1. Sprawdzić, czy zbiór $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ wraz z działaniem $a \circ b = \sqrt{ab}$ tworzy grupę abelową.

2. Niech $A = \{2^{x+0,5}, x \in \mathbb{Q}\}$ oraz niech $\cdot$ oznacza mnożenie liczb. Czy struktura $(A, \cdot)$ jest grupą?

3. Niech D będzie zbiorem całkowitych potęg liczby 2. Udowodnij, że struktura $(D, \circ)$, gdzie działanie $\circ$ jest określone następująco: $x \circ y = \frac{x \cdot y}{2}$, jest grupą.

4. Czy poniższą tabelkę można uzupełnić tak, by trójelementowy zbiór $\{a, b, c\}$ z działaniem $\circ$ określonym otrzymaną tabelką był grupą?

$\circ$	a	b	c
a	b	a	
b	a	b	c
c		c	

$\circ$	a	b	c
a		a	b
b	a	b	c
c		c	

5. Udowodnij, że jeśli rząd grupy $(G, \cdot)$ jest parzysty, to istnieje taki element $a \in G$, $a \neq e$, że $a \cdot a = e$.

6. Dane permutacje $\sigma, \pi \in S_9$ przedstaw w postaci iloczynu cykli rozłącznych oraz w postaci iloczynu transpozycji. Oblicz złożenia $\pi \circ \sigma$, $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \pi$, $\sigma \circ \sigma$ oraz π^{-1}, σ^{-1}. Czy są to permutacje parzyste czy nieparzyste?

   (a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 7 & 3 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

   (b) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 6 & 8 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

7. Niech $\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$, $\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Udowodnij, że zbiór $S_3 = \{\tau_i, i = 1, 2, ..., 6\}$ wraz ze składaniem permutacji tworzy grupę. Udowodnij, że zbiór $A_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ wraz ze składaniem permutacji tworzy grupę. Czy są to grupy abelowe?

8. Niech $D := R - \{-1, 0\}$ i niech $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Funkcje $f_i : D \to D$ określone są wzorami $f_1(x) = x, f_2(x)\frac{-x-1}{x}, f_3(x) = \frac{-1}{x+1}, f_4(x) = \frac{1}{x}, f_5(x) = \frac{-x}{x+1}, f_6(x) = -x-1$. Wykaż, iż zbiór $G_1 = \{f_i, i = 1, 2, ..., 6\}$ wraz ze składaniem funkcji tworzy grupę.

9. Niech D_n oznacza zbiór wszystkich izometrii własnych n-kąta foremnego F na płaszczyźnie ($n \geqslant 3$).
   (a) Sprawdzić, że zbiór D_n tworzy grupę względem składania odwzorowań.
   (b) Jaki jest rząd grupy D_n?
   (c) Niech n-kąt foremny F będzie umieszczony w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie w ten sposób, że jego środek pokrywa się z początkiem układu O oraz jeden z jego wierzchołków leży na dodatniej półosi Ox. Wykazać, że wtedy $D_n = \{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1},\ b, ba, \ldots, ba^{n-1}\}$, gdzie a jest obrotem płaszczyzny wokół punktu O o kąt $\frac{2\pi}{n}$ w kierunku dodatnim, natomiast b jest symetrią względem osi Ox.
   (d) Sprawdzić, że $a^n = \mathrm{id}$ oraz $b^2 = \mathrm{id}$.
   (e) Którą spośród izometrii $\{\mathrm{id}, a, a^2, \ldots, a^{n-1}, b, ba, \ldots, ba^{n-1}\}$ jest ab i ogólniej $a^k b$, gdzie $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$?
   (f) Zbudować tabelkę mnożenia grupy D_3.
   (g) Zbudować tabelkę mnożenia grupy D_4 .

10. Korzystając z Algorytmu Euklidesa wykaż, że $17^{-1} = 43$ w $Z^\star_{73}$, $37^{-1} = 100$ w $Z^\star_{137} \in Z$.