ALGEBRA - Zestaw 8: Macierze odwzorowań liniowych

Zad 1) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x-y, y-z, z-x)$, $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, gdzie $u_1 = v_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = v_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = v_3 = (1, 1, 1)$ i B - baza standardowa (kanoniczna) w $\mathbb{R}^3$.
a) Wyznacz macierz odwzorowania f w bazach standardowych;
b) Wykorzystując tę macierz, znajdź obraz wektora $v = (0, -1, -2)$;
c) Wyznacz $M_f(B_1, B_2)$;
d) Wyznacz obraz wektora v wykorzystując nową macierz;
e) Wyznacz jeszcze raz $M_f(B_1, B_2)$ wykorzystując macierze przejścia.

Zad 2) Powtórz powyższe podpunkty a)-e) dla $L : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2$, $(Lp)(x) = x^2p'(x)$, gdzie B_1, B_2 - bazy standardowe $((1, \ldots, x^k))$, $B_1' = (p_1, p_2)$, $B_2' = (q_1, q_2, q_3)$, $p_1 = 2x+3$, $p_2 = 3x-4$, $q_1 = x^2+x$, $q_2 = x+1$, $q_3 \equiv 1$ oraz $v \equiv 17$.

Zad 3) Znajdź z definicji macierz odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3$: $(Lp)(x) = 3xp(-x)$ w bazach
B_1: $p_1 = x^2 + 2x$, $p_2 = 3x - 1$, $p_3 = x - 5$;
B_2: $q_1 = x^3 + x$, $q_2 = x^3 - x$, $q_3 = x^2 + 1$, $q_4 = x^2 - 1$.
Następnie, wykorzystując macierze przejścia, znajdź macierz tego odwzorowania w bazach standardowych $((1, \ldots, x^k))$. Podaj wymiar jądra tego odwzorowania badając rząd macierzy $M_f(B_1, B_2)$.

Zad 4) Wiedząc, że macierz endomorfizmu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (1, 1))$, $B_2 = (l_1, l_2) = ((1, 1), (0, -1))$, postać $M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, sprawdź, czy f jest odwzorowaniem odwracalnym. Jeżeli tak, to wyznacz wzór na f^{-1}.

Zad 5) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech $B = (e_1, e_2, e_3)$ będzie jej bazą. Udowodnij, że $B' = (e_1', e_2', e_3')$, gdzie $\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_2' &= e_1 + e_2, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3, \end{aligned}$ jest bazą przestrzeni V, wyznacz $P = P_{B \to B'}$ oraz współrzędne wektora $x = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ w bazie B'.

Zad 6) P jest macierzą przejścia od pewnej bazy B_1 do danej bazy $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Wyznacz wektory bazy B_1;
b) Wektor v ma w bazie B_1 współrzędne $[-2, 4, 2]^T$. Znajdź współczynniki wektora v w bazie B_2 (Wykorzystaj P!).

Zad 7) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ macierzą tego odwzorowania w bazach $B_1 = (u_1, u_2)$ i $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$.
a)Wykorzystując macierze przejscia, znajdz macierz A' odwzorowania f w bazach $B_1' = (3u_1 - 2u_2, -u_1 + u_2)$ i $B_2' = (-v_2, v_1 + v_3, -v_1 - 2v_3)$.
b) Dwoma sposobami (korzystając z macierzy A i A') znajdź $f(w)$ dla wektora $w = 2u_1 - u_2$.

Zad 8) Niech $A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : U \to V$, a $C = M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierzą odwzorowania $g : V \to U$. Znajdź $M_{f \circ g}(B_2, B_2)$, jeżeli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2)$, $B_2 = (v_1, v_2, v_3)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3$, $w_2 = -v_1$, $w_3 = -v_2 - v_3$.
b) Wyznacz Ker$g$.