1. Sprawdź które z przyporządkowań definiuje działanie grupy G na zbiorze X. Wyznacz orbity i stabilizatory.

   (a) $G = \mathbf{R}, X = \mathbf{R}^2$,
   $t \in G : (a, b) \to (a + t, b + t)$

   (b) $G = \{1, -1\} \times \{1, -1\}, X = \mathbf{R}^2$
   $(a, b) \in G : (x, y) \to (ax, by)$

   (c) $G = \mathbf{Z}_8^*$, X= Z_8
   $k \in G : a \to k \cdot_8 a$

   (d) $G = \mathbf{Z}_9^*$, X= Z_9
   $k \in G : a \to k \cdot_9 a$

   (e) $G = \mathbf{Z}_3$, X= Z_{12}
   $k \in G : a \to a +_{12} 4k$

   (f) $G = \langle\tau\rangle$, gdzie $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 3 & 5 & 8 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in S_9$,
   $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   $\sigma \in G : x \to \sigma(x)$.

2. Niech G będzie grupą i $H \leqslant G$. Sprawdź, że przyporzadkowanie każdemu elementowi $h \in H$ funkcji $\varphi_h : G \to G$ określonej wzorem

   (a) $\varphi_h(a) = ha$

   (b) $\varphi_h(a) = ah^{-1}$
   określa działanie grupy H w zbiorze G. Wyznacz orbity.

3. Niech grupa G działa w zbiorze X. Udowodnij, że dla każdego $x \in X$, $G_x \leqslant G$.

4. Niech grupa G działa w zbiorze X. Udowodnij, że $\bigcap_{x \in X} G_x \triangleright G$.

5. Niech X będzie rodziną wszystkich podgrup grupy G. Każdemu elementowi $g \in G$ niech będzie przyporządkowane przekształcenie φ_g zbioru X w następujący sposób $\varphi_g(H) = gHg^{-1}$ dla każdego $H \in X$. Sprawdź,że przyporządkowanie to określa działanie grupy G w zbiorze X. Wykaż, iż podgrupa H jest punktem stałym tego działania wtedy i tylko wtedy gdy H jest podgrupą normalną G.

6. Niech D_n będzie grupą izometrii własnych n-kąta foremnego. Udowodnij, że $|D_n| = 2n$.

7. Udowodnij, że rząd grupy obrotów

(a) czworościanu to 12.

(b) sześcianu i ośmiościanu to 24.(izomorfizm z S_4)

(c) dwunastościanu i dwudziestościanu to 60

8. Udowodnij indukcyjnie, że $|A_n| = \frac{1}{2}n!$.

9. Ile jest różnych naszyjników złożonych z koralików czarnych i białych o sześciu koralikach, które są:
   - różne ze względu na obroty naszyjnika
   - różne ze względu na wszystkie izometrie.
   Rozwiąż to zadanie korzystając z Lematu Burnside'a.

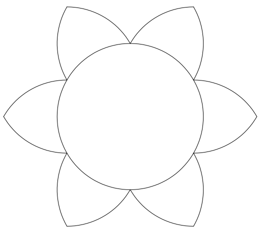
10. Ile istotnie różnych naszyjników złożonych z dwóch koralików czerwonych, czterech białych i jednego czarnego można utworzyć, jeśli wszystkie koraliki muszą być wykorzystane? Dwa naszyjniki uważamy za takie same, jeśli jeden z nich powstaje z drugiego przez dowolne przekształcenie izometryczne. Rozwiąż to zadanie korzystając z Lematu Burnside'a.

11. Ile istotnie różnych naszyjników złożonych z 8 koralików można utworzyć, jeśli koraliki są tylko białe i czarne oraz w naszyjniku powinno być więcej koralików białych niż czarnych. Rozwiąż to zadanie korzystając z Lematu Burnside'a.

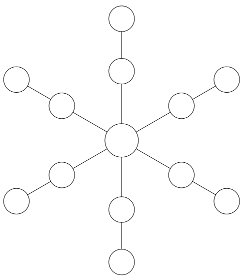
12. Długie przekątne sześciokąta foremnego dzielą go na sześć trójkątów. Każdy z trójkątów kolorujemy na niebiesko, czerwono lub zielono. Ile jest różnych pokolorowań które są:
    - różne ze względu na obroty sześciokąta
    - różne ze względu na wszystkie izometrie.
    Rozwiąż to zadanie korzystając z Lematu Burnside'a.

13. Kolorujemy koła figury (łącznie ze środkiem) z rysunku 1 kolorami białym i czarnym. Stosując lemat Burnside'a odpowiedz, ile jest różnych pokolorowań (ze względu na obroty), w których biały kolor użyty jest 9 razy, zaś czarny 4?

14. Kolorujemy kwiatek o sześciu płatkach (łącznie ze środkiem) kolorami białym i czarnym (rys. 1). Stosując lemat Burnside'a odpowiedz ile jest różnych pokolorowań (ze względu na obroty), w których biały kolor użyty jest 3 razy, zaś czarny 4?



Rysunek 1



Rysunek 2

15. Kolorujemy koła figury (łącznie ze środkiem) z rysunku 2 kolorami białym i czarnym. Stosując lemat Burnside'a odpowiedz, ile jest różnych pokolorowań (ze względu na obroty), w których biały kolor użyty jest 9 razy, zaś czarny 4?

16. Pola szachownicy o wymiarach 4×4 kolorujemy dwoma kolorami niebieskim i czarnym. Ile jest różnych pokolorowań w których 4 pola są niebieskie a pozostałe czarne, przy założeniu, że

    (a) szachownica jest wykonana z drewna

    (b) szachownica jest przeźroczysta (dwustronna)

17. Ile jest istotnie różnych pokolorowań ścian ośmiościanu regularnego w których trzy ściany są niebieskie a pozostałe czarne? Porównaj otrzymany wynik z przykładem 5.6. Wyjaśnij fakt że wyniki są identyczne.

18. Porównaj kolorowanie ścian dwudziestościanu foremnego z kolorowaniem wierzchołków dwunastoscianu foremnego. Ile jest różnych pokolorowań ścian dwunastościanu foremnego w których 5 ścian jest niebieskich a pozostałe są czarne? Odpowiedz na podobne pytanie dotyczące liczby pokolorowań wierzchołków dwudziestoscinu.