$.

   Sformułuj odpowiednie warunki dla kresu dolnego.

5. Wykaż, że $\sqrt{2}$ ($\sqrt{(3)}$, $\sqrt{5}$) nie jest liczbą wymierną.

6. Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż wzory:

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$
$$(1+p)^n \geq 1+np, \text{ o ile } p>-1$$

7. Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby zespolone:
$1 \qquad -1 \qquad 1+i \qquad -i \qquad \sqrt{3}-i$

8. Oblicz:
$(1-i)^7 \qquad (\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5 \qquad (1-\sqrt{3}i)^3$

9. Wyraź przy pomocy $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$
(a) $\sin 3\alpha$ (b) $\cos 4\alpha$.

10. Podaj interpretację geometryczną zbiorów:

$$A=\{z\in \mathbf{C} :\mid z \mid\geq 2\}$$
$$B=\{z\in \mathbf{C} \mid 2<\mid z\mid\leq 3,\ \ \frac{\pi}{6}\leq argz\leq\frac{7\pi}{4}\}$$

11. Oblicz: (a) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ (b) $\sqrt[4]{i}$ (c) $\sqrt[3]{-i}$ (d) $\sqrt[6]{1}$

12. Rozwiąż równania w $\mathbf{C}$:

$$x^2+x+1=0 \qquad x^2+(1-2i)x-2i=0$$

13. Niech $l:\ 2x+3y=4$ będzie prostą a $M(2,1)$ punktem płaszczyzny. Napisz równanie prostej praechodzącej przez M oraz

   - prostopadłej do l

- równoległej do l.

14. Dane są cztery punkty w przestrzeni: $A(1,1,1)$, $B(2,3,0)$, $C(1,1,2)$, $M(5,3,1)$. Napisz równania:

    - płaszczyzny π w której leżą A, B i C,
    - prostej prostopadłej do π przechodzącej przez M.
    - płaszczyzny π' równoległej do π przechodzącej przez M,
    - sfery o środku w M stycznej do π.

    Oblicz

    - $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$, gdzie α jest kątem pomiędzy wektorami $\vec{AB}$ oraz $\vec{AC}$,
    - objętość równoległościanu którego krawędziami są odcinki AB, AC i AM.

    Równania płaszczyzn i prostych należy podać w postaci normalnej i parametrycznej.

15. Wykaż, że dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$, podzbiorów A_1, A_2 , A_i $(i \in I)$ zbioru X oraz B_1, B_2 i B_j $(j \in J)$ zbioru Y zachodzą związki:
    (a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f[A_1] \subset f[A_2]$
    (b) $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$
    (c) $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subset \bigcap_{i\in I} f[A_i]$
    (d) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$
    (e) $f^{-1}[\bigcup_{j\in J} B_j] = \bigcup_{j\in J} f^{-1}[B_j]$
    (f) $f^{-1}[\bigcap_{j\in J} B_j] = \bigcap_{j\in J} f^{-1}[B_j]$
    (g) $f[A_1] - f[A_2] \subset f[A_1 - A_2]$ ($\subset$ można zastąpić przez $=$ gdy f jest odwracalna).

16. Dla dowolnej funkcji $f : X \to Y$ wykaż, że
    (i) f jest suriekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g : Y \to X$, taka że $f \circ g = id_Y$
    (ii) f jest iniekcją wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $h : Y \to X$, taka że $h \circ f = id_X$

17. Niech $f : A \to A$, gdzie A jest zbiorem **skończonym**. Wykaż, że następujące zdania są równoważne:
    (i) f jest iniekcją.
    (ii) f jest suriekcją.

(iii) f jest bijekcją.

18. Wykaż prawdziwość wzorów:

$$arcsinx + arccosx = \frac{\pi}{2}$$

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$$

$$arcctgx = arctg\frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x > 0$$

$$arcctgx = \pi + arctg1/x \quad \text{dla} \quad x < 0$$

19. Mówimy, że zbiory A i B są równoliczne jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Wykaż, że: (a) Przedziały $(0, 1)$ i $(2, 8)$ są równoliczne.
(b) Przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i $\mathbf{R}$ są równoliczne.
Udowodnij, że jeśli $A \subset B$, $A \neq B$, A i B są równoliczne, wtedy A jest zbiorem nieskończonym.

Rozdział 4

Granice i ciągłość funkcji

1. Podaj definicje Heinego i Cauchy'ego granicy $\lim_{x\to a} f(x) = b$, gdzie $a, b \in \bar{\mathbf{R}}$.

2. Wykaż równoważność definicji Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji (także w przypadku granic niewłaściwych).

3. Znajdź granicę $\lim_{x\to 0} x^a$, $a > 0$.

4. Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji wykaż, że
(a) $\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 3) = 2$
(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$
(c) $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ nie istnieje.

5. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy, wykaż, że
$$\lim_{x\to 0}(2^x - 1) = 0$$
.

6. Oblicz granice: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg} 2x}{\sin 3x}$,
$$\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{1/x}$$

7. Udowodnij, że: (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

8. Oblicz granice: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+10x)}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$, $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x})^x$, $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x^2})^x$.

9. Wykaż ciągłość funkcji $\cos x$ (w $\mathbf{R}$) i $\sqrt{x}$ (w $\mathbf{R}^+$).

10. Dla jakiej wartości a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & dla\ x \neq 2 \\ a & dla\ x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła.

11. Zdefiniuj wartości poniższych funkcji w 0 tak, by były ciągłe w $\mathbf{R}$: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$.

12. Zbadaj ciągłość funkcji : $y = \frac{x}{|x|}$, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$,

$$y = \begin{cases} x^2 & dla\ x \leq 3 \\ 2x+1 & dla\ x > 3 \end{cases}$$

13. Zbadać ciągłość i narysuj wykresy funkcji :
(a) $x \sin\frac{1}{x}$ (b) sgnx.

14. Wykaż, że równanie $x^3 - 3x + 1$ ma pierwiastek rzeczywisty. Znajdź jego wartość przybliżoną.

15. Wykaż, że jeśli ciągi (f_n) i (g_n) funkcji, f_n, ,$g_n : X \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, są jednostajnie zbieżne do funkcji f i g to
(A) ciąg $(f_n + g_n)$ jest jednostajnie zbieżny do $f + g$
(B) ciąg $(f_n - g_n)$ jest jednostajnie zbieżny do $f - g$
(C) ciąg $max\{f_n, g_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do $max\{f, g\}$
(D) ciąg $min\{f_n, g_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do $min\{f, g\}$,
gdzie $max\{f, g\}(x) = max\{f(x), g(x)\}$.

16. Czy ciąg funkcyjny
(a) $(\frac{1}{1+nx^2})_{n\in\mathbf{N}}$, dla $x \in \mathbf{R}$, (b) $(\sqrt{x+n+1} - \sqrt{x+1})_{n\in\mathbf{N}}$, dla $x \in \mathbf{R}^+$,
(c) $x^n - x^{2n}$, $0 \leq x \leq 1$, (d) $x^n - x^{n+1}$, $0 \leq x \leq 1$,
(e) $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $x \in \mathbf{R}$, (f) $\frac{nx}{1+n+x}$, $0 \leq x \leq 1$,
(g) $n(\sqrt{x + \frac{1}{n}})$, $x \in \mathbf{R}$.
jest jednostajnie zbieżny ?

17. Oblicz odległość Czebyszewa funkcji $f, g : X \to Y$ jeżeli $X =< 0, 1 >$, $Y = \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x$.

Rozdział 5

Ciągi i granice

1. Wykaż równoważność następujących zdań (1), (2), (3):

   (1) $\lim a_n = a$

   (2) Każdy podciąg ciągu (a_n) jest zbieżny do a.

   (3) Każdy podciąg ciągu (a_n) zawiera podciąg zbieżny do a.

2. Z definicji zbieżności wykaż, że $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

3. Wykaż, że suma ciągu zbieżnego i rozbieżnego jest ciągiem rozbieżnym.

4. Wykaż, że jeśli (a_n) jest ciągiem rzeczywistym nieujemnym, takim że $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1$ (> 1), wtedy (a_n) jest malejący (rosnący), poczynając od pewnego n_0.

5. Oblicz granice:

   $\lim(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ $\quad$ $\lim \frac{3\sqrt{n} sin n!}{n+1}$,

   $\lim \frac{1+2+...+n}{n^2}$

   $\lim \frac{1^2+2^2+...+(n-1)^2}{n^3}$, (wskazówka: wykaż, że $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$),

   $\lim \frac{1^2+3^2+...+(2n-1)^2}{n^3}$.

6. Oblicz granice ciągów:

   (0.2, 0.23, 0.233, 0.2333, ...),

   $(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...)$,

   $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n!}$ $\quad$ $\left(\frac{4-2n-3n^2}{2n^2+n}\right)$ $\quad$ $\left(\frac{\sqrt{n^2-5n+4}}{2n-7}\right)$ $\quad$ $(\sqrt{n^2+n} - n)$

$(\sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n})$ $\quad \left((2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}\right)$.

7. Wykaż, że ciąg (u_n) zdefiniowany przez:

   $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}, \quad u_1 = 1$
   jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Wykaż, że $\lim \frac{2^n n!}{n^n} = 0$.

9. Niech $u_0, v_0 \in \mathbf{R}$, $0 < u_0 < v_0$. Zdefiniujmy ciągi (u_n) i (v_n):

   $$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

   Wykaż, że $u_n \leq v_n$, że ciąg (u_n) jest rosnący, ciąg (v_n) malejący, że oba ciągi są zbieżne i że mają tę samą granię.

10. Wykaż, że ciąg (u_n) zdefiniowany przez : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

11. Oblicz granice: $\lim \frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$ $\quad \lim \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$
    $\lim \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$ $\quad \lim \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}+\sqrt{n^7+3n^3+1}}$
    $\lim \frac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\quad \lim \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$

12. Rozważmy ciąg rzeczywisty (x_n), taki że $\mid x_{n+1} - x_n \mid \leq a \mid x_n - x_{n-1} \mid$ dla wszystkich $n \geq 1$. Z pomocą kryterium Cauchy'ego wykaż , że jeżeli $0 \leq a < 1$, wtedy (x_n) jest zbieżny.

13. Zbadaj zbieżność ciągów:

    $(u_n) = (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n})$ (wskazówka: można przyjżeć się ciągom (u_{2n}) oraz (u_{2n+1}))

    $(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)})$

    $(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)})$

14. Wykaż zbieżność ciągu (u_n) zdefiniownego przez równości: $u_1 = \sqrt{6}$, $u_n + 1 = \sqrt{6 + u_n}$.

15. Rozważmy ciąg zdefiniowany następująco: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $u_0 = 1$. Wykaż, że:

    (a) ciąg (u_n) nie ma granicy skończonej,

    (b) $\lim u_n = +\infty$.

16. Zbadaj zbieżność i obliczyć granicę ciągu (u_n) zdefiniowanego przez: $u_n = \ln(1 + u_{n-1})$, $u_0 > 0$.

17. Wykaż, że: $\lim \frac{n}{2^n} = 0 \qquad \lim \frac{2^n}{n!} = 0 \qquad \lim a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 0)$, $\lim n^{\frac{1}{n}} = 1$.

18. Udowodnij, że jeśli $\lim a_n = a$ to dla każdego $k \in \mathbf{Z}$ $\lim a_n^k = a^k$.

19. Niech $0 < a < 1$, $\alpha \geq 0$ i niech $c_n = a^n n^\alpha$.

    (a) Wykaż, że $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = a$.

    (b) Wywnioskuj stąd, że ciąg (c_n) jest zbieżny.

    Wykaż, że $\lim c_n = 0$.

20. Wykaż, że dla dowolnego a, $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$. Wskazówka: można się wzorować na zadaniu poprzednim.

21. Wykaż, że s jest punktem skupienia ciągu (a_n), $a_n \in \mathbf{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) ma podciąg zbieżny do s.

22. Niech $S \in \overline{\mathbf{R}}$ będzie zbiorem punktów skupienia pewnego ciągu $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \in \overline{\mathbf{R}}$. Wykaż, że

    (1) każdy punkt skupienia zbioru S należy do S,

    (2) $\inf S \in S$, $\sup S \in S$,

    S ma element najmniejszy i element najwększy.

23. Sprawdź, które z twierdzeń dotyczących granic ciągów rzeczywistych przenoszą się dla granicy górnej $\limsup$ (granicy dolnej $\liminf$) ciągu rzeczywistego.

24. Wykaż, że produkt kartezjański przestrzeni metrycznych zupełnych jest przestrzenią metryczną zupełną.

25. Niech a będzie liczbą naturalną, zaś (a_n) ciągiem liczb naturalnych. Wykaż, że ciąg (x_n) zefiniowany przez:

    $x_0 = a, a_0$; $\quad x_1 = a, a_0 a_1$; $\quad x_3 = a, a_0 a_1 a_2$; ...
    jest ciągiem Cauchy'ego.

26. Wykaż, że każdy podciąg ciągu Cauchy'ego jest ciągiem Cauchy'ego.

Rozdział 6

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

1. Wyjaśnij co oznacza: $f(x) = o(1) \ \ (x \to x_0)$.

2. Uzasadnij wzory:

$$o(1) + O(1) = O(1) \quad (x \to x_0)$$
$$O(1) + O(1) = O(1) \quad (x \to x_0)$$
$$o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n o(1) \quad (x \to x_0)$$
$$O((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n O(1) \quad (x \to x_0)$$
$$\sin 3x = 3x + o(x) \quad (x- > 0)$$

3. Znajdź rzędy nieskonczenie małych:

$$\sin x \quad (x \to 0)$$
$$x^3 + tgx \quad (x \to 0)$$

4. Mówimy, że funkcje f i g są równoważne dla $x \to x_0$, jezeli istnieje taka funkcja h , że $f(x) = g(x)h(x)$, $h(x) \to 1$ dla $x \to x_0$. Piszemy wtedy $f \sim g$, $(x \to x_0)$.
Wykaż, że:

$$x^k \sim x^k, \ (x \to 0)$$
$$\sin x \sim x, \ (x \to 0)$$

$2\sin x \sim x + x\cos x$, $(x \to 0)$
$1 - \cos x \sim (x^2/2)$, $(x \to 0)$

Mówimy, że Ax^n jest częścią główną funkcji f dla $x \to x_0$ jeśli $f(x) \sim Ax^n$, $x \to 0$.
Określ a i $b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, tak by funkcja $x \to ln(a+x) + \sqrt{a+x}$ była nieskończenie małą możliwie najwyższego rzędu. Jaka jest wtedy jej część głowna?

5. Z definicji oblicz pochodne funkcji: (a) x^2 (b) $1/x$ (c) $\sqrt[3]{x}$ (d) tgx (e) $arccosx$

6. Wykaż, że jeśli f jest różniczkowalna w x, to

$$\lim_{n\to+\infty} n[f(x+1/n) - f(x)] = f'(x). \tag{6.1}$$

Posłuż się funkcją Dirichleta

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

do wykazania, że spełnienie warunku (6.1) nie jest wystarczające do istnienia pochodnej w punkcie x .

7. Użyj różniczki do obliczenia wartości przybliżonych następujących wyrażeń:
$\sqrt{37}$, $(0,9)^4/(0,9+1)$, $tg(\pi/4 + 0,1)$.

8. Niech $f :< a, b >\to \mathbf{R}$, $a < b$, $x \in (a, b)$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

wtedy nazywamy ją pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0, jeżeli istnieje granica

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

wtedy nazywamy pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0, a jeśli istnieje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'_s(x_0)$$

nazywamy ją wtedy pochodną symetryczną funkcji f w punkcie x_0.
a) Udowodnij, że funkcja różniczkowalna w punkcie x_0, ma w x_0

pochodne prawo- i lewostronną.
b) Wykaż, że jeśli f ma w x_0 pochodną lewostronną i prawostronną, wtedy f ma w x_0 pochodną symetryczn˙
c) Niech $f(x) = x \sin 1/x$ dla $x \neq 0$ i $f(0) = 0$. Udowodnij, że f ma w 0 pochodną symetryczną, lecz nie ma ani pochodnej prawostronnej, ani pochodnej lewostronnej w tym punkcie.

9. Niech
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla} \quad x \leq x_0 \\ ax + b & \text{dla} \quad x > x_0 \end{cases}$$
Tak dobierz a i b, żeby funkcja $f(x)$ była różniczkowalna w $\mathbf{R}$.

10. Znajdź pochodne funkcji zdefiniowanych wzorami:

$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x^3)}$ $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

$f(x) = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$ $f(x) = 2^{tg(1/x)}$ $f(x) = e^x + e^{e^x}$
$+ e^{e^{e^x}}$

$f(x) = ln(ln(lnx))$ $f(x) = ln\sqrt{\frac{1-sinx}{1+cosx}}$ $f(x) = arccos(1-x)/\sqrt{2}$

$f(x) = ln(1 + \sin^2 x) - (\sin x)(arctg(\sin x))$ $f(x) = arctg(x + \sqrt{1+x^2})$ $f(x) = \sqrt[x]{x}$

$f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}c$ $f(x) = log_x e$ $f(x) =\mid \sin^3 x \mid$.

W każdym z przykładów f jest funkcja rzeczywistą o wartościach rzeczywistych i dziedzinie naturalnej.

11. Niech
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 1) \\ 1/x & \text{dla} \quad x \in < 1, +\infty). \end{cases}$$
Wykaż, że f spełnia w $< 0, 2 >$ założenia twierdzenia Lagrange'a i wskaż c, dla którego $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

12. Wykaż nierówności:

(a) $xlnx + ylny \geq (x+y)ln\frac{x+y}{2}$ dla $x > 0, y > 0$

(b) $e^x \geq 1 + x$ dla$x > 0$

(c) $x - x^3/6 < \sin x < x$ dla$x > 0$.

13. Oblicz następujące granice:

$\lim_{x\to 0}(\cos x - e^{-x^2/2})/x^4$ $\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5})$ $\lim_{x\to 0}(1-(\cos x)^{\sin x})/x^3$

$\lim_{x\to-\infty}(1/e^x - x^2)$ $\quad \lim_{x\to(\pi/2)+}(\sin^2 x)^{tgx}$

14. Dla jakich wartości x wielomian $1 - x^2/2$ przybliża funkcję $\cos x$ z dokładnością do co najmniej $0,0001$.

15. Oblicz z pomocą wzoru Taylora, następujące wielkości:

    e z dokładnością do 10^{-9}

    $\sin 1^o$ z dokładnością do 10^{-8}

    $\log 11$ z dokładnością do 10^{-5}

16. Zbadaj wykresy funkcji:
    $y = (x-2)/\sqrt{x^2+1}$ $\quad y = lnx/\sqrt{x}$ $\quad y = (1+x^2)e^{-x^2}$
    $y = ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Rozdział 7

Rachunek całkowy zmiennej rzeczywistej

1. Oblicz następujące całki nieoznaczone:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx\ ,\ \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx\ ,\ \int \frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx\ ,\ \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^4-1}}dx\ ,$$

$$\int (2^x+3^x)^2dx\ .$$

2. Wykaż, że jeżeli $\int f(x)dx = F(x)+C$, wtedy $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

3. Oblicz:

$$\int (2x{-}3)^{10}dx\ ,\ \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx\ ,\ \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}}dx\ ,\ \int (e^{-x}+e^{-2x})dx\ ,$$

$$\int \frac{1}{(1-cosx)}dx\ ,\ \int \frac{dx}{1+sinx}\ ,\ \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \int \frac{x^3dx}{x^8-2}\ ,$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\ ,\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}\ ,\ \int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}\ ,\ \int \frac{e^x}{2+e^x}dx\ ,$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x\ \ln(\ln x)}\ ,\ \int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx\ ,\ \int \frac{arctgx}{1+x^2}dx\ ,\ \int \frac{2^x3^x}{9^x-4^x}dx\ .$$

4. Metodą podstawiania oblicz następujące całki :

$$\int x^5(2-5x^3)^{2/3}dx \ , \ \int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx \ , \ \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} \ , \ \int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x} \ ,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} \ , \ \int \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \ .$$

5. W tym zadaniu nauczymy się (trochę inaczej) całkować funkcje postaci $\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(m \in \mathbf{N})$, a w konsekwencji funkcje postaci $\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gdzie P(x) jest pewnym wielomianem.
Oznaczmy $V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, oraz $Y = ax^2+bx+c$.

   (a) Licząc pochodną wyrażenia $x^{m-1}\sqrt{Y}$ a następnie całkując stronami wykaż wzór

   $$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + (m-\frac{1}{2})bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}. \quad (7.1)$$

   (b) Korzystając z (7.1) wyraź V_1 i następnie V_2 przez $\sqrt{Y}$ i V_0.

   (c) Kontynuując to postępowanie wywnioskuj, że

   $$V_m = P_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0$$

   gdzie P_{m-1} jest wielomianem stopnia $m-1$ zaś λ_m pewną stałą.

   (d) Wielomian P_m i stałą λ_m znajdujemy metodą współczynników nieoznaczonych .

   (e) Przećwicz na przykładach :

   $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x-2}}dx \ , \ \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} \ , \ \int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} \ ,$$

   $$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

   w całkach typu $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}}$ zacznij od podstawienia $x-\alpha = \frac{1}{t}$.

6. Przyjmując podstawienia trygonometryczne : $x = a\sin t$, $x = atgt$, $x = a\sin^2 t$ i t.p. oblicz:

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx \ , \ \int \sqrt{a^2-x^2}dx \ , \ \int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$$

7. Oblicz:
$\int x^2 e^{-2x} dx$, $\int arctgx dx$, $\int x^2 arccosx dx$, $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

8. Sporządź wykresy funkcji :
(a) $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ jeżeli

$$f(t) = \begin{cases} t-1 & dla\ t < 0 \\ 1 & dla\ t \geq 0 \end{cases}$$

(b) $F(x) = \int_0^x |t+1| dt.$

9. Oblicz $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ z dokładnością do 0,001.

10. Celem zadania jest wykazanie wzoru Wallisa:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1\ 3\ 5 ... (2n-1)}{2\ 4\ 6 ... 2n} \right)^2 n = \frac{1}{\pi} \tag{7.2}$$

Niech $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, dla $n \in \{0, 1, 2, ...\}$

(a) Oblicz I_0 oraz I_1.

(b) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części, wykaż, że

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(c) Z (a) i (b) wywnioskuj, że

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

(d) Jednym zdaniem uzasadnij nierówności :

$$0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

dla $x \in [0, \pi/2]$.

(e) Zacytuj twierdzenie, z którego wynikają nierówności

$$0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$$

(f) wydedukuj stąd granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}},$$

(a) granicę

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 = 0$$

i

(h) wzór Wallisa (7.2).

11. Niech f będzie funkcją ciągłą z **R** w **R** , u i v dwiema funkcjami różniczkowalnymi z **R** w **R** i niech g będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt.$$

(a) Wykaż, że $g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

(b) Niech G będzie funkcją zdefiniowaną przez

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t^4 + t^2 + 1}.$$

Oblicz G'(x).

12. Oblicz pole figury płaskiej ograniczonej krzywymi

(a) $y = \sin x\ ,\ y = \cos x\ \ ;\ \ x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

(b) $y^2 = 2x\ ,\ x^2 + y^2 = 8$

(c) $a^2x^2 - b^2y^2 - a^2b^2 = 0\ ,\ x = 2b$

(d) $y = x\ ,\ y = \sin^2 x + x\ \ ;\ \ x \in [0, \pi]$

(e) $y^2 = 2px\ \ ,\ \ 27py^2 = 8(x-p)^2$

13. Oblicz pole figury ograniczonej

(a) łukiem o równaniach

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t \\ y = a\cos^3 t \end{cases} ,0 \leq t \leq \pi/2,$$

osią Ox i osią Oy.

(b) $r^2 = \sin 4\phi$

(c) $x^3 + y^3 = 3axy$

(d) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$

14. Oblicz długość łuku
$x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \pi/2$
$x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$

15. Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru ograniczonego przez krzywą

    (a) $y = x^2$, $y = 2x$ wokół osi Ox
    (b) $x^2 - y^2 = 16$, $x = 5$ wokół osi y.

16. Oblicz współrzędne środka ciężkości

    (a) łuku cykloidy

    $$x = r(t - sint) \quad y = r(1 - cost) \quad 0 \le t \le 2\pi$$

    jeśli gęstość masy jest na tym łuku stała.

    (b) łuku okręgu

    $$x = rcost \quad y = rsint \quad 0 \le t \le \pi$$

    jeśli gęstość liniowa masy rozłożonej na tym łuku $\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 t$.

17. Oblicz pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez :
- obrót o 180^o wokół osi OX elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$
- obrót krzywej $y = e^{-x}$ $(0 \le x < +\infty)$ wokół osi OY.

18. Rozciągnięcie sprężyny o 1 cm wymaga przyłożenia siły 1 N. Oblicz pracę , którą trzeba wykonać by rozciągnąć tę sprężynę do 5 cm .

19. Zbadaj zbieżność i ew. oblicz całki niewłaściwe

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} cos\omega x dx \qquad (\alpha, \omega > 0)$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{3+5x^2} \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{3+5x^2}$$

$$\int_0^e lnxdx \qquad \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

Rozdział 8

Algebra i geometria analityczna

1. W $\mathbf{R}$ definiujemy działanie wewnętrzne $*$

$$x * y = x + y - xy.$$

   Sprawdź, czy działanie to jest przemienne? łączne? Czy ma element neutralny? Czy dowolny element $x \in \mathbf{R}$ ma element odwrotny ze względu na $*$?

2. Wykaż, że w dowolnej grupie G

   istnieje tylko jeden element neutralny,

   dla dowolnego elementu istnieje tylko jeden element odwrotny.

3. Które z poniższych zbiorów są przestrzeniami wektorowymi:

$$(a)\ \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : x - 2y > 0\}$$

$$(b)\ \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : x - 2y = 0\}$$

$$(c)\ \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : x - 2y + 1 = 0\}$$

$$(d)\ \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : xy = 0\}$$

   (z działaniami jak w $\mathbf{R^2}$).

$$(e)\ \{f : X \to \mathbf{R} : f(x_0) = 1\}$$

$$(f)\ \{f : X \to \mathbf{R} : f(x_0) = 0\}$$
$$(g)\ \{f : X \to \mathbf{R} : f(x_0) \in \{0, 1\}\}$$

(z działaniami jak w $\{f : X \to \mathbf{R}\}$, x_0 jest pewnym elementem (niepustego) zbioru X).

4. Wykaż, że w dowolnej przestrzeni wektorowej V nad ciałem F zachodzą związki:

   $(-\alpha)v = -(\alpha v)$ $\qquad$ $0v = \Theta$
   $\alpha\Theta = \Theta$ $\qquad$ $\alpha v = \Theta \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$

   (gdzie 0 jest elementem neutralnym dla dodawania w ciele F, zaś Θ wektorem zerowym, tzn. elementem neutralnym dla dodawania w przestrzeni wektorowej V).

5. Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej $\mathbf{R^3}$?

   $A = \{(x, y, z\} \in \mathbf{R^3} : x + y + z = 1,\ x - z = 0\}$
   $B = \{(x, y, z\} \in \mathbf{R^3} : x^2 + y^2 > 1\}$
   $C = \{(x, y, z\} \in \mathbf{R^3} : x + y - 2 = 0\}$
   $D = \{(0, 0, 0)\}$
   $E = \{v : v = x(1, 2, 3) + y(2, 3, 1),\ x, y \in \mathbf{R}\}$

6. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V nad ciałem F. Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami wektorowymi ?

   (a) $U \cap W$ $\qquad$ (b) $U \cup W$
   (c) $U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\}$
   (d) $\lambda U = \{\lambda u : u \in U\}$

7. Sprawdź liniową zależność zbiorów:

   $A = \{(1, 2, 3), (0, 2, 1), (1, 2, 2)\}$ w $\mathbf{R^3}$
   $B = \{X^0, X, X^2, ...\}$ w $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$
   $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ in $\mathbf{R^{2\times 2}}$.

$D = \{cosx,\ cos2x,\ cos3x, ...\}$ w $C_{\mathbf{R}}$ (zbiór funkcji ciągłych zbioru $\mathbf{R}$ w $\mathbf{R}$).

8. Wykaż, że:

   (a) każdy zbiór zawierający wektor Θ jest liniowo zależny,

   (b) każdy zbiór zawierający zbiór liniowo zależny jest liniowo zależny.
   Sformułuj i udowodnij odpowiednie stwierdzenie dla zbiorów liniowo niezależnych.

9. Znajdź bazę przestrzeni V zawierającą wektory u i v, jeżeli

   $V = \mathbf{R^3}, \quad u = (1, -1, 1), \ \ v = (1, 1, 2)$

   $V = \mathbf{R^3}[X], \quad u = X^2 + 1, \ \ v = X$

   $V = \mathbf{R^{2\times 2}}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą przestrzeni V. Wykaż, że $\{u+v, u+w, v+w\}$ jest także bazą przestrzeni V.

11. U i W są podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Wykaż, że

    $U \cap W \quad$ oraz $\quad U + W = \{u + w : u \in U,\ w \in W\}$
    są podprzestrzeniami wektorowymi.
    Udowodnij, że jeśli U i W są skończenie wymiarowe, to

    $dim(U + W) \leq dimU\ +\ dimW$ oraz

    $dim(U + W) = dimU\ +\ dimW \quad \Leftrightarrow \quad U \cap W = \{0\}.$

12. Które z poniższych odwzorowań są, a które nie są liniowe ?

    $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}, \quad f(x, y, z) = (x + y, y - z)$

    $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}, \quad g(x, y) = (xcost - ysint, xsint + ycost)$

    $h : \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}[X], \quad h(P) = P^2$
    Dla tych funkcji które są liniowe:
    (a) Znajdź jądro, obraz, bazy jądra i obrazu oraz wymiary tych podprzestrzeni.
    (b) Wskaż macierze

    - w bazach kanonicznych

    - w dowolnie wybranych (lecz różnych od kanonicznych) bazach.

13. Udowodnij, że odwzorowanie liniowe $T : V \to W$ jest iniektywne wtedy i tylko wtedy gdy $KerT = \{0\}$.

14. Wskaż odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$, takie że $f(1,2) = (1,2,3)$, $f(2,1) = (1,3,2)$. Znajdź rząd f i wymiar $Kerf$.

15. Niech $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$, $g : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$, $f(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y)$, $g(x,y,z) = (x+y, y-z)$.
    Sprawdź, że f i g są liniowe. Na dwa sposoby znajdź macierze $f \circ g$ i $g \circ f$ w bazach kanonicznych $\mathbf{R^2}$ i $\mathbf{R^3}$:

    Wykonując zlożenie funkcji, następnie znajdując macierz złożenia.

    Korzystając z twierdzenia o macierzy złożenia odwzorowań liniowych.

16. Wykaż, że $L(V,W)$ - zbiór odwzorowań liniowych przestrzeni wektorowej V w przestrzeń wektorową W, jest przestrzenią wektorową (V i W są przestrzeniami nad wspólnym ciałem F). Wykaż, że jeśli $A = \{a_1, ..., a_n\}$ jest bazą V zaś $B = \{b_1, ..., b_m\}$ bazą W, to zbiór $\{f_{ij}\}_{i=1,...,n; j=1,...,m}$, gdzie $f_{ij} : V \to W$ są takimi odwzorowaniami liniowymi, że $f_{ij}(a_i) = b_j$, jest bazą $L(V,W)$.

17. Macierzą operatora liniowego $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ w bazie kanonicznej $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Wykaż, że wektory $e'_1 = 2e_1 + 3e + 2e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ tworzą bazę $\mathbf{R^3}$ i oblicz macierz f względem tej bazy.

18. Niech

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

    Redukując M do macierzy trójkątnej oblicz $detM$

19. Wykorzystując odpowiednie twierdzenie o rzędzie macierzy i wyznacznikach jego podmacierzy wykaż, że wektory $(1,2,0,-1),(3,2,-1,-1)$ i $(-1,2,1,-3)$ są liniowo niezależne.
Następnie sprawdź niezależność tych wektorów
- z definicji
- korzystając z redukcji Gaussa.

20. Wykaż, że dla $n \geq 4$

$$det \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & . & . & . & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & . & . & . & (n+1)^2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 & . & . & . & (2n-2)^2 \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & . & . & . & (2n-1)^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Jaki wynik otrzymamy dla $n = 1, 2, 3$?

21. Oblicz:

$$det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & . & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & n+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & n+2 \end{pmatrix}.$$

22. Wyznacz rzędy macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & a & 0 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

w zależności od parametru a.

23. Dla jakiej wartości parametru a rząd macierzy

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

jest minimalny ?

24. Oblicz A^{-1} jeżeli

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} cost & -sint \\ sint & cost \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Rozwiąż następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = & 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = & 12 \\ 9x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 & = & 6 \end{cases}$$

26. Przedyskutuj rozwiązalność i ew. rozwiąż w zależności od wartości parametrów u, a, k, l poniższe układy równań:

$$\begin{cases} ux & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & (1+u)y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & (2+u)z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & - & ky & - & 3x & = 0 \\ lx & + & y & - & 5z & = 0 \\ 2x & + & ky & + & z & = 0 \\ x & + & y & - & z & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax & +y & = 2 \\ 3x & -y & = 1 \\ x & +4y & = a \end{cases}$$

27. Niech $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$, i $x = (6, 2, -7)$ będą wektorami przestrzeni $\mathbf{R^3}$.

(a) Sprawdź, że $\{a_1, a_2, a_3\}$ jest bazą $\mathbf{R^3}$.

(b) Znajdź współrzędne wektora x względem tej bazy.

Niech $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ będzie operatorem liniowym którego macierzą w bazie kanonicznej jest

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) Znajdź macierz f w bazie $\{a_1, a_2, a_3\}$.
Uwaga: Punkty (a) i (b) proszę rozwiązać na dwa sposoby (z wykorzystaniem macierzy przejścia i bez).

28. Niech $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in F^{n\times n}$. Skalar

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

nazywamy *śladem* macierzy A.
Wykaż, że macierze podobne mają

(a) ten sam ślad,

(b) ten sam wyznacznik.
Czy podobne są macierze A i B jeżeli

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

29. Na przykładach macierzy z poprzedniego zadania sprawdź prawdziwość następującego twierdzenia:

Twiedzenie Cayleya-Hamiltona. Dla dowolnej macierzy $M \in F^{n\times n}$ zachodzi $\chi(M) = 0$, gdzie χ jest wielomianem charaktrystycznym macierzy M.

30. Dla każdej z poniższych macierzy sprawdź czy jest diagonalizowalna. Jeśli tak, to napisz jej postać diagonalną.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 4 & 1 & 8 \\ 4 & -4 & -11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

31. Wskaż bazę w której operator liniowy $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, zdefiniowany wzorem $f(x, y, z) = (x + y, y, 2z)$ ma macierz diagonalną.

32. Wykaż, że $f : \mathbf{R^2} \times \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_1$ jest formą dwuliniową, znajdź macierz ją reprezentującą w bazie kanonicznej i w bazie $\{(1, 2), (2, 1)\}$.

33. Wykaż, że dla dowolnych macierzy $A, B \in F^{n\times n}$ zachodzi $(AB)^T = B^T A^T$.

34. Wykaż, że

    (a) $g : \mathbf{R^3} \ni x \to 3x_1x_2 + x_2x_3$

    (b) $g : \mathbf{R^3} \ni x \to x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_3$

    jest formą kwadratową. Znajdź macierz formy g w bazie kanonicznej. Doprowadź g do postaci kanonicznej. Znajdź bazę $\mathbf{R^3}$ w której g ma postać kanoniczną.

35. Zbadaj określoność form kwadratowych których macierzami są

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Znajdź rozwiązanie ogólne układu równań:

$$\begin{cases} f_1' &= 5f_1 + 8f_2 + 16f_3 \\ f_2' &= 4f_1 + f_2 + 8f_3 \\ f_3' &= -4f_1 - 4f_2 - 11f_3 \end{cases}$$

    a następnie rozwiązanie spełniające warunek początkowy $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 1$.

37. Wykaż, że każda przestrzeń unormowana jest metryczna. Które z poniższych odwzorowań są normami ?

    (a) $f : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to \mid x \mid + \mid y \mid$

    (b) $g : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to max\{\mid x \mid, \mid y \mid\}$

    (c) $h : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to \mid x + y \mid$

38. Dla jakiej wartości parametru a płaszczyzna $\pi : x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$ jest równoległa do prostej

$$l : \begin{cases} 2x_1 - ax_2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 &= 0 \end{cases}$$

39. Napisz równania płaszczyzn:

- przechodzącej przez $A(3,-1,2)$ i prostopadłej do wektora $(4,2,-2)$
- przechodzącej przez $B(3,-1,2)$ i równoległej do wektorów $(2,1,3)$ i $(2.0,1)$.

40. Znajdź punkt przecięcia prostej:

$$x_1 = 1-t, \quad x_2 = 2+t, \quad x_3 = 2t, \quad x_4 = -1+t$$

i hiperpłaszczyzny: $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1$.

41. Znajdź kąt między prostymi l_1 i l_2 w $\mathbf{R^4}$

$$l_1 : \begin{cases} x_1 &= 1-t \\ x_2 &= 2t \\ x_3 &= 3+t \\ x_4 &= 4t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 1 &= 0 \\ x_3 + x_4 - 1 &= 0 \end{cases}$$

Wskazówki

Do zadania 20. Każdy wiersz odejmij od następnego otrzymując w ten sposób macierz M'. Potem to samo z macierzą M'. Dla $n-3$ $detM = -8$.

Do Zadania 21. Pierwszy wiersz odejmij od wszystkich pozostałych, potem z pierwszej kolumny wyciągnij 2, z drugiej 3, ..., z n-tej $(n+1)$. Dodaj wszystkie kolumny od pierwszej. Po rozwinięciu otrzymujemy $detM = (n+1)!(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n+1})$.

Rozdział 9

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

1. Wykaż, że funkcja

$$f : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to 5x^2 - 2xy + y^2$$

jest w $\mathbf{R^2}$ normą. Narysuj interpretację kuli otwartej $K(0,0),1)$ (a potem ogólnie: $K(A,r)$) względem tej normy.
Uzasadnij, dlaczego każdy zbiór otwarty względem tej normy jest otwarty względem następujących norm w $\mathbf{R^2}$:

   a) $\mathbf{R^2} \ni (x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma standardowa)
   b) $\mathbf{R^2} \ni (x, y) \to \mid x \mid + \mid y \mid$ (norma taksówkowa)

2. Wykaż, że odwzorowanie:

$$\mathcal{C}^2_{<a,b>} \ni (f, g) \to \int_a^b f(x)g(x)dx \in \mathbf{R}$$

jest iloczynem skalarnym. Wskaż dwie funkcje ortogonalne względem tej normy.

3. Napisz równanie krzywej ciągłej zawartej w zbiorze $K((2,2),2) \cup K((5,2),2)$ łączącej $A(2, \frac{1}{10})$ z $B(5, \frac{1}{10})$.

4. Oblicz granice podwójne i iterowane następujących funkcji (o ile istnieją):

   a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $x \to 0$, $y \to 0$

   b) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$, $x \to 0$, $y \to 0$

c) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, \quad x \to 0, \quad y \to 0$

5. Oblicz następujące granice iterowane

   a) $f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}, \quad x \to +\infty, \quad y \to +0$

   b) $f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}, x \to +\infty, \quad y \to +\infty$

   c) $f(x,y) = log_x(x+y), \quad x \to 1, \quad y \to 0$

6. Oblicz granice podwójne:

   a) $\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

   b) $\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

   c) $\lim_{x\to+\infty, y\to+\infty} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

7. Wykaż, że

   (a) funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y)) \neq (0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ nie jest ciągła w $(0,0)$.

   (b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & dla \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & dla \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest ciągła w $\mathbf{R^2}$.

   Wskazówka: Kłopot oczywiście z ciągłością w $(0,0)$. Skorzystaj z faktu, że dla $(x,y) \neq (0,0)$, $g(x,y) = (x+y)\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2}$. Teraz podstaw $t = \frac{x}{y}$ i wykaż, że $\frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2} = \frac{t^2+1-t}{t^2+1}$ jest ograniczona.

8. Wykaż, że $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$, zdefiniowana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & dla \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & dla \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

   ma w $(0,0)$ pochodne cząstkowe, lecz nie jest w tym punkcie ciągła.

9. Wykaż, że funkcja $\phi : \mathbf{R^2} \ni (h_1h_2) \to (h_1+h_2)\cos(x+y)$ jest różniczką funkcji zdefiniowanej w $\mathbf{R^2}$ wzorem $f(x,y) = \sin(x+y)$.

10. Niech $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R^2}$, $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Wykaż, że f ma pochodne kierunkowe $f'_h(0,0)$ we wszystkich kierunkach $h \in \mathbf{R}$, ale $h \to f'_h(0,0)$ nie jest liniowe. Czy f jest w $(0,0)$ różniczkowalna?

11. Czy funkcja f zdefiniowana w zadaniu 8 jest różniczkowalna w $(0,0)$?

12. Oblicz pochodne cząstkowe i zbadaj różniczkowalność funkcji:

    a) $f(x,y) = e^x \sin y$ (w $\mathbf{R^2}$)

    b) $g(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$ (w $\mathbf{R}$)

    c) $h(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ (w $\mathbf{R^2} - \{(0,0)\}$).

13. Wykaż, że

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & dla \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & dla \quad x^2+y^2=0 \end{cases}$$

    jest różniczkowalna w (0,0) choć jej pochodne cząstkowe w $(0,0)$ nie są ciągłe.

14. Wykaż, że $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R^2}$ zdefiniowana przez

$$f(x,yz) = (x+y^2, xy^2z)$$

    jest różniczkowalna w $\mathbf{R^3}$. Napisz macierz różniczki f. Podobnie dla $g : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ zdefiniowanej przez

$$g(u,v) = (u^2+v, uv, e^v).$$

    Obliczyć macierz Jacobiego $g \circ f$ (na dwa sposoby).

15. Znajdź pochodne funkcji $y = \varphi(x)$ zdefiniowanych wzorami:

    (a) $x^y = y^x$

    (b) $ln\sqrt{x^2+y^2} = arctg\frac{x}{y}$

16. Wskaż zbiory punktów w których istnieje funkcja uwikłana $z = f(x,y)$, jeżeli

    (a) $zx^2 - yz^2 = 1$

    (b) $ye^x \sin z - \frac{zlnx}{y} = 0$

    Na dwa sposoby:

    różniczkując lewą stronę równania ze względu na kolejne zmienne,

    korzystając ze wzorów z wykładu oblicz pierwsze i (wszystkie) drugie pochodne cząstkowe f.

17. Niech f będzie funkcją okresloną w zbiorze $\mathcal{C}_{<a,b>}$ funkcji ciągłych na przedziale $< a, b >$ o wartościach rzeczywistych i niech

$$f(u) = \int_a^b \varphi(x)u^2(x)dx,$$

gdzie φ jest pewną funkcją ciągłą w $< a, b >$. Wykaż, że f jest różniczkowalna w dowolnym punkcie $u \in \mathcal{C}(< a, b >)$ i

$$df(u)(h) = 2\int_a^b \varphi(x)u(x)h(x)dx.$$

18. Napisz równania płaszczyzn stycznych i prostych normalnych do

    (a) wykresów funkcji

    $$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad w \;\; punkcie \;\; M(1, 2, 5)$$

    $$g(x, y) = y + lnx \quad w \;\; punkcie \;\; M(1, 1, 1)$$

    (b) powierzchni

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (elipsoida)}$$

    $$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ (paraboloida)}$$

    $$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \text{ (stożek)}$$

    $$z = xy \text{ (paraboloida hiperboliczna)}$$

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (hiperboloida jednopowłokowa)}$$

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ (hiperboloida dwupowłokowa)}$$

    w dowolnym punkcie każdej z tych powierzchni (takim jednak, że płaszczyzna styczna w tym punkcie istnieje).

19. Napisz równanie prostej stycznej do przecięcia stożka $z^2 = x^2 + y^2$

    (a) z walcem $(x - z)^2 + y^2 = 4$ w punkcie $(5/4, \sqrt{3}, /4)$

    (b) z walcem $(z - 2)^2 + x^2 = 4$ w $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3)$

20. Niech

$$f : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to f(x, y) = (xy, x + y, xlny) \in \mathbf{R^2}$$

$$g : \mathbf{R^3} \ni (u, v, w) \to g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, uvw) \in \mathbf{R^2}.$$

Dwoma sposobami oblicz macierz różniczki funkcji $g \circ f$ w punkcie $(1, 1)$:

(a) Znajdując złożenie funkcji $g \circ f$ i następnie licząc macierz jego różniczki.

(b) Obliczając macierze pochodnych f i g a następnie znajdując ich iloczyn.
Oblicz macierz różniczki funkcji $(f \circ g)^{-1}$ w punkcie $(5, 0) = (f \circ g)(1, 1)$.

21. Rozłoż $f(x + h, y + k, z + l)$ według potęg h, k i l, gdy $f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$.

22. Rozłóż w szereg Maclaurina funkcje:

$$f(x, y) = e^x \sin y$$

$$g(x, y) = ln(1 + x)ln(1 + y)$$

23. Wyznacz ekstrema funkcji:
$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 29$
$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$
$v = \sin x + \cos y + \cos (x - y) \quad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$.
$w = x + y + 4 \sin x \sin y$.

24. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji
$z = (x - y)^2 + xy - x$ w kwadracie: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, jeśli $x^2 + y^2 \leq 1$,
$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ jeśli $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

25. Wykaż, że ze wszystkich trojkątów o obwodzie $2p$ największe pole ma trójkąt równoboczny.

26. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = xye^x$ w zbiorze ograniczonym przez prostą $y = 4$ i parabolę $y = x^2$.

Rozdział 10

Całki wielokrotne, krzywoliniowe i powierzchniowe

1. Całkę $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$ zamień na całki iterowane $\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ i $\int_c^d dy \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$ jeśli Ω jest
(a) trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$
(b) kołem $x^2+y^2 \leq y$.

2. Zmień kolejność całkowania w całkach podwójnych :

$$\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy \qquad \int_1^2 dx \int_0^{lnx} f(x,y)dy$$

3. Oblicz $\int\int_\Omega \mid xy \mid dxdy$ gdy Ω jest kołem o środku w $(0,0)$ i promieniu a.

4. Przechodząc do współrzędnych biegunowych oblicz

$$\int\int_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad \int\int_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

5. Narysuj bryłę której objętość wyznacza całka:

$$\int\int_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}dxdy$$

6. Oblicz objętości brył ograniczonych powierzchniami:
(a) $z = 1 + x + y$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.
(b) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.
(c) $z = xy$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.
(d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $(z > 0)$.

7. Znajdź współrzędne środka ciężkości jednorodnej figury ograniczonej krzywymi:
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

8. Oblicz pole które z powierzchni $z = xy$ wycina walec $x^2 + y^2 = a^2$.

9. Przy pomocy całki potrójnej oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:
$$x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2+z^2 = b^2,\ x^2+y^2 = z^2,\ (z > 0, 0 < a < b).$$

10. Przechodząc do współrzędnych cylindrycznych oblicz
$$\int\int\int_V (x^2 + y^2)dxdydz$$
(gdzie V jest bryłą ograniczoną powierzchniami: $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.

11. Oblicz całkę potrójną $\int\int\int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz$, gdzie V jest bryłą ograniczoną powierzchnią $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

12. Oblicz $\int_K x^2dx + \sqrt{xy}dy$, gdzie K jest częścią okręgu o środku w $(0, 0)$ zawartym między punktami $A(0, R)$ i $B(R, 0)$.

13. Jaką pracę wykona punkt materialny poruszający się w polu sił: $P = xz - z$, $Q = 0$, $R = 2x - z^2$ po łuku $z = x^3$ $y = 0$ od $A(0, 0, 0)$ do $B(1, 0, 1)$.

14. Oblicz
(a) $\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy,\ C:\ y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1$
(b) $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dy$
(c) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_3)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
i korzystając z twierdzenia Greene'a
(d) $\oint_C xy^2dy - x^2ydx \quad C : x^2 + y^2 = a^2$.
(e) $\oint_C e^{2x} \sin 2ydx + e^{2x} \cos 2ydy \quad C : 9(x - 1)^2 + 4(x - 3)^2 = 36$
(f) $\oint_C xy^2dx+3 \cos ydy$ gdzie C jest dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru ograniczonego krzywymi $y = x^2$, $y = x^3$ w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

15. Oblicz $\oint_{K((00),5)}(x^2 - y^2)ds$.

16. Znajdź masę krzywej $x = 2\cos t, \quad y = 3\sin t, \quad z = t, \quad t \in< 0, \frac{\pi}{2} >$, której gęstość masy jest proporcjonalna do kwadratu odległości punktu od punktu $(0, 0, 0)$.

17. Oblicz całki powierzchniowe niezorientowane:

    (a) $\int\int_S xyzdS$, gdzie S jest wycinkiem sfery $x^2+y^2+z^2 = 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$.

    (b) $\int\int_S xy^2z^2dS$, gdzie S jest cęścią stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ położoną nad podzbiorem płaszczyzny Oxy ograniczonym nierównościami: $x^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$.

    (c) $\int\int_S coszdS$, gdzie S jest wycinkiem płaszczyzny $2z+3y+4x = 2$ której rzutem na płaszczyzne Oxy jest $0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 3$.

    (d) $\int\int_S e^{x^2+y^2}dS$, gdzie S jet częścią stożka $z^2 = x^2 + y^2$ ponad kołem
    $x^2 + y^2 \leq 1$ dla $x \geq 0$ i $y \geq 0$.

    (e) $\int\int_S ln(x^2+y^2+z^2)dS$, gdzie S jest częścią sfery $x^2+y^2+z^2 = 5$ ponad kołem $x^2 + y^2 \leq 1$.

    (f) $\int\int_S zdS$, gdzie S jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami układu współrzędnych i $x + y + z = 1$.

    (g) $\int\int_S (x^2+y^2)dS$, gdzie S jest powierzchnią ograniczoną zamkniętym walcem: $x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1$.

18. Oblicz strumień cieczy przepływającej ku górze przez północną sferę $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przy szybkości przepływu $G(x, y, z) = (-y, x, z)$.

19. Oblicz całki powierzchniowe zorientowane:

    (a) $\int\int_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gdy

        (i) S jest częścią płaszczyzny $x+y+z = 3, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$, zorientowaną ku górze

        (ii) S jest zamkniętą, północną połową kuli: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \geq 0$ zorientowaną na zewnątrz.

    (b) $\int\int_S ydydz - xdzdx + xydxdy$, gdy S jest zadana przez: $z = (x^2 + y^2)^{1/2}, \ x^2 + y^2 \leq 1$

20. Znajdź strumień wypływający na zewnątrz powierzchni zamkniętej S gdy

(a) S jest czworościanem ograniczonym przez płaszczyznę $2x+3y+z=1$ i płaszczyznami układu współrzędnych a prędkość przepływu $G(x,y,z)=(0,x,y)$.

(b) S jest ograniczona przez stożek $x^2+y^2=z^2$ i płaszczyznę $z=1$ a prędkość przepływu $G(x,y,z)=(y,-x,xy)$.

21. Podczas wykładu udowodniliśmy, że jeśli pole wektorowe $F=(P,Q,R)$ i powierzchnia S spełniają założenia twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego, wtedy

$$\int\int_S Rdxdy = \int\int\int_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz.$$

Udowodnij dwa "brakujące ogniwa" dowodu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego, t.j. równości

$$\int\int\int_V \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \int\int_S Pdydz$$

$$\int\int\int_V \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \int\int_S Qdzdx$$

22. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego oblicz te z całek zadań 18 i 19 w których S jest powierzchnią zamkniętą.

23. Oblicz strumień cieczy wypływający na zewnątrz powierzchni S z prędkością G.

(a) $G(x,y,z)=(8xyz,2yz,6xz)$, $S:\ x^2+y^2=4,\ z=3,\ z=5$

(b) $G(x,y,z)=(z^3,x^2,xz\cos^2 y)$, $S:\ x=0,\ x=\sin y,\ y=0,\ y=\pi,\ z=0,\ z=x\sin y$.

(c) $G(x,y,z)=(x^2,xy,xz)$, $S:\ z+3x+3y=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

24. (por. 21) Na wykładzie udowodniliśmy, że przy stosownych założeniach (przypomnij jakich?!) o polu wektorowym F i powierzchni S zachodzi wzór

$$\oint_{\partial S} Pdx = \int\int_S (\frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy).$$

Udowodnij pozostałe dwa wzory uzupełniając w ten sposób dowód twierdzenia Stokesa.

25. Poniższe całki oblicz

(a) korzystając ze wzoru na zamianę całki krzywoliniowej na oznaczoną (bez korzystania z twierdzenia Stokesa),

(b) korzystając z twierdzenia Stokesa.

(W każdym z przykładów wybierz jedną z dwóch możliwych orientacji krzywej C.)

(i) $\oint_C (x+y)dx + xdy + (x+y)dz,\ C:\ x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ 0 \le t \le 2\pi$

(ii) $\oint_C (x+z)dx + (y+z)dy + \sin z dz,\ C:\ x^2+y^2 = 4,\ z = 2$

26. Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz (C zorientuj jakkolwiek):

(a) $\oint_C ydx + zdy + xdz$, C : trójkąt o wierzchołkach $(0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,0,0)$.

(b) $\oint_C zdx + xdy + ydz$, gdzie C jest przecięciem powierzchni o równaniu $z = xy$ z walcem $x^2+y^2 = 9$.

(c) $\oint_C (z^2 - xy - y^2)dx + y^2 lny dy + (x+y)\sin 5z dz$, gdzie C jest przecięciem płaszczyzny $x+y+z = 4$ z płaszczyznami układu.

Rozdział 11

Całki powierzchniowe

1. Oblicz całki powierzchniowe niezorientowane:

   (a) $\int\int_S xyzdS$, gdzie S jest wycinkiem kuli $x^2+y^2+z^2=4$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

   (b) $\int\int_S xy^2z^2dS$, gdzie S jest częścią stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}$ położoną nad podzbiorem płaszczyzny Oxy ograniczonym nierównościami: $x^2+y^2\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

   (c) $\int\int_S coszdS$, gdzie S jest wycinkiem płaszczyzny $2z+3y+4x=2$ której rzutem na płaszczyzne Oxy jest $0\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 3$.

   (d) $\int\int_S e^{x^2+y^2}dS$, gdzie S jet częścią stożka $z^2=x^2+y^2$ ponad kołem
   $x^2+y^2\leq 1$ dla $x\geq 0$ i $y\geq 0$.

   (e) $\int\int_S ln(x^2+y^2+z^2)dS$, gdzie S jest częścią sfery $x^2+y^2+z^2=5$ ponad kołem $x^2+y^2\leq 1$.

   (f) $\int\int_S zdS$, gdzie S jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami układu współrzędnych i $x+y+z=1$.

   (g) $\int\int_S (x^2+y^2)dS$, gdzie S jest powierzchnią ograniczoną zamkniętym walcem: $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$.

2. Oblicz strumień cieczy przepływającej ku górze przez północną sferę $x^2+y^2+z^2=1$ przy szybkości przepływu $G(x,y,z)=(-y,x,z)$.

3. Oblicz całki powierzchniowe zorientowane wiedząc, że w każdym z przykładów powierzchnia S jest zorientowana ku górze:

   (a) $\int\int_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, gdy

   (i) S jest zadane przez: $x + y + z = 3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,$
   (ii) S jest zadane przez:
   $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0.$

(b) $\int\int_S ydydz - xdzdx + xydxdy$, gdy S jest zadana przez: $z = (x^2 + y^2)^{1/2},\ x^2 + y^2 \leq 1$

4. Znajdź strumień wypływający na zewnątrz powierzchni zamkniętej S gdy

   (a) S jest czworościanem ograniczonym przez płaszczyznę $2x + 3y + z = 1$ i płaszczyznami układu współrzędnych a prędkość przepływu $G(x, y, z) = (0, x, y)$.
   (b) S jest ograniczona przez stożek $x^2 + y^2 = z^2$ i płaszczyznę $z = 1$ a prędkość przepływu $G(x, y, z) = (y, -x, xy)$.

5. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego oblicz te z całek zadań 3 i 4 w których S jest powierzchnią zamkniętą.

6. Oblicz strumień cieczy wypływający na zawnątrz powierzchni S z prędkością G.

   (a) $G(x, y, z) = (8xyz, 2yz, 6xz),\ S:\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 3,\ z = 5$
   (b) $G(x, y, z) = (z^3, x^2, xzcos^2y),\ S:\ x = 0,\ x = siny,\ y = 0,\ y = \pi,\ z = 0,\ z = xsiny.$
   (c) $G(x, y, z) = (x^2, xy, xz),\ S:\ z + 3x + 3y = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

7. Poniższe całki oblicz

   (a) korzystając ze wzoru na zamianę całki krzywoliniowej na oznaczoną (bez korzystania z twierdzenia Stokesa),
   (b) korzystając z twierdzenia Stokesa.

   (W każdym z przykładów wybierz jednż z dwóch możliwych orientacji krzywej C.)

   (i) $\oint_C (x + y)dx + xdy + (x + y)dz,\ C:\ x = cost,\ y = sint,\ z = 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi$
   (ii) $\oint_C (x + z)dx + (y + z)dy + sinzdz,\ C:\ x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$

8. Korzystając z twierdzenia Stokesa oblicz (C zorientuj jakkolwiek):

   (a) $\oint_C ydx + zdy + xdz$, C : trójkąt o wierzchołkach $(0, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 0, 0).$

(b) $\oint_C zdx + xdy + ydz$, gdzie C jest przecięciem powierzchni o równaniu $z = xy$ z walcem $x^2 + y^2 = 9$.

(c) $\oint_C (z^2 - xy - y^2)dx + y^2 lny dy + (x + y) sin 5z dz$, gdzie C jest przecięciem płaszczyzny $x + y + z = 4$ z płaszczyznami układu.

Rozdział 12

Szeregi

1. Wykaż że jeśli X jest przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbf{K}$, wtedy:

$$\| * \| : x \to \|x\| \quad + : (x, y) \to x + y \quad \lambda : x \to \lambda x$$

   są funkcjami ciągłymi.

2. Zbadaj zbieżność, bezwzględną zbieżność i ew. obliczyć sumy szeregów:

   (a) $1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + ...$

   (b) $1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/9 + ... + 1/2^n + 1/3^n + ...$

   (c) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

   (d) $\sum(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

3. Zbadaj zbieżność szeregów:

   (a) $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + ...$

   (b) $1/1! + 1/2! + ... + 1/n! + ...$

   (c) $1/1001 + 1/2001 + 1/3001 + ...$

   (d) $1/\sqrt{2} + 1/2\sqrt{3} + ... + 1/n\sqrt{n+1} + ...$

   (e) $\sum \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.

4. Ile wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ należy zsumować, by obliczyć jego sumę z dokładnością do $0,001$ jeżeli:
   (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

5. Wykaż, że jeśli zbieżne są szeregi $\sum a_n^2$ i $\sum b_n^2$, wtedy także szeregi $\sum \|a_n b_n\|$ oraz $\sum (a_n + b_n)^2$ są zbieżne.

6. Zbadaj zbieżność szeregów o wyrazie ogólnym:
(a) $1000^n/n!$ (b) $(n!)^2/(2n)!$ (c) $2^n n!/n^n$
(d) $3^n n!/n^n$ (e) $n^{n-1}/(2n^2+n+1)^{(n+1)/2}$
(f) $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n/(n-1)}$ (g) $\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}\right)/n^\alpha$ (h) $(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

7. Określ charakter zbieżności poniższych szeregów funkcyjnych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ w przedziale (i) $\mid x \mid \leq q$, $q<1$ (ii) $\mid x \mid \leq 1$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ $-1 \leq x \leq 1$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ $0 < x < +\infty$

8. Wykaż jednostajną zbieżność szeregów we wskazanych zbiorach:

(a) $\sum_1^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ $-\infty < x < +\infty$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $x \in \mathbf{R}^+$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ $\frac{1}{2} \leq \mid x \mid \leq 2$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ $\mid x \mid < +\infty$

9. Wykaż, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \mid f_n(x) \mid$ jest zbieżny jednostajnie w przedziale $< a, b >$, to także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w $< a, b >$.

10. **(a)** Wykaż, że ciąg $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n(x+\frac{\pi}{2})$ jest zbieżny jednostajnie w $\mathbf{R}$, a mimo to

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' \neq \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

(b) Wykaż, że ciąg $f_n(x) = nxe^{nx^2}$ jest zbieżny w $< 0, 1 >$, lecz

$$\int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(x))dx \neq \lim_{n+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx.$$

Skomentuj!

11. Całkując w przedziale $< 0, 1 >$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$ oblicz $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.
Podobnie, wykorzystaj rozwinięcie

$\frac{1}{1+x}$ do obliczenia $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ dla $x \in (-1, 1)$ oraz $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$,

$\frac{1}{1+x^2}$ do obliczenia $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ dla $x \in (-1, 1)$ oraz $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

12. Przedstaw w postaci szeregów całki niewłaściwe:

$$\int_0^x \frac{sinx}{x}dx \qquad \int_0^1 \frac{arctgx}{x}dx$$

Ile wyrazów odpowiedniego szeregu należy zsumować, by otrzymać wartość całki z dokładnością co najmniej 0,01 ?

13. Zbadaj zbiór określoności i różniczkowalności funkcji f zdefiniowanej wzorem:

$$(a) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x} \qquad (b) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\,x\,|}{n^2+x^2}$$

14. Znajdź promień zbieżności szeregów potęgowych

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$

$\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})x^n$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$

15. Rozłóż w szereg Taylora funkcje:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ (b) $f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$ $(x \to 0)$ $\qquad$ (c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $(x \to 0)$

Rozdział 13

Funkcje zmiennej zespolonej

1. Dwiema metodami oblicz pochodną funkcji f jeśli
a) $f(z) = z^3 + 2z$ b) $f(z) = \frac{2z}{z^3-1}$

2. Wykaż, że $f(z) = Rez$ nie ma pochodnej w żadnym punkcie płaszczyzny.

3. Sprawdź, czy funkcja
(a) $f(z) = x - y + i(y - x)$
(b) $f(z) = x - y + i(x + y)$
jest różniczkowalna?

4. Oblicz promień zbieżności szeregu $\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$. W obliczeniach wykorzystywany jest wzór $r = \frac{1}{\lambda}$, gdzie $\lambda = \lim sup \sqrt[n]{| a_n |}$. Wskaż, w którym miejscu rozumowania interweniuje fakt, że w definicji λ występuje granica górna, a nie zwykła granica ciągu?

5. Który z szeregów:
$$\sum \frac{z^n}{2^n} \quad \sum \frac{z^n}{n^n}$$
definiuje funkcję całkowitą?

6. Znajdź funkcję holomorficzną f, taką że $Ref(z) = x^3 - 3xy^2$ dwiema metodami:
a) odgadując jedyne możliwe rozwiązanie
b) korzystając z odpowiedniego wzoru.

7. Wykaż, że
(a) funkcje sin i cos nie są ograniczone w $\mathbf{C}$

(b) $e^z \neq 0$ dla każdego $z \in bfC$
(c) $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$
Z tego ostatniego wzoru wywnioskuj o okresowości funkcji *cos* i sin, wzory redukcyjne (formalnie identyczne z wzorami redukcyjnymi rzeczywistych funkcji cos i sin, wzory na kosinus i sinus sumi oraz $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (dla $z \in \mathbf{C}$.

8. Oblicz całki:
a) $\oint_{K(0;1)} z^3 dz$ b) $\oint_{K(0,1)} \mid z-1 \mid dz$
c) $\int_{AB} \mid z-1 \mid dz$ oraz $\int_{AB} (z-1)^5 dz$ po odcinku łączącym $A(1,0)$ z $B(0,1)$
d) $\oint_{K(-1;1)} \frac{z^2}{z+1} dz$
e) $\oint_K \frac{cos3z}{z^2-4} dz$ gdzie $K = K(2;1)$, $K = K(0;1)$, $K = (-2;1)$.

Rozdział 14

Równania różniczkowe

1. Wykaż, że funkcja f jest rozwiązaniem odpowiedniego równania różniczkowego:
(a) $f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad yy' = x - 2x^3$
(b) $f(x) = x\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad xy' = y + x\sin x$

2. Podaj całki ogólne i szczególne poniższych równań:
(a) $y' = xe^x \sin x \quad y(0) = \frac{1}{2}$ (b) $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad y(0) = 0$

3. Rozwiązaniem ogólnym pewnego równania różniczkowego jest funkcja $f(x) = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2 + x^3)$. Znajdź całkę szczególną spełniającą warunki początkowe $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

4. Znajdź równanie różniczkowe rodziny krzywych (gdzie k jest parametrem):
(a) $y = kx^2$ (b) $r(\varphi) = \frac{k}{\sin\varphi}$

5. Narysuj pole kierunków równania
(a) $y' = x^2 + 2y^2$ (b) $y' = x^2 - y^2$.

6. Rozwiąż równania:
(a) $sin^2x + (y')^2 = 1$ (b) $xy' + (1+y^2)arctgy = 0$
(c) $1 - x^2 - xyy' = 0$

7. Znajdź całki szczególne równań:
(a) $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x, \quad y(1) = 1$
(b) $\sin 2xdx - y\cos^3 2xdy = 0, \quad y(0) = 2$
(c) $y' = 2y - e^{2x}sinx + x^2e^{2x}, \quad y(0) = 1$

8. Rozwiąż równania
(a) jednorodne: $y'(x+y) + x - y = 0, \quad xy' = yln\frac{y}{x}, \quad xyy' + x^2 + y^2 = 0$

(b) sprowadzalne do jednorodnych:
$(2x-y-1)y' = x-2y+1, \quad x+y-2+(x-y+4)y' = 0,$
$x-y+1-(x+2y-1)y' = 0, \quad x+y+1-(x+y-2)y' = 0$
$(x+y)dx+(3x+3y-4)dy, \quad y(1) = 0$

9. Rozwiąż równania:
$\frac{dy}{dx} + y = x^2 - 3x + 2, \quad y' - y = xe^{2x}, \quad y' + 4y = 5sin3x$

10. Znajdź całki szczególne równań:
$\frac{dy}{dx} = 5y + e^{5x} \qquad y(\frac{1}{5}) = e$
$y' + y = sinx \qquad y(\pi) = \frac{1}{2}$

11. Wyznacz czynnik całkujący i rozwiąż równania różniczkowe wiedząc, że istnieje czynnik całkujący zależny od jednej zmiennej.

$$xy^2 + y - xy' = 0 \qquad y^2 + (xy-1)y' = 0$$

$$x^2 - y + xy' = 0 \qquad x^2 - 3y^2 + xyy' = 0$$

$$\sin x + e^y + y'x\cos x = 0$$

12. Wykaż, że dla równania

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

(gdzie P i Q są funkcjami klasy C^1 w $D \subset \mathbf{R}$) istnieje czynnik całkujący postaci $f(x)g(y)$ jeśli istnieją funkcje φ i ψ spełniające równanie

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \varphi(x)Q(x,y) - \psi(y)P(x,y)$$

i wtedy $f(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$ i $g(y) = e^{\int \psi(y)dy}$. Korzystając z powyższego, znajdź czynnik całkujący i rozwiąż równanie
(a) $3xy^2dx + 4x^2ydy = 0$
(b) $(y\cos xy + \sin xy)dx + (x\cos xy + 2\sin xy)dy = 0$

13. Rozwiąż równania:

$$y' + \frac{y}{x} = ay^2lnx \qquad 2xyy' + x = y^2$$

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + 4x\sqrt{y} = 2xe^{-x^2} \qquad (\frac{x^2}{y} - y^3)y' = x$$

14. Rozwiąż równania:

$$y'' = \frac{y'}{x} + xsinx \qquad (1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$$

$$y''^2 - 4y' = 0 \qquad (1+x^2)y'' + y'^2 = -1$$

$$y^3y'' + 1 = 0 \qquad y''(y-1) = 2y'^2$$

$$yy'' - y'^2 = 6xy^2 \qquad (y'+2y)y'' = y'^2$$

$$y''(1+y^2) = yy'^2$$

15. Sprawdź, że jeśli $p^2 - 4q = 0$ wtedy $e^{\lambda x}$ oraz $xe^{\lambda x}$ są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania

$$y'' + py' + qy = 0$$

(gdzie λ jest jedynym rozwiązaniem równania charakterystycznego).

16. Podaj rozwiązania ogólne równań różniczkowych:

$$y'' + 3y' - y = 0 \qquad y'' + 4y' + 3y = 0$$

$$y'' + 6y' + 5y = 0 \qquad y'' - 5y' + y = 0$$

$$y'' - y' + 3y = 0 \qquad y'' + 2y' + 10y$$

17. Dla równań z zadania poprzedniego znajdź rozwiązania spełniające warunki początkowe

$$(a) \;\; y(0) = y'(0) = 0 \qquad (b) \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$$

18. Wykaż, źe jeśli ϕ jest całką szczególną równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

zaś ψ równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

wówczas $\phi + \psi$ jest całką szczególną równania

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) + g(x)$$

19. Wykaż, że jeśli $\lambda_1, ..., \lambda_n$ są różnymi pierwiastkami równania

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$$

wtedy funkcje $e^{\lambda_1 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ tworzą układ podstawowy tego równania.

20. Rowiąż (jeśli się da, to zarówno metodą wariacji stałych jak i metodą przewidywania) równania:

$$y'' - 8y' + 16y = xe^{2x} \qquad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

$$y'' - 2y' + 2y = e^x cosx \qquad y'' + y' + y = e^{\frac{x}{2}} sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$y'' - 4y' + 4y = x^2 - x \qquad y'' + 4y = 4cosx + 3sinx + sin2x - 8$$

$$y'' + 4y = cos^2 x \qquad y''' - y" + y' - y = xe^x - e^{-x} + 7$$

$$y''' - 3y" - 3y' - y = e^x - x + 16 \qquad 16y^{(4)} - y = e^{x/2}$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$$

21. Rozwiąż w przedziale $(0, +\infty)$ równanie

$$x^2 y" - xy' + y = 4lnx$$

wiedząc, że $y_1 = x$ oraz $y_2 = xlnx$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania $x^2 y'' - xy' + y = 0$

22. Rozwiąż:

$$y'' + y = 8cos2x - 4\sin x \qquad y(\pi/2) = -1, \quad y'(\pi/2) = 0$$

$$y^{(4)} - y''' = x + e^x \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad y'''(0) = 0 \quad y'''(0) = 0$$

23. Sprowadź poniższe układy równań liniowych do równań liniowych odpowiedniego rzędu:

$$\begin{cases} y' & + & 2z & & = x \\ z' & - & 2y & +z & = & \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' & - & x & + & y & - & z & = & t^2 \\ y' & + & 2x & - & y & + & z & = & e^t \\ z' & - & 2x & + & y & - & z & = & \cos t \end{cases}$$

24. Niech $D : (a, b) \to \mathbf{R^{n \times n}}$,

$$D = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & ... & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & ... & y_n^{(2)} \\ & & ... & \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Wykaż, że jeżeli $y_1^{(i)} = \begin{pmatrix} y_1^{(i)} \\ . \\ . \\ . \\ y_n^{(i)} \end{pmatrix}$ $(i = 1, ..., n)$, są rozwiązaniami układu równań liniowych jednorodnych:

$$(J) \begin{cases} y_1' + a_{11}y_1 + & ... & a_{1n}y_n = 0 \\ & ... & \\ y_n' + a_{n1}y_1 + & ... & a_{nn}y_n = 0 \end{cases}$$

i $detD(x_0) \neq 0$ dla pewnego $x_0 \in (a, b)$, wtedy $detD(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$.

25. Sprawdź, że funkcje
(a) $f, g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (b) $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
są liniowo niezależnymi rozwiązaniami ukladu $x' = Ax$, gdzie
(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

26. Rozwiąż układy równań:
(a) $x' = -x + y + z, \quad y' = x - y + z, \quad z' = x + y - z$
(b) $x' = -y, \quad y' = 2x - 3y$
(c) $x' = z, \quad y' = 3x + 7y - 9z, \quad z' = 2y - z$
(d) $x' = -4x + y, \quad y' = -x - y$
(e) $x' = 5x - 6y - 6z, \quad y' = -x + 4y + 2z, \quad z' = 3x - 6y - 4z$
(f) $x' = -2x - 5y, \quad y' = x + 2y$
(g) $x' = y + z, \quad y' = -x + z, \quad z = -x - y$
(h) $x' = y, \quad y' = -9x + 6y, \quad x(0) = 1, \ y(0) = 4$
(i) $x' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
(j) $x' = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \\ -16 & 4 & 11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
(k) $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1,7 \end{bmatrix}$
(l) $x' = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$
(m) $x' + x + y = t^2, \quad y' + y + z = 2t, \quad z' + z = t$
(n) $tx' - x - 3y = t \quad ty' - x + y = 0$
(o) $tx' + 6x - y - 3z = 0 \quad ty' + 23x - 6y - 9z = 0 \quad tz' + x + y - 2z = 0$
(p) $x' + 5x + y = e^t \quad y' + 3y - x = e^{2t}$

Rozdział 15

Szeregi Fouriera

1. Znajdź iloczyny skalarne funkcji (f, g), gdzie
   (a) $f, g :< 0, 2 >\to \mathbf{R},\ f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$
   (b) $f, g :< -\pi, \pi >\to \mathbf{R},\ f(x) = x,\ g(x) = \sin 3x$.

2. Dlaczego odwzorowanie $\| \ \|: X \ni f \to \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}$ nie jest normą gdy X jest zbiorem funkcji R-całkowalnych w przedziale $< 0, 1 >$, a jest normą gdy $X = C_{<0,1>}$?

3. Oblicz normy kwadratowe funkcji $f_1 : x \to x$, $f_2 : x \to sgnx$, $f_3 : x \to \sin x$, $f_4 : x \to \cos x$ i odległości kwadratowe pomiędzy f_i a f_j, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ w przedziale $< -\pi, \pi >$.

4. Wykaż, że ciąg funkcyjny (x^n) w przedziale $< 0, 1 >$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do każdej z funkcji:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & dla \quad x \in \{0; 0,5; 1\} \\ 0 & dla \quad x \in < 0, 1 > -\{0; 0,5; 1\} \end{cases} \qquad g(x) = 0 \quad dla \quad x \in < 0, 1 > .$$

   Skomentuj!

5. Rozwiń w szereg Fouriera funkcje:

   $$\begin{array}{llllll} (a) & f(x) =\mid x \mid & x \in (-\pi, \pi), & (b) & f(x) = x & x \in (a, a + 2l), \\ (c) & f(x) = sgn(\cos x), & & (d) & f(x) = arc\sin(\cos x), & \\ (e) & f(x) = \cos 7x & x \in < -\pi, \pi >, & (f) & f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x & x \in < -\pi, \pi > \end{array}$$

6. Rozwiń funkcję $f(x) = x^2$
   (i) w szereg kosinusów w przedziale $< -\pi, \pi >$

(ii) w szereg sinusów w przedziale $< 0, \pi >$
(iii) w szereg Fouriera w przedziale $< 0, 2\pi >$
Narysuj wykresy funkcji i wykresy sum ich szeregów Fouriera. Korzystając z otrzymanych wyników oblicz sumy szeregów:
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

7. Znajdź wielomian $X_n(x)$ stopnia n taki, aby (przy dowolnie ustalonych a i b) dla dowolnego wielomianu $Q(x)$ stopnia niższego niż n zachodziła równość
$$\int_a^b X_n(x)Q(x)dx = 0$$
Wskazówka: Potraktuj wielomian $X_n(x)$ jako pochodną rzędu n pewnego wielomianu $R(x)$ stopnia $2n$ spełniającego warunki:
$$R(a) = R'(a) = ... = R^{(n-1)}(a) = 0.$$

8. Udowodnij, że ciąg wielomianów Legendre'a
$$P_0(x) = 1 \quad P(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[(x^2-1)^n]}{nx^n}$$
jest układem ortogonalnym funkcji w przedziale $< -1, 1 >$.
Wskazówka: Skorzystaj z zadania poprzedniego.

Rozdział 16

Przekształcenia całkowe

1. Wykaż, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} -1/x^2 & dla \;\; x \in \mathbf{Q}, \mid x \mid > 1 \\ 1/x^2 & dla \;\; x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \mid x \mid > 1 \\ 1 & dla \;\; x \in \mathbf{R}, \mid x \mid \leq 1 \end{cases}$$

   nie jest bezwzględnie całkowalna, choć istnieje $\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x) \mid dx$.

2. Wskaż przykłady funkcji spełniających założenia Twierdzenia Fouriera, oraz takich które tych założeń nie spełniają.

3. Przedstaw funkcję $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ daną wzorem:
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & dla \; 0 < x \leq 1 \\ 0 & dla \;\; x > 1 \end{cases}$
   b) $f(x) = e^{-ax}$, $(a > 0)$
   za pomocą (i) sinusowego (ii) kosinusowego wzoru Fouriera.

4. Znajdź widmo, widmo amplitudowe i widmo fazowe funkcji $f(x) = e^{-at}\mathbf{1}(x)$.

5. Wykaż, że widmo amplitudowe ($\mid F(i\omega) \mid$) jest funkcją parzystą, zaś widmo fazowe $\Theta(\omega)$ funkcją nieparzystą.

6. Podaj transformatę Fouriera funkcji $g(x) = \mathbf{1}(x) - \mathbf{1}(x - 3)$. Narysuj wykresy części rzeczywistej i urojonej transformaty.

7. Znajdź funkcję f, taką, że $\mathcal{F}(f(x)) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$, $a > 0$.

8. Zbadaj które z poniższych funkcji są oryginałami:
   (a) $f(t) = \eta(t) ln(1 + t^2)$

(b) $f(t) = \eta(t)t^2$
(c) $f(t) = \eta(t)e^{3t+1}$
(d) $f(t) = \eta(t)t^3e^{5t}$
(e) $f(t) = \eta(t)e^{t^2} sin3t$
(f) $f(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}$

9. Wykaż, że jeśli f jest oryginałem okresowym o okresie $T > 0$ (tzn takim, że dla $t > 0$ $f(t+T) = f(t)$ wtedy

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

10. Oblicz transformaty oryginałów:
(a) $f(t) = sin3t$
(b) $f(t) =\mid cos2t \mid$
(c)$f(t) = \begin{cases} 0 & dla & t < 0 \\ 0 & dla & 2k\pi < t < (2k+1)\pi \\ 2t - (4k+2)\pi & dla & (2k+1)\pi < t < 2(k+1)\pi \end{cases}$

11. Dla poniższych równań i układów równań różniczkowych wskaż całki szczególne przy pomocy rachunku operatorowego:
(a) $x'' - 5x' + 6x = 2e^t \quad x(0) = x'(0) = 1$
(b) $x" - x = sht \quad x(0) = x'(0) = 0$
(c) $x''' - 3x' + 2x = 8te^{-t} \quad x(0) = x'(0) = 0, \;\; x''(0) = 1$
(d) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0 \quad x(0) = x'(0) = x''(0), \;\; x'''(0) = 1$
(f) $x' = 3y - x, \;\; y' = x + y + e^t, \;\; x(0) = y(0) = 0$
(g) $x' = -x+y+z, \;\; y' = x-y+z, \;\; z' = x+y+z, \;\; x(0) = 1, \; y(0) = z(0) = 0$
(h) $2x' + y' + 2y = cost, \; x' + y' - y = e^t, \;\; x(0) = y(0) = 0$

Dystrybucje

12. Wykaż, że ciąg $\{e^x + \frac{1}{n}\}$ jest podstawowy. Wskaż ciągi jemu równoważne. Podaj inne przykłady ciągów podstawowych i takich które podstawowymi nie są.

13. Uzasadnić fakt, że ciąg (d_n)

$$d_n(t) = \begin{cases} 0 & dla & t < 0 \\ n^2t & dla & 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 2n^-n^2t & dla & \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & dla & t > \frac{2}{n} \end{cases}$$

jest podstawowym i definiuje dystrybycję delta Diraca.

14. Wykaż, że ciąg (f_n), $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ jest podstawowy i definiuje **dystrybucję** $\mid x \mid$.
oblicz pochodną tej dystrybucji. Zauważ, że druga pochodna dystrybucji $\mid x \mid$ jest równa $2\delta(x)$
Wskazówka: W tym celu najlepiej wykazać, że ciąg (f_n) równoważny jest ciągowi (g_n)

$$g_n(x) = \begin{cases} -x & dla \quad x \leq 0 \\ nx^2 - x & dla \quad x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Rozdział 17

Zadania egzaminacyjne

Każdy z trzech semestrów kończy się egzaminem który składa się z dwóch części:

- praktycznej, ocenianej na 60 punktów oraz
- teoretycznej, ocenianej na 40 punktów.

Zadania części praktycznej są podobne do prezentowanych w rozdziałach poprzednich, choć nigdy nie są to *te same* zadania. Zadania części teoretycznej dotyczą bezpośrednio wykładu, zawarte w nich przykłady są także, w wielu przypadkach, zaczerpnięte z wykładu. Przy każdym z zestawów zadań podałem datę egzaminu podczas którego się pojawił.

17.1 Pierwszy semestr

17.1.1 Teoria

1. Zdefiniuj całkę Riemanna funkcji $f :< a, b >\to \mathbf{R}$.
   Wykaż, że jeśli funkcje f i g są R-całkowalne, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, wtedy całkowalna jest funkcja $\alpha f + \beta g$ i zachodzi wzór

$$\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

2. Podaj definicję wypukłości wykresu funkcji ku górze (ku dołowi). Zbadaj wypukłość wykresu funkcji

$$f : \mathbf{R} \ni x \to 2x^3 + 3x^2 - 6x + 8$$

3. Podaj definicję bazy przestrzeni wektorowej. Udowodnij, że każdy wektor można **jednoznacznie** przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazy.

4. Wypowiedz twierdzenie Lagrange'a. Wykaż nierówność

$$| \sin x - \cos x | \leq | x - y | \, .$$

17 czerwca 1997

17.1.2 Zadania

17.2 Drugi semestr

17.2.1 Teoria

1. Podaj definicję wyznacznika oraz wymień co najmniej sześć ważnych własności wyznaczników.
   Korzystając ze wzoru Laplace'a oblicz $detA$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 & 0 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 3 & 21 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ile wynosi rząd macierzy A?

2. Co oznacza, że szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny?
   Podaj kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta zbieżności bezwzględnej szeregów. Dla jakich x rzeczywistych zbieżny jest szereg:

   a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$?

   b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$?

3. Wypowiedz twierdzenie Taylora dla funkcji f zdefiniowanej w przestrzeni unormowanej. Zastosuj ten wzór do funkcji

$$f : \mathbf{R}^2 \ni (x, y) \to e^x \cos y$$

   w punkcie $(x, y) = (0, 0)$ dla $n = 2$.

4. Wypowiedz i udowodnij twierdzenie Greene'a. Korzystając z tego twierdzenia oblicz
$$\oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy,$$
gdzie K jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w $(x_0, y_0) = (1, 2)$ i promieniu 2.

17 czerwca 1997

1. Rozpoznaj które z poniższych funkcji są liniowe, a które nie (odpowiedź uzasadnij).
$$f : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to \mid x \mid + y \in \mathbf{R}$$
$$g : \mathbf{R^3} \ni (x, y) \to (e^x y, e^y x) \in \mathbf{R^2}$$
$$h : \mathbf{R} \ni x \to x \in \mathbf{R}$$
Wypowiedz twierdzenie które określa związek pomiędzy wymiarem przestrzeni określoności, wymiarem jądra i rzędem odwzorowania liniowego.
Co to jest rząd odwzorowania liniowego?

2. Wypowiedz twierdzenie Abela. Wyjaśnij w jaki sposób korzystając z równości
$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$
można wyprowadzić wzór na ln2?
Wskazówka: Wykorzystuje się jeszcze jedno, poza tw. Abela, twierdzenie poznane na wykładzie. Zacytuj to twierdzenie.

3. Omów metodę znajdywania ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych. Znajdź ekstrema lokalne funkcji
$$f : \mathbf{R} \ni (x, y) \to x^2 - xy + y^2 \in \mathbf{R}.$$

4. Sprawdź które z poniźszych pól jest potencjalne:
$$f : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to (x \sin x, y \cos x) \in \mathbf{R^2}$$
$$g : \mathbf{R^2} \ni (x, y) \to (6x^2 y, 2x^3 + 3 \cos y)$$
Dla tego z tych pól które jest potencjalne oblicz całkę krzywoliniową skierowaną po krzywej o początku w $(1, 2)$ i końcu w $(4, 3)$.

15 września 1997

17.2.2 Zadania

17.3 Trzeci semestr

17.3.1 Teoria

1. Podaj definicję równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu i omów metodę jego rozwiązywania. Rozwiąż równanie:

   $$y' = e^x y + y^2 \cos x.$$

   Jakiego typu jest to równanie?

2. Podaj i udowodnij

   a) warunek konieczny

   b) warunek wystarczający

   różniczkowalności funkcji zespolonej.
   Wskaż przykłady: funkcji różniczkowalnej i takiej która nie jest różniczkowalna.

3. Wypowiedz i udowodnij wzory Eulera-Fouriera. Znajdź szereg trygonometryczny Fouriera funkcji

   $$f :< -\pi, \pi >\ni x \to x \in \mathbf{R}$$

   i narysuj wykres jego sumy.

4. Podaj twierdzenie o wzorze Gaussa-Ostrogradskiego.
   Oblicz strumień pola $G(x, y, z) = (y, -x, xy)$ przez powierzchnię wyznaczoną równaniami

   $$z = 1 \text{ i } z = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

   korzystając ze wzoru G-O i bez wykorzystania tego wzoru.

17 czerwca 1997

17.3.2 Zadania

1. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe

   $$yu\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Podaj rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X\,,$$

wiedząc, że $W(p) = p(p-2)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy tego układu.

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in (0,\pi) \\ 1 & x = 0\,,\ \pi \\ 0 & x \in \mathbf{R} \setminus [0,\pi] \end{cases}$$

   (a) Rozwiń f w szereg Fouriera w $(-\pi,\pi)$ i zbadaj zbieżność otrzymanego szeregu.

   (b) Przedstaw f przy pomocy wzoru całkowego Fouriera.

4. Rozwiązać metodą operatorową równanie: $y'' + y = 0\,,\ y'(0) = y(0) = 1\,.$

28 stycznia 1999

Bibliografia

[1] G.M. Fichtenholtz, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN Warszawa.

[2] Zb. Furdzik i in., Nowoczesna matematyka dla inżynierów, Cz. I Algebra, Wyd. AGH 1993

[3] R. Leitner, Zarys matematyki wyższej t.I-III, PWN (wiele wydań)

[4] F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN (wiele wydań).

[5] M. Mączyński i in., Matematyka - podręcznik podstawowy dla WST, t.I-III, PWN Warszawa 1979.

[6] W. Żakowski i in., Matematyka t.I-IV, WN-T Warszawa (wiele wydań).