Zestaw 3

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi:

a) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$,

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

d) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$,

e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

f) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$,

g) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$,

h) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

i) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,

j) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$,

k) $(n+1)(n+2)(n+3)...(2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$,

l) $1 - 2 + 3 - 4 + ... + -2n = -n$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność:

a) $(a+b)^n \geq a^n + b^n$, dla dowolnych a, $b > 0$, $n \in N_+$,

b) $2^n > n^2$, dla dowolnego $n \geq 5$,

c) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}, n \in N_+$,

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{3n+1} > 1, n \in N_+$,

e) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, n \in N_+$,

f) $(n!)^2 \geq n^2, n \in N_+$.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla każdego $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność:

a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$,

b) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$,

c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$,

d) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Zadanie 4.

Udowodnij, że dla każdego $n \in N_+$:

a) $9|7^n + 3n - 1$,

b) $133|11^{n+2} + 12^{2n+1}$,

c) $10|9 \cdot 3^{4n} + 1$,

d) $11|10^n - (-1)^n$,

e) $6|n^3 - n$,

f) $42|n^7 - n$,

g) $3|n^3 - n$,

h) $5|n^5 - n$,

i) $7|n^7 - n$.

Zadanie 5.

Udowodnij, że:

a) n prostych na płaszczyźnie, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przechodzą przez ten sam punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ części,

b) jeżeli płaszczyznę podzielimy na części za pomocą prostych i okręgów, to otrzymaną mapę można pokolorować dwoma kolorami,

c) n-kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych,

d) n płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt, z których żadne trzy nie mają wspólnej krawędzi, dzieli przestrzeń na $n(n-1)+2$ części.

Zadanie 6.

Udowodnij, że $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)+...+(4n-1) = 3n^2$ dla $n \in N$. Ta suma może być też zapisana w postaci $\sum_{i=n}^{2n-1}(2i+1)$.

Zadanie 7.

Udowodnij, że liczba $5^n - 4n - 1$ jest podzielna przez 16 dla $n \in N$.

Zadanie 8.

Udowodnij, że:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

dla $n \in N$.

Zadanie 9.

Udowodnij, że liczba $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ jest podzielna przez 8 dla $n \in N$.

Zadanie 10.

Udowodnij, że liczba $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ jest podzielna przez 73 dla $n \in N$.

Zadanie 11.

Udowodnij, że:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ dla } n \in N$$

Zadanie 12.

Udowodnij, że:

$$4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1) \text{ dla wszystkich } n \in N$$

Zadanie 13.

Udowodnij, że:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + ... + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1} \text{ dla } n \in N$$

Zadanie 14.

Udowodnij, że liczba $11^n - 4^n$ jest podzielna przez 7 dla wszystkich $n \in N$.

Zadanie 15.

Udowodnij, że $n^2 > n + 1$ dla $n \geq 2$.

Zadanie 16.

a) Oblicz $1 + 3 + ... + (2n - 1)$ dla kilku wartości n, a następnie odgadnij wzór ogólny.

b) Udowodnij przez indukcję, że wzór otrzymany w ćwiczeniu a) jest prawidłowy.

Zadanie 17.

Udowodnić, że dla dowolnego $n \in N$ liczba postaci $3^{4n+2} + 1$ jest podzielna przez 10.

Zadanie 18.

Pokazać, że dla dowolnego $n \in N$ liczba $13^n - 7$ jest podzielna przez 6.

Zadanie 19.

Udowodnić, że dla dowolnego n naturalnego oraz x rzeczywistego zachodzi nierówność $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

Zadanie 20.

Udowodnić, że dowolną kwotę pieniędzy złożoną z n złotych ($n \geq 4$) można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

Zadanie 21.

Wyznaczyć liczbę odcinków łączących n punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współliniowe.

Zadanie 22.

Udowodnić, że

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}$$

dla dowolnej liczby naturalnej n.

Zadanie 23.

Pokazać, że dla dowolnego $n \in N$ jest prawdziwa równość

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Zadanie 24.

Pokazać, że

$$2^3 + 4^3 + ... + (2n)^3 = 2(2 + 4 + ... + 2n)^2$$

dla dowolnego $n \in N$.

Zadanie 25.

Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9.

Zadanie 26.

Pokazać, że liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3 dla dowolnego $n \in N$.

Zadanie 27.

Udowodnić, że liczba postaci $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3 dla dowolnego $n \in N$.

Zadanie 28.

Pokazać, że dla dowolnego $n \in N$ liczba $2^{6n+1} + 3^{2n+2}$ jest podzielna przez 11.

Zadanie 29.

Pokazać, że

$$1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11...1}_{n} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

dla dowolnego $n \in N$.

Zadanie 30.

Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n jest prawdziwa równość

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + ... + n(n+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

Zadanie 31.

Udowodnić, że liczba $2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$ jest podzielna przez 25 dla każdego $n \in N$.

Zadanie 32.

Udowodnić, że liczba $10^{n+1} - 10(n+1) + n$ jest podzielna przez 81 dla dowolnego $n \in N$.