

Procesy stochastyczne 2013 - Zestaw III

Zadanie 1. Niech (ξ_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Niech

$$X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) $\mathbb{E}\xi_i = 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem,
- b) $\mathbb{E}\xi_i \geq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest submartyngałem,
- c) $\mathbb{E}\xi_i \leq 0$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, to $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest supermartyngałem,

Zadanie 2. Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna z filtracją $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ oraz całkowalna zmienna losowa X . Pokazać, że proces $X_t = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_t)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t$.

Zadanie 3. Pokaż, że jeżeli ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ to jest również martyngałem względem filtracji $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Zadanie 4. Niech Z_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i zerowej średniej. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, \dots, Z_n)$ i

$$\begin{aligned} X_0 &= Z_0, \\ X_n &= \sum_{k=1}^n Z_{k-1} Z_k. \end{aligned}$$

Niech $\mathbb{N}_j = \{j, j+1, \dots\}$. Podaj najmniejsze takie j , dla którego $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest martyngałem wzg. filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1, \dots, Z_n)$, $n \in \mathbb{N}_j$.

Zadanie 5. Załóżmy, że $\xi_1, \xi_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie takim, że $\mathbb{P}(\xi_i = \lambda) = \mathbb{P}(\xi_i = 0) = \frac{1}{2}$. Niech $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Wykaż, że dla dowolnego $\lambda > 0$ ciąg $\{\exp(n\lambda^2/2 - \lambda S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest nadmartyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg ξ_n .

Zadanie 6. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, całkowalnych z kwadratem i o średniej zero. Niech $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Pokazać, że proces

$$Y_n = S_n^2 - \text{Var}(S_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces ξ_n .

Zadanie 7. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej. Niech $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Pokazać, że proces

$$Y_n = S_n - n\mathbb{E}\xi_1, \quad n \in \mathbb{N},$$

jest martyngałem względem filtracji generowanej przez proces ξ_n .

Zadanie 8. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie. Niech $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(\xi_1 = -1) = q := 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ oraz $Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{i=1}^n \xi_i}$. Wykazać, że ciąg $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

Zadanie 9. Niech $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie jednostajnym na odcinku $[-1, 1]$. Niech $S_0 = 0, S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ dla $n \geq 1$ oraz

$$M_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n S_{k-1}^2 Y_k, \quad n \geq 1, \quad M_0^{(1)} = 0, \quad (1)$$

$$M_n^{(2)} = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad M_0^{(2)} = 0. \quad (2)$$

Czy ciągi zmiennych losowych $(M_n^{(2)})$ i $(M_n^{(1)})$ są martyngałami względem filtracji generowanej przez ciąg Y_n ?

Zadanie 10. Niech $S_n = X_1 + \dots + X_n$ oraz $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, gdzie $X_1, X_2, \dots$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Znajdź ciągi a_n, b_n dla których $S_n^2 + a_n S_n + b_n$ jest martyngałem względem $\mathcal{F}_n$.

Zadanie 11. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\mathbb{P} = dx$. Wyznacz martyngał $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$, gdzie $Y(\omega) = \omega^2$, a filtracja $\mathcal{F}$ generowana jest przez proces

$$X_n(\omega) = 2\omega \mathbb{I}_{[0, 1 - \frac{1}{n})}(\omega).$$

Zadanie 12. Niech M będzie martyngałem względem filtracji generowanej przez proces błądzenia przypadkowego Z_n . Załóżmy dla ułatwienia, że $M(0) = 0$. Pokaż, że istnieje prognozowalny proces H taki, że $M(n) = \sum_{i=1}^n H(i)[Z(i) - Z(i-1)]$

Zadanie 13. Niech $X(n)$ będzie martyngałem (sub-, super-martyngałem). Dla ustalonego m , rozważmy proces $X'(k) = X(m+k) - X(m)$ dla $k \geq 0$. Pokaż, że X' jest martyngałem (sub-, super-martyngałem) względem filtracji $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_{m+k}$

Zadanie 14. Niech $\eta_1, \eta_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych. Niech $\mathcal{F}_n$ będzie filtracją taką, że $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ i $\mathcal{F}_n = \sigma\{\eta_k : 1 \leq k \leq n\}$. Niech $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $0 \leq \alpha_i \leq M$ dla każdego i , gdzie $M > 0$ jest stałą niezależną od i . Ponadto zakładamy, że α_n jest $\mathcal{F}_{n-1}$ mierzalne dla każdego n (czyli jest strategią). Zdefiniujmy procesy

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n \quad (3)$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_n = \alpha_1 \eta_1 + \cdots + \alpha_n \eta_n \quad (4)$$

Udowodnij, że jeżeli ϕ jest (sub, super) martyngałem, to ciąg ξ również jest (sub, super) martyngałem.

Zadanie 15. Dana niech będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i ciąg zdarzeń niezależnych $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $A_n \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A_n) = p_n \in (0, 1)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Okrełmy filtrację $\mathcal{F}_n = \sigma(\{\mathbb{I}_{A_1}, \dots, \mathbb{I}_{A_n}\})$ oraz proces $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{A_i}$.

- Oblicz $\mathbb{E}S_n$
- Czy proces $Y_n = S_n - \sum_{i=1}^n p_i$ jest martyngałem względem danej filtracji?