WOKÓŁ FUNKCJI ORTOGONALNIE ADDYTYWNYCH

Karol Baron (Uniwersytet Śląski)

Niech E będzie rzeczywistą i co najmniej dwuwymiarową przestrzenią unitarną.

Funkcję f przekształcającą przestrzeń E w grupę przemienną nazywamy ortogonalnie addytywną, jeżeli

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in E \text{ spełniających warunek } x \perp y.$$

Wiadomo, że każda ortogonalnie addytywna funkcja f określona na przestrzeni E ma postać

$$(*) \qquad f(x) = a(\|x\|^2) + b(x) \quad \text{dla } x \in E,$$

gdzie a oraz b są funkcjami addytywnymi wyznaczonymi jednoznacznie przez funkcję f. Tym samym mając daną przemienną grupę G mamy operator Λ, który każdej ortogonalnie addytywnej funkcji $f : E \to G$ przyporządkowuje parę (a, b) funkcji addytywnych spełniających (1), tj. $\Lambda f = (a, b)$, gdzie $a : \mathbb{R} \to G$, $b : E \to G$ są funkcjami addytywnymi i zachodzi $(*)$.

Przyjmując oznaczenia:

$$\text{Hom}_\perp(E, G) = \{f : E \to G \mid f \text{ jest funkcją ortogonalnie addytywną}\},$$

$$\text{Hom}(S, G) = \{f : S \to G \mid f \text{ jest funkcją addytywną}\}$$

dla $S \in \{\mathbb{R}, E\}$ widzimy, że operator $\Lambda : \text{Hom}_\perp(E, G) \to \text{Hom}(\mathbb{R}, G) \times \text{Hom}(E, G)$ jest addytywną bijekcją.

Załóżmy, że G jest przemienną grupą topologiczną. Jeżeli $S \in \{\mathbb{R}, E\}$, a grupy $\text{Hom}_\perp(E, G)$ oraz $\text{Hom}(S, G)$ wyposażone są w topologię Tichonowa, to:

1. Isomorphism $\Lambda : \mathrm{Hom}_\perp(E, G) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G) \times \mathrm{Hom}(E, G)$ jest homeomorfizmem.
2. Jeżeli G jest grupą Hausdorffa, a $\text{Hom}(\mathbb{R}, G) \neq \{0\}$, to zbiór $\text{Hom}(E, G)$ jest domknięty i nigdziegęsty w $\mathrm{Hom}_\perp(E, G)$.

W przypadku, gdy V jest przestrzenią liniowo-topologiczną Hausdorffa mamy kolejne trzy twierdzenia:

3. Zbiór $\{f \in \text{Hom}_\perp(E, V) : \ f \text{ jest funkcją różnowartościową i } f(E) = V\}$ jest nigdziegęsty w $\mathrm{Hom}_\perp(E, V)$.
4. Jeżeli $\text{card}E \leq \text{card}V$, to zbiór $\{f \in \text{Hom}_\perp(E, V) : \ f \text{ jest funkcją różnowartościową}\}$ jest gęsty w $\mathrm{Hom}_\perp(E, V)$.
5. Jeżeli $\text{card}V \leq \text{card}E$, to zbiór $\{f \in \text{Hom}_\perp(E, V) : \ f(E) = V\}$ jest gęsty w $\mathrm{Hom}_\perp(E, V)$.

LITERATURA

[1] K. Baron, *Orthogonally additive bijections are additive*, Aequationes Mathematicae **89** (2015), 297-299.

[2] K. Baron, *On the continuous dependence of solutions to orthogonal additivity problem on given functions*, Annales Mathematicae Silesianae **29** (2015), 19-23.

[3] K. Baron, *On orthogonally additive injections and surjections*, Annales Societatis Mathematicae Polonae. Series I: Commentationes Mathematicae (w druku).

[4] K. Baron, J. Rätz, *On orthogonally additive mappings on inner product spaces*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics **43** (1995), 187-189.