Wybrane Grupy

Twierdzenie I

Istnieją dokładnie dwie grupy rzędu 4 z dokładnością do izomorfizmu.
Są to Z_4 i grupa Kleina.

Z_4={0, 1, 2, 3}

$+_4$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Grupa Kleina

G={(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)}

$+_{2x2}$	**(0,0)**	**(0,1)**	**(1,0)**	**(1,1)**
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

Def
Inwolucja - element rzędu 2 czyli odwrotny sam do siebie.

Uwaga:
W grupie Kleina każdy element jest odwrotny sam do siebie.

Twierdzenie II

Istnieją dokładnie dwie grupy rzędu 6 z dokładnością do izomorfizmu.
Są to Z_6 i S_3.
Dowód:
Lemat: Każda grupa parzystego rzędu posiada element rzędu 2.
Dowód lematu:
$G=\{g_1, g_2, ..., g_{2n}\}$
$|G|=|\{(g, g^{-1}): g\neq g^{-1}\}|+|\{e, x_i\}|$
$|G|$ - parzyste, $|\{(g, g^{-1}): g\neq g^{-1}\}|$- parzyste, $x=x_i^{-1}$
$x_i\neq e$, $i=2k+1$, $k\in N$ ■
1° Przypadek, gdy G jest abelowa
$x^2=e \quad x\neq e$
rząd $x=2$ (powyższy lemat)
Zakładamy, że każdy element różny od neutralnego ma rząd 2
$y\neq e \quad y^2=e$
$y\neq x$

$\{e, x, y, xy\}$ sprzeczność z twierdzeniem Lagrange'a, zatem musi istnieć element innego rzędu niż 2 tzn. rzędu 3 lub rzędu 6.

$z \neq e$, $z \neq x$, $z^3=e$, $rz(z)=3$ G jest cykliczna $\Rightarrow$ G jest izomorficzna z Z_6

$(xz)^2=x^2z^2=ez^2=z^2 \neq e$

$(xz)^3=x^2xz^3=x \neq e$

$(xz)^6=(x^2)^3(z^3)^2=e$

$rz(xz)=6$, xy jest generatorem G $\Rightarrow$

G jest cykliczna $\Rightarrow$ G jest izomorficzna z Z_6

2º Przypadek, gdy G jest nieabelowa

krok 1.

G jest nieabelowa $\Rightarrow$ nie ma elementu rzędu 6 $\Rightarrow \exists$ elementy rzędu 1, 2, 3 $\Rightarrow \exists$ element rzędu 3

$x^2=e$, $y^2=e$ $(y=y^{-1})$

$(xy)^2=e$

$xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx \Rightarrow$ przemienność $\Rightarrow$ grupa abelowa czyli sprzeczność.

krok 2.

$x^2=e$ $x \neq e$

$y^3=e$ $y \neq e$

$$\left.\begin{array}{ll} H=\{e, x\} & 1 \\ yH=\{y, yx\} & 2 \\ y^2H=\{y^2, y^2x\} & 3 \end{array}\right\} \text{warstwy lewostronne}$$

$l_g: \{H, yH, y^2H\} \to \{H, yH, y^2H\}$

$l_g(cH)=gcH$ $c=1, y, y^2$

Warunek na homomorfizm

$(l_g \circ l_g')(cH)=g(g'cH)=gg'cH=(gg')cH=\underline{l}_{gg}'(cH)$

$g=y$

$l_y(H)=yH$

$l_y(yH)=y^2H$

$l_y(y^2H)=H$

$(123) \to (231)$ cykl długości 3

$g=x$ $H=\{e, x\}$

$l_x(H)=xH=\{e, x\}=H$ $y^2H=\{y^2, y^2x\}$

$l_x(yH)=xyH=\{xy, xyx\}=y^2H$ $yH=\{y, yx\}$

xy=y lub xy=y

xyx=yx xyx=y

$l_x(y^2H)=xy^2H=\underbrace{\{xy^2, xy^2x\}}=yH$

$xy=y^2$ lub $xy=y^2$

$xyx=y^2x$ $xyx=y^2$

$(123) \to (132)$

$\|$

$(1)(23)$ - cykl długości 2

Obraz l_g jest podgrupą S_3 zawierającą cykl długości 2 oraz cykl długości 3, czyli jest to cała grupa ■

Twierdzenie III

Jeżeli grupa G jest cykliczna to jest abelowa. Uwaga: implikacja w drugą stronę nie zachodzi, np. wystarczy rozważyć grupę Kleina.

Grupa S_3

Permutacje parzyste	Permutacje nieparzyste
1=id	4=(23)
2=(123)	5=(13)
3=(132)	6=(12)

Tabela działania ○ w grupie S_3 (wiersz ○ kolumna)

○	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	5	6	1	2	3
5	5	6	4	3	1	2
6	6	1	5	2	3	1

S_3 jest grupą nieabelową bo: $(23)\circ(132) \neq (132)\circ(23)$
Inwolucje: (23), (13), (12)
2 elementy rzędu 3: (123), (132)

Przypomnienie:

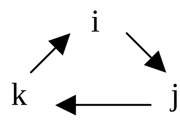
Def
G - grupa, $H < G$
$H \lhd G \Leftrightarrow \forall a \in G \ \forall h \in H \ aha^{-1} \in H$
Twierdzenie
$H \lhd G \Leftrightarrow \forall a \in G \ aH = Ha$
Twierdzenie
Jeśli liczba warstw w zbiorze ilorazowym $(G:H)=(rz(G):rz(H))=2$ to $H \lhd G$.
Przykład:
$(Z_6, +_6)$
$H_1=\{0, 2, 4\}$
$H_2=\{0, 3\}$
$(Z_6: H_1)=6:3=2 \Rightarrow H_1 \lhd Z_6$
Twierdzenie
Jeśli grupa G jest abelowa to każda podgrupa jest normalna.

Grupa kwaternionów – Q_8

Kwaterniony zostały wprowadzone przez irlandzkiego matematyka Williama Hamiltona w 1843 i służyły opisowi mechaniki w przestrzeni trójwymiarowej. Matematyk wpadł na ten pomysł podczas spaceru, a główne wzory wyrzeźbił na kamiennym moście w Dublinie Początkowo kwaterniony były uważane za twór patologiczny, ponieważ nie spełniały reguły przemienności (kwaterniony pojawiły się przed macierzami). Znajdują zastosowanie tak w matematyce teoretycznej jak i stosowanej. Sam Hamilton używał kwaternionów do linearyzacji równań różniczkowych, m.in. w mechanice niebieskiej - obrót to pomnożenie przez stałe kwaterniony. Kwaternionów Hamiltona używa się do konstrukcji wiązek wektorowych w geometrii różniczkowej. Użyto ich też w teorii liczb do badania liczby przedstawień liczby naturalnej jako sumy czterech kwadratów liczb całkowitych. Kwaterniony są obecnie używane w grafice komputerowej do wykonywania obrotów w przestrzeni trójwymiarowej.

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
$i^2=j^2=k^2=-1$

$i(-i)=1$	$ij=k$	$ji=-k$
$j(-j)=1$	$jk=i$	$kj=-i$
$k(-k)=1$	$ki=j$	$ik=-j$



•	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Grupę kwaternionów można również potraktować jako grupę macierzową:

$$1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$$

Nie trywialne podgrupy Q_8
$H_1=\{-1,1\}$
$H_2=\{1, -1, i, -i\}$
$H_3=\{1, -1, j, -j\}$
$H_4=\{1, -1, k, -k\}$
$|Q_8| : |H_i|=2 \Rightarrow H_i \triangleleft Q_8$, $i\in\{2, 3, 4\}$
$Q_8 /H_i=\{\{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}, H_1\}$
W grupie kwaternionów wszystkie nie trywialne podgrupy są normalne.

Uwaga:
Grupa kwaternionów jest przykładem na to, że poniższa implikacja nie zawsze zachodzi:
każda nie trywialna podgrupa grupy G jest normalna $\neq>$ G jest abelowa.

Grupa izometrii kwadratu - D_4

Oznaczenia: e – identyczność, o – obrót o 90°,
| = s – symetria względem pionowej osi,
– = $s\circ o^2$ – symetria względem poziomej osi,
/ = $s\circ o$ – symetria względem osi skośnej,
\ = $so^3 = s\circ o^3$ – symetria względem osi skośnej,

<table>
<tr><th>○</th><th>e</th><th>o</th><th>o^2</th><th>o^3</th><th>|</th><th>–</th><th>/</th><th>\</th></tr>
<tr><th>e</th><td>e</td><td>o</td><td>o^2</td><td>o^3</td><td>|</td><td>–</td><td>/</td><td>\</td></tr>
<tr><th>o</th><td>o</td><td>o^2</td><td>o^3</td><td>e</td><td>\</td><td>/</td><td>|</td><td>–</td></tr>
<tr><th>o^2</th><td>o^2</td><td>o^3</td><td>e</td><td>o</td><td>–</td><td>|</td><td>\</td><td>/</td></tr>
<tr><th>o^3</th><td>o^3</td><td>e</td><td>o</td><td>o^2</td><td>/</td><td>\</td><td>–</td><td>|</td></tr>
<tr><th>|</th><td>|</td><td>/</td><td>–</td><td>\</td><td>e</td><td>o^2</td><td>o</td><td>o^3</td></tr>
<tr><th>–</th><td>–</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>o^2</td><td>e</td><td>o^3</td><td>o</td></tr>
<tr><th>/</th><td>/</td><td>–</td><td>\</td><td>|</td><td>o^3</td><td>o</td><td>e</td><td>o^2</td></tr>
<tr><th>\</th><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>–</td><td>o</td><td>o^3</td><td>o^2</td><td>e</td></tr>
</table>

Nie trywialne podgrupy D_4

H_1={e, o, o^2, o^3}
H_2={e, \}
H_3={e, /}
H_4={e, |}
H_5={e, –}
H_6={e, o^2}
H_7={e, o^2, |, –}
H_8={e, o^2, \, /}

Uwaga:
Grupa Q_8 nie jest izomorficzna z D_4, ponieważ obie grupy posiadają inną liczbę podgrup rzędu 2

Grupa S_4

Permutacje parzyste	Permutacje nieparzyste
1=id	13=(34)
2=(12)(34)	14=(23)
3=(13)(24)	15=(24)
4=(14)(23)	16=(12)
5=(123)	17=(1234)
6=(243)	18=(1243)
7=(142)	19=(1342)
8=(134)	20=(13)
9=(132)	21=(1324)
10=(143)	22=(1432)
11=(234)	23=(14)
12=(124)	24=(1423)

Tabela działania ○ w grupie S_4

○	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	16	18	17	13	15	14	23	22	24	20	19	21
3	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	21	19	20	24	22	23	14	15	13	17	18	16
4	4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
5	5	8	6	7	9	12	10	11	1	4	2	3	17	16	18	20	19	21	13	14	15	23	24	22
6	6	7	5	8	10	11	9	12	2	3	1	4	15	13	14	22	23	24	16	18	17	19	21	20
7	7	6	8	5	11	10	12	9	3	2	4	1	22	24	23	15	14	13	21	19	20	18	16	17
8	8	5	7	6	12	9	11	10	4	1	3	2	20	21	19	17	18	16	24	23	22	14	13	15
9	9	11	12	10	1	3	4	2	5	7	8	6	19	20	21	14	13	15	17	16	18	24	22	23
10	10	12	11	9	2	4	3	1	6	8	7	5	23	22	24	18	16	17	15	13	14	21	20	19
11	11	9	10	12	3	1	2	4	7	5	6	8	14	15	13	19	21	20	22	24	23	16	17	18
12	12	10	9	11	4	2	1	3	8	6	5	7	18	17	16	23	24	22	20	21	19	13	15	14
13	13	16	24	21	18	14	19	23	22	20	15	17	1	6	11	2	12	5	7	10	4	9	8	3
14	14	19	18	23	20	15	22	17	16	24	13	21	11	1	6	9	8	3	2	5	12	7	4	10
15	15	22	20	17	24	13	16	21	19	18	14	23	6	11	1	7	4	10	9	3	8	2	12	5
16	16	13	21	24	14	18	23	19	20	22	17	15	2	5	12	1	11	6	8	9	3	10	7	4
17	17	20	22	15	21	16	13	24	23	14	18	19	5	12	2	8	3	9	10	4	7	1	11	6
18	18	23	14	19	22	17	20	15	13	21	16	24	12	2	5	10	7	4	1	6	11	8	3	9
19	19	14	23	18	15	20	17	22	24	16	21	13	9	3	8	11	6	1	4	7	10	5	2	12
20	20	17	15	22	16	21	24	13	14	23	19	18	8	9	3	5	2	12	11	1	6	4	10	7
21	21	24	16	13	23	19	14	18	17	15	20	22	3	8	9	4	10	7	5	12	2	11	6	1
22	22	15	17	20	13	24	21	16	18	19	23	14	7	10	4	6	1	11	12	2	5	3	9	8
23	23	18	19	14	17	22	15	20	21	13	24	16	10	4	7	12	5	2	3	8	9	6	1	11
24	24	21	13	16	19	23	18	14	15	17	22	20	4	7	10	3	9	8	6	11	1	12	5	2

Podgrupy S_4 izomorficzne do:

A4	Kleina	Z2	Z3	D4	Z4	S3
1=id	1=id	1=id	1=id	1=id	1=id	1=id
2=(12)(34)	2=(12)(34)	2=(12)(34)	5=(123)	16=(12)	2=(12)(34)	16=(12)
3=(13)(24)	3=(13)(24)		9=(132)	2=(12)(34)	21=(1324)	20=(13)
4=(14)(23)	4=(14)(23)	1=id		3=(13)(24)	24=(1423)	14=(23)
5=(123)		3=(13)(24)	1=id	4=(14)(23)		5=(123)
6=(243)	1=id		12=(124)	13=(34)	1=id	9=(132)
7=(142)	16=(12)	1=id	7=(142)	21=(1324)	3=(13)(24)	
8=(134)	2=(12)(34)	4=(14)(23)		24=(1423)	17=(1234)	1=id
9=(132)	13=(34)		1=id		22=(1432)	16=(12)
10=(143)		1=id	8=(134)	1=id		23=(14)
11=(234)	1=id	16=(12)	10=(143)	2=(12)(34)	1=id	15=(24)
12=(124)	20=(13)			20=(13)	4=(14)(23)	12=(124)
	3=(13)(24)	1=id	1=id	3=(13)(24)	18=(1243)	7=(142)
	15=(24)	13=(34)	11=(234)	4=(14)(23)	19=(1342)	
			6=(243)	15=(24)		
	1=id	1=id		17=(1234)		1=id
	23=(14)	20=(13)		22=(1432)		20=(13)
	4=(14)(23)					23=(14)
	14=(23)	1=id		1=id		13=(34)
		15=(24)		2=(12)(34)		8=(134)
				3=(13)(24)		10=(143)
		1=id		23=(14)		
		23=(14)		4=(14)(23)		1=id
				14=(23)		14=(23)
		1=id		18=(1243)		15=(24)
		14=(23)		19=(1342)		13=(34)
						11=(234)
						6=(243)