

Procesy stochastyczne 2015 - Zestaw V

Zadanie 0:). Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna z $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ oraz miarą Lebesgue'a na $[0, 1]$. Niech X będzie procesem takim, że $X(0) = 0$ oraz

$$X(t, \omega) = \mathbb{I}_{[0, \frac{1}{t})}(\omega) \text{ dla } t > 0.$$

Znajdź filtrację $\mathcal{F}^X$ generowaną przez ten proces.

Niech Z będzie dowolną całkowalną zmienną losową na Ω . Znajdź martynał $M_t := \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}^X_t)$.

Czy proces $Y(t, \omega) = t\omega - \frac{1}{2}t$ jest martynałem względem filtracji $\mathcal{F}^X$?

Zadanie 1. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n}{n} = 0$ $\mathbb{P}$ -p.n..

Zadanie 2. Niech W_t będzie jednowymiarowym procesem Wienera. Czy proces $Y_t := W_{\lfloor t \rfloor}$ jest procesem Wienera? Oblicz $Cov(Y_s, Y_t)$ dla $0 \leq s < t$.

Zadanie 3. Niech dany będzie proces $X_t = \int_0^t W_u du$, gdzie W jest procesem Wienera. Znajdź rozkład X_t oraz $Cov(X_s, X_t)$ dla $0 \leq s \leq t$.

Zadanie 4. Udowodnij, że proces $M_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ jest martynałem względem filtracji generowanej przez proces Wienera W .

Zadanie 5. Niech W i $\tilde{W}$ będą dwoma niezależnymi procesami Wienera, niech $\mathcal{F}$ będzie filtracją generowaną przez te dwa procesy. Dla $-1 \leq \rho \leq 1$ definiujemy proces

$$X_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{W}_t.$$

Udowodnij, że proces X jest procesem Wienera względem filtracji $\mathcal{F}$ oraz, że $Cov(X_t, W_t) = \rho t$.

Zadanie 6. Niech W_t będzie procesem Wienera, $0 > a > b$, a $\tau = \inf\{t : W_t > a + bt\}$. Pokaż, że dla $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda T}) = e^{-a*(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}.$$

Wskazówka: Wykorzystaj zadanie 4 oraz Optional Sampling Theorem

Zadanie 7. Oblicz całkę

$$\int_0^5 f(t) dW_t,$$

gdzie $f(t) = k$ dla $k \leq t < k + 1$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeżeli f deterministyczna, to $\int_0^T f(t) dW_t \sim \mathcal{N}(0, \int_0^T f^2(t) dt)$.

Zadanie 9. Pokaż, że

$$\int_0^t s dW_s = tW_t - \int_0^t W_s ds.$$