

DMFM

Zestaw III 2015

Rozważmy model jednokrokowy trójmianowy w którym stopa zwrotu z inwestycji w aktywo ryzykowne może przyjmować 3 wartości: D, M, U odpowiednio z prawdopodobieństwem $p_1, p_2, p_3 = 1 - p_1 - p_2$, gdzie $p_i \in (0, 1)$ dla $i = 1, 2, 3$.

Zadanie 1. Przy jakich założeniach rynek jest wolny od arbitrażu?

- a) $U > 0, D < 0$
- b) $M > R, D < R$
- c) $D > R, U = M < R$
- d) $D < M < U$.

Zadanie 2. Załóżmy, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu. Pokaż, że istnieją prawdopodobieństwa martyngałowe $Q = (q_1, q_2, q_3)$ równoważne prawdopodobieństwom rzeczywistym. Czyli takie, że

$$q_i \in (0, 1) \quad \text{dla } i = 1, 2, 3 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^3 q_i = 1,$$

$$\mathbb{E}_Q \left(\frac{S(1)}{1+R} \right) = S(0).$$

Czy wyznaczone są jednoznacznie?

Zadanie 3. Niech $R = 0, S(0) = 220, S^U = 230, S^M = 210, S^D = 190$. Znaleźć ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych.

Zadanie 4. Niech $R = 10\%, S(0) = 100, S^U = 115, S^M = 100, S^D = 95$. Pokaż, że instrument pochodny może być replikowalny tylko i tylko wtedy, gdy

$$3H^D + H^U - 4H^M = 0.$$

Zadanie 5. Znaleźć ogólną zależność pomiędzy wypłatami instrumentu pochodnego H^U, H^M, H^D tak, aby H był replikowalny w modelu z dowolnymi $D, M, U, S(0)$ (oczywiście takimi, że założenia braku arbitrażu są spełnione).

Zadanie 6. Znaleźć cenę opcji koszykowej (basket option) o wypłacie

$$H(1) = \max\{S_1(1) + S_2(1) - X, 0\},$$

gdzie $S_1(0) = 100$, $S_2(0) = 50$, $X = 150$, a stopy zwrotu dla akcji pierwszej wynoszą 20%, 5%, -20%, natomiast dla akcji drugiej -10%, 8%, 2%. Stopa wolna od ryzyka $R = 5\%$. Cenę znajdź metodą replikacji oraz za pomocą prawdopodobieństwa martyngałowego.

Zadanie 7. Niech $S(0) = 30$, $U = 20\%$, $M = 10\%$, $D = -10\%$, $R = 5\%$. Rozważmy opcję call o wypłacie $C(1) = (S(1) - 32)_+$. Znaleźć portfele sub- i super- replikujące. Znaleźć cenę sub i super opcji. Sprawdzić czy przy cenie $C(0) = 2$ możliwy jest arbitraż.

Zadanie 8. Dla danych z poprzedniego zadania wyznaczyć przedział

$$I_{arb} := \left\{ \mathbb{E}_Q \left(\frac{C(1)}{1+R} \right) : \mathbb{E}_Q(K) = R \right\}$$

Zadanie 9. Rozważmy rynek z dwoma aktywami ryzykownymi takimi, że:

$$\begin{aligned} S_1(0) &= 85; S_1^U(1) = 80; S_1^M(1) = 70; S_1^D(1) = 90, \\ S_2(0) &= 220; S_2^U(1) = 230; S_2^M(1) = 210; S_2^D(1) = 190. \end{aligned}$$

Dodatkowo dostępny jest instrument wolny od ryzyka ze stopą zwrotu $R = 0$. Sprawdzić czy rynek jest wolny od arbitrażu (szukając prawdopodobieństw martyngałowych), jeżeli nie jest to pokazać przykład strategii arbitrażowej.