Egzamin MD - Zadanie 10

10. Wypisz wszystkie permutacje będące symetriami grafu G. Korzystając z twierdzenia Burnside'a oblicz liczbę parami różnych pokolorowań wierzchołków grafu G przy użyciu n kolorów.

1. Niech G będzie grafem C_4, $n = 2$.
2. Niech G będzie grafem powstałym z grafu K_6 poprzez usunięcie trzech krawędzi o jednym wspólnym końcu, $n = 3$.
3. Niech G będzie grafem powstałym z dwóch rozłącznych grafów C_3 poprzez wybranie po jednym wierzchołku z każdego z tych grafów i dodanie krawędzi między wybranymi wierzchołkami, $n = 2$.

I. Wprowadzenie

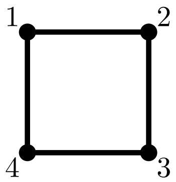
Co to znaczy "permutacja będąca symetrią grafu"?

Niech $G = (V, E)$. Są to permutacje zbioru wierzchołków grafu $\pi\colon V \to V$, takie że

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{\pi(x), \pi(y)\} \in E.$$

Uwaga. Nie muszą to być symetrie w geometrycznym sensie.

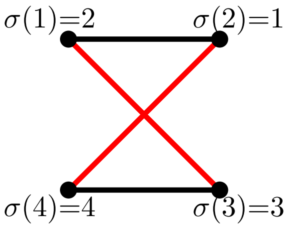
Rozważmy graf C_4. Aby móc wypisać symetrie tego grafu, oznaczmy wierzchołki $V(C_4) = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz niech $E(C_4) = \{12, 23, 34, 41\}$.



Czy permutacja $\sigma = (12)(3)(4)$ jest symetrią grafu C_4?

Sprawdźmy co się dzieje z krawędziami poprzez działanie tej permutacji na zbiór wierzchołków grafu. Skoro 12 jest krawędzią grafu G, to $\sigma(1)\sigma(2)$ również powinna należeć do zbioru krawędzi grafu G. Tak jest, gdyż $\sigma(1) = 2$ oraz $\sigma(2) = 1$. W ten sposób należy sprawdzić wszystkie krawędzie oraz "nie-krawędzie" (tzn. jeśli ab nie jest krawędzią grafu G, to $\sigma(a)\sigma(b)$ również nie może być krawędzią G).

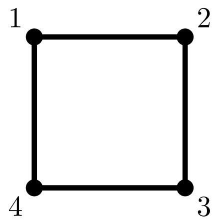
Zauważmy, że $14 \in E(C_4)$, ALE $\sigma(1)\sigma(4) = 24 \notin E(C_4)$. Stąd podana permutacja NIE JEST symetrią grafu G.



W ten sposób możemy przeanalizować wszystkie permutacje zbioru wierzchołków. Symetriami grafu są te, które "zachowują krawędzie".

Rozwiązania

1. Dla ułatwienia rysujemy podany graf:



Wypisujemy wszystkie symetrie tego grafu, wraz z liczbą kolorowań zachowywanych przez daną symetrię.

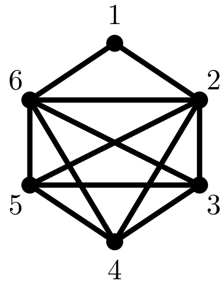
permutacja σ	liczba cykli	C(σ)
id	4	2^4
(1234)	1	2^1
(13)(24)	2	2^2
(1432)	1	2^1
(1)(24)(3)	3	2^3
(13)(2)(4)	3	2^3
(12)(34)	2	2^2
(14)(23)	2	2^2

Wszystkich symetrii grafu C_4 jest 8.

Z twierdzenia Burnside'a:

$$N(G,C) = \frac{1}{8}(2^4 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2) = \frac{1}{8}(16+16+12+4) = 6.$$

2. Rysunek grafu G:



Zauważmy, że wierzchołek 1 jest jedynym wierzchołkiem stopnia 2, musi więc być punktem stałym każdej symetrii. Ponadto $\deg(2) = \deg(6) = 5$ oraz $\deg(3) = \deg(4) = \deg(5) = 4$. Stąd permutacje będące symetriami to:

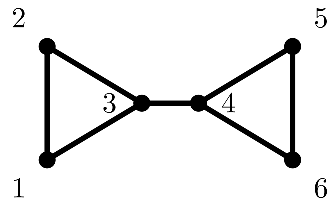
permutacja σ	liczba cykli	C(σ)
id	6	3^6
(1)(2)(6)(34)(5)	5	3^5
(1)(2)(6)(3)(45)	5	3^5
(1)(2)(6)(35)(4)	5	3^5
(1)(2)(6)(345)	4	3^4
(1)(2)(6)(354)	4	3^4
(1)(26)(34)(5)	4	3^4
(1)(26)(3)(45)	4	3^4
(1)(26)(35)(4)	4	3^4
(1)(26)(345)	3	3^3
(1)(26)(354)	3	3^3
(1)(26)(3)(4)(5)	5	3^5

Wszystkich symetrii grafu G jest 12.

Z twierdzenia Burnside'a:

$$N(G,C) = \frac{1}{12}(3^6+4\cdot 3^5+5\cdot 3^4+2\cdot 3^3) = \frac{1}{4}(243+4\cdot 81+5\cdot 27+2\cdot 9) = \frac{720}{4} = 180.$$

3. Rysunek grafu G:



Zauważmy, że wierzchołki 3 i 4 jako jedyne mają stopień 3. Jeśli permutacja będąca symetrią $\pi \in S_6$ zawiera cykl (34) (biorą pod uwagę, że 13 i 23 są krawędziami o końcu w wierzchołku 3), to $\pi(5) \in \{1,2\}$, analogicznie $\pi(6) \in \{1,2\}$.

Poniższa tabela zawiera wszystkie permutacje będące symetriami grafu.

permutacja σ	liczba cykli	C(σ)
id	6	2^6
(12)(3)(4)(5)(6)	5	2^5
(1)(2)(3)(4)(56)	5	2^5
(12)(3)(4)(56)	4	2^4
(34)(25)(16)	3	2^3
(34)(15)(26)	3	2^3
(34)(1625)	2	2^2
(34)(1526)	2	2^2

Wszystkich symetrii grafu G jest 8.

Z twierdzenia Burnside'a:

$$N(G,C) = \frac{1}{8}(2^6+2\cdot 2^5+2^4+2\cdot 2^3+2\cdot 2^2) = \frac{168}{8} = 21.$$