1. Dla każdego elementu poniższej grupy określić rza i wyznaczyć $< a >$
   (a) Z_{14}^*
   (b) Z_9^*
   (c) Z_6
   (d) Z_6
2. Czy liczba 3 jest generatorem $\mathbf{Z}_{53}^*$?
3. Znaleźć najmniejszy generator grupy $\mathbf{Z}_{31}^*$.
4. Czy $(S_3, \circ)$ jest cykliczna? Podaj rzędy wszystkich elementów.
5. Znaleźć najmniejszy generator grupy $\mathbf{Z}_{31}^*$, a następnie określić izomorfizm grup φ: $\mathbf{Z}_{30} \to \mathbf{Z}_{31}^*$. Zbudować tabelkę wartości funkcji φ. Wykorzystując izomorfizm φ, rozwiązać w grupie $\mathbf{Z}_{31}^*$: $19x^{14} = 25$
6. Znaleźć najmniejszy generator grupy $\mathbf{Z}_{17}^*$, a następnie określić izomorfizm grup φ: $\mathbf{Z}_{16} \to \mathbf{Z}_{17}^*$. Zbudować tabelkę wartości funkcji φ. Wykorzystując izomorfizm φ, rozwiązać w grupie $\mathbf{Z}_{17}^*$:
   a) $7x^4 = 10$, b) $8x^6 = 2$, c) $11x^3 = 2$.
7. Czy cykliczna jest grupa $(\mathbf{Z}, \oplus)$, gdzie działanie $\oplus$ określone jest wzorem $a \oplus b = a + b - 5$? Jeśli tak, to wyznacz generatory tej grupy.
8. Która z grup jest cykliczna: $\mathbf{Z}_5^*$, $\mathbf{Z}_8^*$, $\mathbf{Z}_{15}^*$?
9. Udowodnić, że każda grupa cykliczna jest abelowa.
10. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{rz}\, a = n$ i $m \in \mathbf{Z}$, to $a^m = e$ wtedy i tylko wtedy gdy $m|n$.
11. Udowodnić, że dla każdego $a \in G$ zachodzi $\mathrm{rz}\, a = \mathrm{rz}(a^{-1})$.
12. Udowodnij, że każda grupa której rząd jest liczbą pierwsza jest cykliczna.
13. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{rz}\, G = n$, to dla każdego $a \in G$ zachodzi $a^n = e$.
14. Jeśli $\mathrm{rz}\, a^5 = 12$, to jakie są możliwości dla $\mathrm{rz}\, a$?
15. Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n i niech l jest dzilnikiem n. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna podgrupa G rzędu l.

16. Niech D będzie zbiorem całkowitych potęg liczby 2. Niech działanie $\circ$ będzie określone następująco: $x \circ y = \frac{x \cdot y}{2}$.
a) Sprawdź, czy odwzorowanie $f(2^k) = k - 1$ jest izomorfizmem grup $(D, \circ)$ oraz $(\mathbb{Z}, +)$.
b) Czy grupa $(D, \circ)$ jest cykliczna? Jeśli tak, to wskaż jej generator.

17. Wykaż, iż jeżeli permutacja τ jest iloczynem rozłącznych cykli długości kolejno $a_1, a_2, ...a_n$ to rz $\tau = NWW(a_1, a_2, ...a_n)$

18. Niech $\tau = (1458)(297)$. Podaj $G =< \tau >$. Określ

    (a) $rz\tau^2$

    (b) $H =< \tau^3 >$

    (c) grupę ilorazową G/H

19. Udowodnij, że obraz homomorficzny grupy cyklicznej jest grupą cykliczną. Czy $Z \otimes Z$ jest grupą cykliczną? Czy $Z \otimes Z_n$ jest grupą cykliczną?

20. Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n. Wykazać, że liczba generatorów G wynosi $\phi(n)$