

Wydział Energetyki i Paliw AGH, Technologia Chemiczna
Zadania z MATEMATYKI
ZESTAW 11

Macierze, wyznaczniki, macierze odwrotne,
układy równań liniowych

1. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $(A + 2B)C$.

2. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

$$A = [2], \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1+2i & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

3. Wyznaczyć macierze odwrotne, o ile istnieją, do macierzy:

$$A = [3], \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Rozwiązać układy równań liniowych:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases},$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y - z + u = 1 \\ y + 3z - 3u = 1 \\ x + y + z - u = 1 \end{cases}, \quad \text{e) } \begin{cases} x + 2y - z - u = 1 \\ x + y + z + 3u = 2 \\ 3x + 5y - z + u = 3 \end{cases}, \quad \text{f) } \begin{cases} x + y - 3z = -1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases},$$

$$\text{g) } \begin{cases} 4x - 6y + 2z + 3t = 2 \\ 2x - 3y + 5z + 75t = 1 \\ 2x - 3y - 11z - 15t = 1 \end{cases}, \quad \text{h) } \begin{cases} x - u + v = 0 \\ -x + 2y + v = 1 \\ y + z + 3u - v = 2 \\ 2x - 2z + 3u + w = -1 \end{cases}.$$

5. Rozwiązać układy równań liniowych, w zależności od parametru $a \in \mathbf{R}$:

$$\text{a) } \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} a^2x + 3y + az = 1 \\ -2x + y = 2 \\ 3ax + ay + az = 0 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} a^2x - 2y + 3az = 0 \\ 3x + y + az = -1 \\ ax + az = 3 \end{cases}.$$

6. Rozwiązać równanie macierzowe $AX = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

7. Rozwiązać równanie macierzowe $XA = B$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T.$$

8*. Wyznaczyć wszystkie macierze zespolone X spełniające równanie

$$X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$