1. Wyznacz wszystkie podgrupy nietrywialne danej grupy, oraz warstwy względem danych podgrup. Czy wyznaczone podgrupy są podgrupami normalnymi?

   (a) Z_6, Z_{10}

   (b) Z_{12}^*, Z_{14}^*

   (c) S_3

   (d) D_3

   (e) G_1

2. Dla każdej podgrupy normalnej z zadania poprzedniego wyznaczyć grupę ilorazową, podać indeksy podgrupy w grupie.

3. Wykazać na przykładzie S_3 oraz G_1, że nie możemy określić działania indukowanego w zbiorze ilorazowym.

4. Niech G będzie grupą. Definiujemy $Z(G) = \{x \in G : \forall a \in G ax = xa\}$. Wyznaczyć centrum grup z zadania 1. Wykazać, iż $Z(G)$ jest podgrupą normalną.

5. Wykaż, że zbiór K wszystkich funkcji liniowych różnych od funkcji stałych przeprowadzajacych zbiór liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych, tworzy grupę wraz ze składaniem funkcji. Udowodnij,że zbiór funkcji postaci $f(x) = ax, a \neq 0$ nie jest podgrupą normalną. Udowodnij, ze zbiór funkcji postaci $f(x) = x + b$ jest podgrupą normalną.

6. Wykaż, iż jeśli H jest podgrupą grupy G oraz (G:H)=2, to H jest podgrupą normalną G.

7. Wykaż, iż C_n jest podgrupą normalną D_n.

8. Wykaż, iż A_n jest podgrupą normalną S_n.

9. Niech G będzie grupą i niech G_1, G_2 bedą podgrupami normalnymi G. Wykazać, iż
   $G_1G_2 = \{g_1g_2; g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ jest podgrupą normalną G.

10. Udowodnij, że dla każdej podgrupy normalnej H grupy G relacja równoważności okeślona wzorem $a \equiv^H b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ jest zgodna z działaniem w grupie G.

11. Niech H będzie podgrupą grupy multiplikatywnej G. Wykaż, że H jest podgrupa normalną G wtedy i tylko wtedy gdy relacja równoważności określona wzorem $a \equiv^H b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ jest zgodna z mnożeniem w grupie G.

12. W zbiorze N określona jest następująca relacja równoważności.

$$xRy \Leftrightarrow [x = y = 1 \vee (x \neq 1 \wedge y \neq 1)]$$

    Wykaż, że R jest zgodna z mnozeniem w N. Zapisz tabelkę działania indukowanego.

13. Działanie w zbiorze $A = \{a, b, c, d\}$ jest określone następująco a jest elementem neutralnym $bb = a, cc = c, dd = c, bc = cb = c, bd = db = c, cd = dc = d$. Czy relacja równoważnosci której zbiór klas abstrakcji wynosi

    (a) $A/R = \{a, bc, d\}$
    (b) $A/R = \{ab, c, d\}$
    (c) $A/R = \{a, cb, d\}$
    (d) $A/R = \{a, bc, d\}$

    jest zgodna z działaniem określonym w zbiorze A?

14. Udowodnij, że grupa ilorazowa G/H jest abelowa wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest następujacy warunek:

$$\forall a, b \in G a^{-1}b^{-1}ab \in H$$

15. Udowodnij, że jeśli grupa G nie jest abelowa to $G/Z(G)$ nie jest cykliczna.