

Homomorfizmy itp.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}|6, +)$.

Zadanie 2. Niech dane będą grupy $(\mathbb{Z}, +)$ i $(\mathbb{Z}, \oplus)$, gdzie $a \oplus b = a + b + 5$ dla $a, b \in \mathbb{Z}$. Niech dane będzie odwzorowanie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takie, że $f(x) = x - 5$. Sprawdź, czy f jest izomorfizmem grupy $(\mathbb{Z}, +)$ na $(\mathbb{Z}, \oplus)$.

Zadanie 3. Niech dane będzie odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ takie, że $\phi((x, y, z)) = (4x + y + z, 7x + 2y - 3z)$. Sprawdź, czy ϕ jest homomorfizmem grupy $(\mathbb{R}^3, +)$ na $(\mathbb{R}^2, +)$. Czy jest to izomorfizm?

Zadanie 4. Udowodnij, że ciała $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ i $(\mathbb{Q}[\sqrt{5}], +, \cdot)$ nie są izomorficzne.

Oznaczenie: $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] := \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{n}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Zadanie 5. Niech dana będzie struktura algebraiczna $(C_{[0,1]}, +, \cdot)$, gdzie $C_{[0,1]}$ oznacza zbiór funkcji ciągłych określonych na przedziale $[0, 1]$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Ponadto działania zdefiniowane są następująco: dla każdych $f, g \in C_{[0,1]}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{dla każdego } x \in [0, 1]$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{dla każdego } x \in [0, 1].$$

Udowodnij, że

a) Podana struktura jest pierścieniem. Czy jest ciałem?

b) Pierścienie $(C_{[0,1]}, +, \cdot)$ i $(C_{[3,4]}, +, \cdot)$ są izomorficzne.

Zadanie 5. Niech $(A, +, \cdot)$ będzie pierścieniem i niech działania $\oplus$ i $\otimes$ w zbiorze $A \times \mathbb{Z}$ będą określone w następujący sposób:

$$(a, n) \oplus (b, m) := (a + b, n + m)$$

$$(a, n) \otimes (b, m) := (ab + am + nb, mn).$$

Wykazać, że $(A \times \mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ jest pierścieniem z jedyneką. Pokazać, że jest to pierścień przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień A jest przemienny.