

DMFM

Zestaw 5 2015-Modele N-krokowe

Zadanie 1. Uzasadnij, że w modelu dwumianowym N-krokovym brak arbitrażu jest równoważny nierówności $D < R < U$.

Zadanie 2. 1. Dany jest dwumianowy, dwukrokovy model cen akcji, w którym: $S(0) = 50, U = 0.2, D = -0.1, R = 0.1, p = 0.4$ oraz $A(0) = 1$. Ponadto rozważmy opcję azjatycką o wypłacie $H(2) = \max\{\frac{S(1)+S(2)}{2} - 55; 0\}$.

1. Narysuj drzewko cen akcji.
2. Znajdź strategię replikującą opcję H.
3. Rozszerzmy rynek dopuszczając do obrotu rozważany instrument H o cenie $H(0) = 3$. Sprawdź, czy przy takiej cenie rynek jest wolny od arbitrażu, jeżeli nie to podaj przykładową strategię arbitrażową.
4. Wyciągnij wnioski dotyczące relacji pomiędzy wartością portfela replikującego, a ceną instrumentu pochodnego.

Zadanie 3. Pokaż, że zdyskontowana wartość portfela samofinansującego się jest martyngałem względem miary martyngałowej.

Zadanie 4. W modelu 2 mianowym N-krokovym z parametrami: $S(0) = 100, U = 0.1, D = -0.1, p = 0.4, R = 0.05$ wycen opcje:

- europejską opcję put o terminie realizacji $N = 4$ i wypłacie $\max\{100 - S(4); 0\}$.
- europejską opcję o terminie realizacji $N = 4$ i wypłacie $\mathbb{I}_{\{S(4) > 100\}} + 2\mathbb{I}_{\{S(4) > 150\}}$, gdzie $\mathbb{I}_A$ ozn. funkcje charakterystyczna zb. A .

Zadanie 5. Znajdź proces cen opcji europejskiej o wypłacie $|S(3) - 150|$ w modelu dwumianowym Coxa-Rossa-Rubinsteina z parametrami $S(0) = 100, U = 0.5, D = 0$ and $R = 0.2$.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli $(x(n); y(n))$ jest strategią samofinansującą się, to

$$\tilde{V}(n) = V(0) + \sum_{i=1}^n x(i) \Delta \tilde{S}(i),$$

gdzie $\Delta \tilde{S}(n) = \tilde{S}(n) - \tilde{S}(n-1)$.

Zadanie 7. Udowodnij, że przy założeniu braku arbitrażu, jeżeli dla strategii (x, y) i $(\tilde{x}, \tilde{y})$ mamy $V_{(x,y)}(0) = V_{(\tilde{x},\tilde{y})}(0)$ oraz $V_{(x,y)}(N) = V_{(\tilde{x},\tilde{y})}(N)$, to

$$V_{(x,y)}(n) = V_{(\tilde{x},\tilde{y})}(n) \text{ dla } n \in \{0, 1, \dots, N\}.$$