

## DMFM

### Zestaw IV 2015- ogólne własności instrumentów pochodnych

Założmy, że  $S$  jest aktywem ryzykownym (nie wypłacającym dywidendy) a  $R$  stopą wolną od ryzyka. Przez  $X$  oznaczamy cenę realizacji opcji call/put (chyba, że w treści jest zoznaczone inaczej). Przez  $T$  oznaczamy termin realizacji opcji (lub termin wygaśnięcia opcji w przypadku opcji amerykańskiej). Natomiast przez  $C$  i  $P$  oznaczamy odpowiednio cenę opcji europejskiej put i call. Jeżeli dodatkowo pojawia się indeks  $A$  jest to opcja jest amerykańska.

**Zadanie 1.** Udowodnij następującą zależność pomiędzy ceną opcji put  $P(0)$  i call  $C(0)$  na aktywo  $S$ , jeżeli termin realizacji  $T$  i cena wykonania  $X$  dla obu opcji są takie same.

$$C(0) - P(0) = S(0) - \frac{X}{(1+R)^T}.$$

**Zadanie 2.** Niech  $C(S)$  oznacza cenę opcji call w chwili  $t = 0$  (jako funkcję ceny aktywa  $S$  w chwili  $t = 0$ ). Udowodnij, że

$$\max \left\{ 0, S - \frac{X}{(1+R)^T} \right\} \leq C(S) \leq S.$$

**Zadanie 3.** Udowodnij, że funkcja  $C(S)$  jest niemalejąca tj.

$$S' < S \Rightarrow C(S') \leq C(S).$$

Pokaż, że funkcja  $P(S)$  jest nierosnąca.

**Zadanie 4.** Pokaż, że

$$\begin{aligned} S' < S &\Rightarrow C(S) - C(S') \leq S - S' \\ S' < S &\Rightarrow P(S') - P(S) \leq S - S' \end{aligned}$$

**Zadanie 5.** Pokaż, że cena opcji call jako funkcja  $S$  jest wypukła tj.

$$C\left(\frac{S' + S''}{2}\right) \leq \frac{C(S') + C(S'')}{2}.$$

**Zadanie 6.** Udowodnij, że  $C(X)$  (cena opcji call jako funkcja ceny realizacji  $X$ ) jest nierosnąca. Natomiast cena opcji put  $P(X)$  jest niemalejąca.

**Zadanie 7.** Pokaż,

$$\begin{aligned}X' < X &\Rightarrow C(X') - C(X) \leq (1 + R)^{-T}(X - X') \\X' < X &\Rightarrow P(X) - P(X') \leq (1 + R)^{-T}(X - X')\end{aligned}$$

**Zadanie 8.** Udowodnić put-call parity dla opcji na aktywo wypacające dywidendę:

$$C(0) - P(0) = S(0) - \frac{X}{(1 + R)^T} - D, \quad (1)$$

gdzie  $D$  oznacza całkowitą wartość wypłaconych dywidend zdyskontowaną na chwilę obecną.

**Zadanie 9.** Udowodnij, że  $C_A(0) = C(0)$  oraz  $P_A(0) \geq P(0)$