przed egzaminem: ZADANIE 8 - GRAFY

Polecenie do wszystkich zadań: Wyznacz stopnie wierzchołków w grafie G, jego liczbę chromatyczną i indeks chromatyczny.

PUNKTACJA: 1 punkt wierzchołki 1 punkt za indeks
1 punkt za liczbę chromatyczną 1 punkt za zacytowanie twierdzeń

Zadanie 1.

Niech G będzie grafem powstałym z grafu $K_{n,n}$, dla $n \geq 2$, poprzez rozdzielenie jednej krawędzi.

PODPOWIEDŹ

Stopnie wierzchołków: w grafie $K_{n,n}$ wszystkie wierzchołki mają stopień $\deg(v) = n$. W grafie G dodany wierzchołek ma stopień 2, a stopnie innych wierzchołków się nie zmieniają. Stąd $\deg(v) \in \{2, n\}$

Liczba chromatyczna: graf $K_{n,n}$ jest dwudzielny, zawiera tylko cykle parzystej długości. Graf G nie jest dwudzielny. Cykl w grafie $K_{n,n}$, który zawierał rozdzielaną krawędź zamienia się na cykl długości nieparzystej. Stąd $\chi(G) \geq 3$. Istnieje kolorowanie za pomocą trzech kolorów (wierzchołki jednego zbioru niezależnego grafu $K_{n,n}$ jednym kolorem, drugiego zbioru drugim kolorem, nowy wierzchołek trzecim kolorem). Stąd $\chi(G) = 3$.

Indeks chromatyczny: $\chi'(G) = n + 1$. Z twierdzenia Wizinga $\chi'(G) \in \{\Delta, \Delta + 1\}$. Niech e będzie rozdzielaną krawędzią. W grafie $K_{n,n} - e$ każde kolorowanie za pomocą n kolorów ma tę własność, że oba końce krawędzi e brakuje tego samego koloru. Gdy chcemy dokolorować dwie krawędzie zastępujące krawędź e w grafie G, musimy użyć $n + 1$-go koloru.

Zadanie 2.

Niech G będzie grafem powstałym z grafu $K_{n,n}$, dla $n \geq 2$, poprzez dodanie skojarzenia o maksymalnej liczebności (nie dodajemy nowych wierzchołków, tylko krawędzie; nie tworzymy krawędzi wielokrotnych).

PODPOWIEDŹ

Stopnie wierzchołków: w grafie $K_{n,n}$ wszystkie wierzchołki mają stopień $\deg(v) = n$. Jeśli n jest parzyste, to każdemu wierzchołkowi dodajemy jedną krawędź, czyli $\deg(v) = n + 1$. Jeśli n -nieparzyste, to w obu zbiorach niezależnych wierzchołków zostaje jeden wierzchołek, do którego nie dodajemy krawędzi, czyli $\deg(v) \in \{n, n + 1\}$.

Liczba chromatyczna: $\chi(G) = 4$. Graf G zawiera podgraf K_4, stąd $\chi(G) \geq 4$. Kolorowanie za pomocą czterech kolorów: "połowę" wierzchołków jednego zbioru niezależnego kolorem 1, drugą "połowę" kolorem 2; analogicznie z kolorami 3 i 4 w drugim zbiorze niezależnym.

Indeks chromatyczny: $\chi'(G) = n + 1$. Krawędzie grafu $K_{n,n}$ kolorujemy za pomocą n kolorów (jest to graf dwudzielny, więc $\chi(K_{n,n}) = \Delta = n$). Krawędzie dodanego skojarzenia kolorujemy $n+1$-szym kolorem. Nie da się użyć mniejszej liczby kolorów, gdyż z tw. Wizinga $\chi'(G) \geq \Delta = n + 1$.

Zadanie 3 .

Niech G będzie grafem powstałym z grafu K_n, dla $n \geq 2$, poprzez rozdzielenie wszystkich krawędzi.

PODPOWIEDŹ

Stopnie wierzchołków: w grafie K_n wszystkie wierzchołki mają stopień $\deg(v) = n - 1$. Dodane wierzchołki mają stopień równy 2. Stąd $\deg(v) \in \{2, n - 1\}$.

Liczba chromatyczna: $\chi(G) = 2$. Graf G jest dwudzielny. Niech $G = (X, Y; E)$, wtedy X - zbiór oryginalnych wierzchołków grafu K_n, Y - zbiór dodanych wierzchołków. Nie istnieją krawędzie pomiędzy dwoma wierzchołkami zbioru X (wszystkie zostały rozdzielone), analogicznie Y.

Indeks chromatyczny: $\chi'(G) = n - 1$. Twierdzenie z wykładu: jeśli G - dwudzielny, to $\chi'(G) = \Delta$.

Zadanie 4 .

Niech G będzie grafem rzędu $n = 2^7$, w którym wierzchołki są wyznaczone przez parami różne ciągi binarne długości 7. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie trzema bitami.

PODPOWIEDŹ

Stopnie wierzchołków: dla dowolnego wierzchołka liczymy jego sąsiadów. W tym celu wybieramy 3 bity z 7, na których dokonujemy zmiany bitu. Stąd $\deg(v) = \binom{7}{3}$.

Liczba chromatyczna: $\chi(G) = 2$. Jest to graf dwudzielny. Niech $G = (X, Y; E)$, wtedy X - zbiór wierzchołków o parzystej liczbie jedynek, Y - zbiór wierzchołków o nieparzystej liczbie jedynek. Nie istnieją krawędzie pomiędzy dwoma wierzchołkami zbioru X, analogicznie Y.

Indeks chromatyczny: $\chi'(G) = \binom{7}{3}$. Twierdzenie z wykładu: jeśli G - dwudzielny, to $\chi'(G) = \Delta$.

Zadanie 5

Niech G będzie grafem rzędu $n = 3^4$, w którym wierzchołki są wyznaczone przez parami różne ciągi ternarne długości 4. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się na dokładnie jednej pozycji o dokładnie 1 (np. ciągi $(0, 0, 0, 1)$ i $(0, 0, 0, 2)$ są połączone krawędzią, ale $(0, 0, 0, 0)$ oraz $(0, 0, 0, 2)$ nie są).

PODPOWIEDŹ

Stopnie wierzchołków: dla dowolnego wierzchołka liczymy jego sąsiadów. Zauważmy, że inaczej liczymy sąsiadów w zależności od tego, czy pojawiają się 1, czy też nie. Tzn. wierzchołek $(0, 0, 0, 0)$ ma inną liczbę sąsiadów niż wierzchołek $(1, 0, 0, 0)$.

Rozważmy przypadki w zależności od liczby 1.

- zero 1: wybieramy pozycję, na której będzie zmieniana wartość - na 4 sposoby. Zmieniamy liczbę na tej pozycji (jest to 0 lub 2) na 1. Mamy $\deg(v) = 4$.

- jedna 1: wybieramy pozycję spośród tych, na których jest 0 lub 2 - na 3 sposoby. Zmieniamy liczbę na tej pozycji na 1. Mamy już 3 sąsiadów. Dodatkowych 2 sąsiadów otrzymujemy zmieniając 1 na 0 lub 2. $\deg(v) = 5$

- dwie 2: wybieramy pozycję spośród tych, na których jest 0 lub 2 - na 2 sposoby. Zmieniamy liczbę na tej pozycji na 1. Mamy już 2 sąsiadów. Wybieramy pozycję spośród tych, na których jest 1 - na 2 sposoby. Zmieniamy liczbę na tej pozycji na 0 lub 2. Mamy dodatkowych 4 sąsiadów. $\deg(v) = 6$

- trzy 1: wybieramy pozycję spośród tych, na których jest 1 - na 3 sposoby. Zmieniamy liczbę na tej pozycji na 0 lub 2. Mamy już 6 sąsiadów. Na pozycji, na której jest 0 lub 2, zmieniamy na 1. Dodatkowy jeden sąsiad. $\deg(v) = 7$

- cztery 1: wybieramy, które 1 zmieniamy - na 4 sposoby. Zmieniamy 1 na 0 lub 2. $\deg(v) = 4 \cdot 2 = 8$.

Liczba chromatyczna: $\chi(G) = 2$. Jest to graf dwudzielny. Niech $G = (X, Y; E)$, wtedy X - zbiór wierzchołków o parzystej sumie cyfr ze wszystkich pozycji, Y - zbiór wierzchołków o nieparzystej sumie cyfr ze wszystkich pozycji. Nie istnieją krawędzie pomiędzy dwoma wierzchołkami zbioru X, analogicznie Y.