

## Zestaw II 2015 model jednokrokowy

**Zadanie 1.** Znaleźć portfel replikujący opcję azjatycką na aktywo  $S$  o wypłacie

$$H(1) = \max \left\{ \frac{S(1) + S(0)}{2} - 100; 0 \right\},$$

jeżeli wiadomo, że  $U = 0.15$ ,  $D = -0.05$ ,  $R = 0.01$ ,  $p = 0.4$ ,  $S(0) = 100$ .

Dla dowolnego instrumentu pochodnego  $H$  o wypłacie  $H(1) = h(S(1))$  definiujemy stopę zwrotu jako

$$K_H = \frac{H(1) - H(0)}{H(0)}.$$

Oznaczenia: dla dowolnej zmiennej losowej  $Z$  przyjmujemy oznaczenia:  
 $\mu_Z = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z)$ ,  $\sigma_Z^2 = \text{Var}_{\mathbb{P}}(Z)$ .

**Zadanie 2.** Oblicz  $\mu_{K_S}$ ,  $\mu_{K_H}$ ,  $\sigma_{K_S}^2$ ,  $\sigma_{K_H}^2$  oraz  $\text{Cov}(K_S, K_H)$ .

**Zadanie 3.** Pokazać, że  $\sigma_{K_H} = \beta_H \sigma_{K_S}$  oraz

$$\mu_{K_H} - R = \beta_H(\mu_{K_S} - R),$$

gdzie

$$\beta_H = \frac{\text{Cov}(K_S, K_H)}{\sigma_{K_S}^2}$$

W dalszej części założymy, że na rynku dostępne są dwa aktywa ryzykowne  $S_1$  i  $S_2$ . Przez  $K_1$  i  $K_2$  oznaczamy odpowiednio stopy zwrotu dla aktywa pierwszego i drugiego.

**Zadanie 4.** Pokaż, że istnieje  $a \neq 0$  i  $b \in \mathbb{R}$  takie, że  $K_1 = aK_2 + b$

**Zadanie 5.** Znajdź portfel  $(x, y)$  replikujący drugie aktywo tzn. taki, że  $S_2(1) = xS_1(1) + yA(1)$ .

**Zadanie 6.** Znajdź strategię arbitrażową, jeżeli  $R = 0.1$  oraz

- $S_1(0) = 100$ ,  $U_1 = 0.2$ ,  $D_1 = -0.1$
- $S_2(0) = 100$ ,  $U_2 = 0.15$ ,  $D_2 = -0.05$ .

**Zadanie 7.** Niech  $Q_1$  i  $Q_2$  oznaczają odpowiednio miarę wolną od ryzyka wyznaczoną przez  $S_1$  i  $S_2$ . Pokazać, że brak arbitrażu jest równoważny równości  $Q_1 = Q_2$ .