Procesy stochastyczne 2015 - Zestaw IV

Zadanie 1. Niech dany będzie ciąg zdarzeń niezależnych $A_1, A_2, \ldots$ oraz niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{A_i}$ oraz $\tau_k := \inf\{n : S_n = k\}$ dla $k \geq 1$. Załóżmy, że $a_n = \mathbb{E}(S_n) \to \infty$ gdy $n \to \infty$. Udowodnij, że $\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1$ dla każdego $k \geq 1$.

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia o zbieżności supermartyngałów wykazać następuyjąc twierdzenie:
Jeżeli $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich,że $\mathbb{E}(X_n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny prawie na pewno.

Zadanie 3. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem Bernoulliego, tzn. ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

- Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ jest zbieżny $\mathbb{P}$-p.n.?
- Zdefiniujmy $Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k}$. Wykaż, że istnieje granica $Z = \lim_{n \to \infty} Z_n$. Oblicz $\mathbb{E}(Z)$.

Zadanie 4. Niech $0 \leq t_1 < t_2$. Czy zmienne losowe W_{t_2} i $W_{t_2} - W_{t_1}$ są niezależne?

Zadanie 5.
Oblicz:

a) $\mathbb{P}(W_t < W_s)$,

b) $\mathbb{P}(0 < W_2 < W_3)$,

c) $\mathbb{E}(W_1 W_2^2)$,

d) $\mathbb{E}(W_2^2(W_3 - W_1))$.

Zadanie 6. (most Browna) Niech $\{W_t\}_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera. Definiujemy proces

$$X_t = W_t - tW_1, \quad t \in [0, 1].$$

Policz $Cov(X_t, X_s)$ dla $t, s \in [0, 1]$.

Zadanie 7. Niech $\{W_t\}_{t \geq 0}$ będzie procesem Wienera. Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera

- $Z_t = -W_t$,
- $X_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct}, \quad c > 0$
- $Y_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ i $Y_0 = 0$,
- $V_t = W_{T+t} - W_T$, $T > 0$.