

Procesy stochastyczne 2013 - Zestaw I

Zadanie 1. Pokazać, że jeżeli $\mathcal{F}$ jest σ -ciałem zbiorów, to dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$

a) $A \cap B \in \mathcal{F}$,

b) $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Zadanie 2. (Nierówność Harrisa) Niech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami niemalejącymi. Zakładając, że odpowiednie wartości oczekiwane są skończone, udowodnić, że

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geq \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(X)).$$

Wsk. Udowodnić najpierw, że dla niemalejących funkcji mamy $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Zmienne losowe X, Y mają jednakowy rozkład. Przy jakim dodatkowym założeniu o X i Y

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right).$$

Obliczyć wtedy $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$.

Zadanie 4. Rzucamy dwa razy symetryczną kostką do gry. Jaka jest warunkowa wartość oczekiwana sumy wyrzuconych oczek pod warunkiem, że pierwsza wypadła jedynka?

Zadanie 5. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem, że X jest parzyste.

Zadanie 6a. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|X > Y)$.

Zadanie 6b. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|X > t)$ dla ustalonego $t > 0$.

Zadanie 7a. Rzucamy trzema monetami o nominałach 5, 10 i 25 centów. Jeżeli wypadła reszka to możemy zatrzymać monetę i jej wartość jest doliczana do naszej wygranej. Niech X oznacza wygraną po trzech rzutach, a Y będzie liczbą wyrzuconych orłów. Znajdź $\sigma(Y)$, $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\sigma(\mathbb{E}(X|Y))$. Porównaj otrzymane σ -ciała.

Zadanie 7b. Z worka zawierającego 4 kule o nr odpowiednio 1,2,3,4 losujemy dwie. Jeżeli przynajmniej jedna kula ma numer większy niż dwa

wygrywamy 1 w przeciwnym razie przegrywamy 1. Niech X będzie wygraną/przegraną, a Y pierwszą wylosowaną kulą. Znajdź $\sigma(Y)$, $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\sigma(\mathbb{E}(X|Y))$. Porównaj otrzymane σ -ciała.

Zadanie 8. Udowodnić, że dla nieujemnej i całkowalnej zmiennej losowej X zachodzi:

- $\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t) dt$
- dla $r > 0$, $\mathbb{E}X^r = \int_0^\infty r t^{r-1} \mathbb{P}(X > t) dt$

Zadanie 9. Dana niech będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dla $A, B \in \mathcal{F}$ obliczyć $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A | \mathbb{I}_B)$, gdzie $\mathbb{I}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A .

Zadanie 10. Udowodnić, że jeżeli $\mathbb{P}(A) > 0$, to

$$\mathbb{E}(X \mathbb{I}_B | A) = E(X | A \cap B) \mathbb{P}(B | A)$$

Zadanie 11. Niech X i Y będą dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p$, gdzie $p \in [0, 1]$. Niech $Z = \mathbb{I}_{X+Y=0}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Z)$ i $\mathbb{E}(Y|Z)$. Czy zmienne losowe $\mathbb{E}(X|Z)$, $\mathbb{E}(Y|Z)$ są niezależne?

Zadanie 12. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathbb{P}$ - miara Lebesgue'a na $[0, 1]$. Obliczyć $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli:

- $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F} = \sigma([0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, 1])$
- $f(x) = -x$, $\mathcal{F} = \sigma([0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1])$
- $f(x) = x^2$, $\mathcal{F} = \sigma([0, \frac{1}{4}], [\frac{3}{4}, 1])$

Zadanie 13a. Niech $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = dxdy$ - miara Lebesgue'a. Niech $X(x, y) = x$ i $Y(x, y) = y$. Policzyć $\mathbb{E}[f(X, Y)|\mathcal{G}]$ jeżeli:

- $f(x, y) = x$, $\mathcal{F} = \sigma(Y)$
- $f(x, y) = x^2 y$, $\mathcal{F} = \sigma(Y)$

Zadanie 14. Na $\Omega = [0, 1]$ rozważmy σ -ciało zbiorów borelowskich i miarę Lebesgue'a. Znaleźć $\mathbb{E}[X|Y]$, gdy

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/3), \\ 2 & x \in [1/3, 2/3), \\ 0 & x \in [2/3, 1]. \end{cases} \quad (1)$$

oraz

a) $X(x) = x^2 + 1$

b)

$$X(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [0, 1/2) \\ x^2 & x \in [1/2, 1) \end{cases} \quad (2)$$

Zadanie 15. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = dx$. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$, gdy $X(x) = x^2$ oraz

$$Y(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0, 1/3), \\ x^2 & x \in [1/3, 1]. \end{cases} \quad (3)$$

Zadanie 16. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = dx$. Znaleźć $\mathbb{E}(X|Y)$, gdy $X(x) = 2x^2$ oraz

$$Y(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 1/2), \\ 2x-1 & x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

Zadanie 17. Niech $\Omega = [0, 1]$ i niech $\mathbb{P} = dx$. Znaleźć $\mathbb{E}(\xi|\eta)$, gdy $\xi(x) = x^2$ i $\eta(x) = 1 - |2x - 1|$. Wskazówka: η jest symetryczna względem $1/2$.

Zadanie 18. Niech $\Omega = [0, \pi]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, \pi])$ i niech $\mathbb{P} = \alpha dx$.

- Wyznaczyć α tak, aby $\mathbb{P}$ było miarą probabilistyczną na Ω .
- Niech $\eta(x) = \sin(x)$, $\xi(x) = \cos(x)$ dla $x \in \Omega$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(\xi|\eta)(x)$. Wynik przedstawić w jak najprostszej postaci.

Zadanie 19. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ i niech $\mathbb{P} = dx$. Niech $X(x) = 2x - 1 + |2x - 1|$, $Y(x) = 1 - |2x - 1|$ dla $x \in \Omega$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

Zadanie 20. Niech (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$g(x, y) = \begin{cases} cx(y-x)e^{-y} & 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (5)$$

- Znaleźć parametr c ,
- Pokazać, że dla $0 \leq x \leq y < \infty$

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= 6x(y-x)y^{-3} \\ f_{Y|X}(x|y) &= (y-x)e^{x-y} \end{aligned}$$

- Policzyc $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}[Y|X]$.

Zadanie 21. Niech (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$g(x, y) = \begin{cases} K(y^2 - x^2)e^{-y} & 0 < y < \infty \quad -y < x < y \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (6)$$

- Znaleźć parametr K ,
- Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$,
- Znaleźć $a \in \mathbb{R}$ takie, że $\mathbb{E}(Y|X = a) = 2$.

Zadanie 22. Niech (X, Y) ma rozkład łączny o gęstości

$$g(x, y) = \begin{cases} K(2x + y) & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (7)$$

- Znaleźć parametr K ,
- Policzyc $\mathbb{E}[X|Y]$ i $\mathbb{E}[Y|X]$.

Zadanie 23. Załóżmy, że $X_0, X_1, \dots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0, 1]$. Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}[\max\{X_0, \dots, X_n\} | X_0]$$

Zadanie 24. Sąsiadka upiekła placek dla swoich dwóch synów. Jednak zjedzenie więcej niż połowy ciasta powoduje niestrawność u każdego z nich. Podczas, gdy sąsiadka wyszła na zakupy starszy brat zjadł kawałek ciasta. Później młodszy z braci poczęstował się z tego co zostawił brat. Zakładamy, że ilość zjedzonego ciasta przez każdego z braci jest losowa i ma rozkład jednostajny (na tym co aktualnie jest dostępne). Jaki jest oczekiwany rozmiar pozostawionego ciasta, jeżeli wiadomo, że żaden z braci nie dostał niestrawności?

Zadanie 25. Mamy n osiedli położonych wzdłuż drogi w odległości 1km od siebie. Osiedla obsługuje jedna karetka pogotowia. Każde kolejne zgłoszenie z jednakowym prawdopodobieństwem pochodzi z dowolnego punktu i zostaje natychmiast przekazane do karetki oczekującej na osiedlu w której znajdował się ostatni chory. Jaka jest średnia odległość przejeżdżana przez karetkę w czasie jednego kursu?

Zadanie 26. Kupujemy Y losów na loterii, gdzie Y jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 10$. Każdy los wygrywa z prawdopodobieństwem p niezależnie od pozostałych. Znajdź warunkową wartość

oczekiwaną liczbę losów wygrywających X pod warunkiem Y . Oblicz wartość oczekiwaną X .

Zadanie 27. Liczba błędów popełnianych przez maszynistkę na każdą stronę ma rozkład Poissona z parametrem λ niezależnie od pozostałych stron. Trzy stronicowy artykuł jest przygotowywany przez jedną z 4 maszynistek, dla których λ wynosi odpowiednio 1, 2, 3, 4. Maszynistka jest wybierana losowo z jednakowym prawdopodobieństwem. Jaka jest wartość oczekiwana błędów w całym artykule.

Zadanie 28. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_5$ są niezależne i mają jednakowy rozkład wykładniczy z parametrem 1. Niech Y oznacza zmienną losową równą 1, gdy $X_1 \geq 3$ i równą 0 w przeciwnym przypadku. Niech $T = X_1 + \dots + X_5$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|T = 5)$.

Zadanie 29. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób Bernoulliego przeprowadzanych aż do momentu uzyskania 2 sukcesów i porażki.

Zadanie 30. Gdy $EX^2 < \infty$, to możemy zdefiniować warunkową wariancję

$$\text{Var}(X|\mathcal{F}) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}\right).$$

Wykazać, że

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|\mathcal{F})) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})).$$

Zadanie 31. Wykorzystując fakt, że $\text{Var}(X|\mathcal{F}) \geq 0$ udowodnij, że

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}).$$

Zadanie 32. Niech X, Y będą całkowalnymi z kwadratem, symetrycznymi niezależnymi zmiennymi losowymi. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}((X + Y)^2|X^2 + Y^2) = X^2 + Y^2.$$

Zadanie 33. Niech $(X_k)_{k=1}^n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych o tym samym rozkładzie. Pokazać, że

$$\mathbb{E}(X_1|X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

Zadanie 34. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych, symetrycznych i całkowalnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Niech

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

Dla dowolnych $k, n \in \mathbb{N}$ wyznaczyć

$$\mathbb{E}(S_k \mid S_n). \quad (8)$$

Zadanie 35. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w $\mathbb{R}$. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $\mathbb{E}|f(X, Y)| < \infty$. Pokazać, że

$$\mathbb{E}(f(X, Y)|Y) = \mathbb{E}f(X, y)|_{y=Y} = \int_{\mathbb{R}} f(x, Y) \mu_X(dx). \quad (9)$$

Zadanie 36. Niech P i Q będą miarami probabilistycznymi na $(\Omega, \mathcal{F})$ dla których istnieje gęstość $\frac{dQ}{dP} = Z > 0$, $\mathbb{P}$ -p.n.. Niech $\mathcal{G}$ będzie σ podciałem $\mathcal{F}$ i niech X będzie zmienną losową Q całkowalną. Pokazać, że

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{G}) = \frac{\mathbb{E}_P(XZ|\mathcal{G})}{\mathbb{E}_P(Z|\mathcal{G})}. \quad (10)$$

Zadanie 37. Udowodnić następującą postać twierdzenia Bayesa:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\int_B \mathbb{P}(A|\mathcal{F}) d\mathbb{P}}{\int_{\Omega} \mathbb{P}(A|\mathcal{F}) d\mathbb{P}} \quad \text{dla } B \in \mathcal{F}. \quad (11)$$