Optymalna aproksymacja rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z osobliwymi współczynnikami

Paweł Przybyłowicz

W referacie zaprezentowane zostaną wyniki ([4]), uzysykane we współpracy z Pawłem Morkiszem. Dotyczą one optymalnej aproksymacji rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \\ X(0) = \eta. \end{cases} \tag{1}$$

Zakładamy, że warunek początkowy η jest niezależny od procesu Wienera $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ oraz, że $\mathbb{E}|\alpha|^{\alpha} < +\infty$ dla wszystkich $\alpha \geq 1$. Dla funkcji $a : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmujemy, że dla wszystkich $y \in \mathbb{R}$, $a(\cdot, y) : [0, T] \to \mathbb{R}$ jest mierzalna oraz, że dla wszystkich $t \in [0, T]$, $a(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest co najwyżej liniowego wzrostu i spełnia warunek Lipschitza w $\mathbb{R}$. O współczynniku $b : [0, T] \to \mathbb{R}$ zakładamy, że spełnia on kawałkami warunek Höldera z wykładnikiem $\varrho \in (0, 1]$.

Wiadomo, że przy powyższych założeniach o a nie ma zbieżności w modelu błędu najgorszego przypadku, jeśli obliczamy wartości funkcji $a = a(t, y)$ ze względu na zmienną t tylko w punktach danych w sposób deterministyczny. W szczególności, w takim modelu błędu algorytm Eulera X^E nie zbiega do rzeczywistej wartości rozwiązania $X(T)$. Problem ten może być rozwiązany za pomocą algorytmów typu Monte Carlo. Zostanie podana konstrukcja zrandomizowanego algorytmu Eulera (ozn. X^{RE}), który oblicza wartości funkcji a w punktach wybranych losowo. Rozszerzamy tym samym podejście wykorzystane w pracy [2] dla aproksymacji równań różniczkowych zwyczajnych (1) z $b \equiv 0$, aby objąć także przypadek stochastycznych równań różniczkowych (1).

Dla algorytmu X^{RE} pokazujemy, że

$$\Big(\mathbb{E}|X(T) - X^{RE}(T)|^q\Big)^{1/q} = O(n^{-\min\{1/2,\varrho\}}), \; q \in [1, +\infty), \tag{2}$$

gdzie n jest liczbą punktów dyskretyzacji przedziału $[0, T]$. Korzystając z wyników zawartych w artykułach [1] and [3], pokazujemy, że w przypadku $q = 2$ ograniczenie (2) jest optymalne.

Na końcu zostanie zaprezentowany również przykład numeryczny, które potwierdza uzyskane wyniki teoretyczne.

Literatura

[1] N. S. Bakhvalov, On approximate calculation of integrals (in Russian), Vestnik MGV, Ser. Mat. Mekh. Aston. Fiz. Khim. **4** (1959), 3–18,

[2] A. Jentzen, A. Neuenkirch, A random Euler scheme for Carathéodory differential equations, J. Comp. and Appl. Math. **224** (2009), 346–359,

[3] P. Przybyłowicz, Adaptive Itô–Taylor algorithm can optimally approximate the Itô integrals of singular functions, J. Comp. and Appl. Math. **235** (2010), 203–217.

[4] P. Przybyłowicz, P. Morkisz, The Monte Carlo Euler algorithm for approximation of stochastic differential equations with time–irregular coefficients, extended abstract available at AGH, Faculty of Appl. Math. Research Report **10** (2011)