

15. Nieprzemieniana Teoria miary

Teoria algebr von Neumanna uważa się za nieprzemieniącą

teorię miary: motywacją jest następujące

Tw. 15.1 Gdy $A =$ przemieniana W^* -algebra $\Rightarrow A \cong L^\infty(\Gamma, \nu)$ dla pewnej lokalizowalnej przestrzeni z miarą

Uwaga 15.2 a) Γ jest lokalizowalna gdy $\Gamma = \bigsqcup_{i \in I} \Gamma_i$ oraz $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i$ gdzie

$\nu_i =$ miara składowa na Γ_i

b) W^* -algebra to abstrakcyjna def.: jest to C^* -algebra posiadająca

predykatu $\text{fin. } \exists A = E^* \subseteq \text{fin. dualna}$
 $E = \text{fin. Banacha}$

c) algebry von Neumanna są z kolei „kontrowersyjne” tzn. są podalgebrami

BCHU domkniętymi w SOT (lub równoważnie w WOT) topologii.

Wrotne przypomnienie: jeżeli $A =$ alg. von Neumanna, $P, Q =$ projekcje

Def. 15.3 i) $P \leq Q$ nazywamy dominującymi gdy $\exists V \in A$ $P = V^*V$
 $Q = VV^*$

- Sprawdza się że jest to faktycznie relacja równoważności

• Wtedy V jest unikalną izometrią (która jest naturalną, tzn. $V \in A$)

• Jeżeli $P \leq Q$ są równoważne $\Rightarrow \dim P(\mathcal{H}) = \dim Q(\mathcal{H})$. gdy

dołączamy dane $V \in B(\mathcal{H})$ (a niekoniecznie $V \in A$) to

prawdziwa jest implikacja odwrotna: $\dim P(\mathcal{H}) = \dim Q(\mathcal{H}) \Rightarrow \exists V \in B(\mathcal{H})$ $P = V^*V$
 $Q = VV^*$

Piszemy $P \sim Q$.

ii) Powemy, że Q jest większa bądź równa od P w sensie porządku

Murray-a-von Neumanna gdy $\exists P_0 \leq Q$ $P \sim P_0$ (tzn. P jest równoważna

z podprojekcją Q). Oznaczamy $P \leq Q$

• Sprawdza się że $P \leq P$, $P \leq Q, Q \leq R \Rightarrow P \leq R$ oraz $P \leq Q \wedge Q \leq P \Rightarrow P \sim Q$

Def. 15.4 Projekcje $P \in B(\mathcal{H})$ nazywamy abelskimi gdy algebra von Neumanna

$PAP = \{PIP : I \in A\}$ jest przemieniana

Uwaga 15.5 Dowodzi się że PAP jest faktoryzującą algebrą von Neumanna

dwuliniowy na przestrzeni $P(H)$ tu podalgebra $B(P(H))$.

Def. 15.6 Centralnym nosicielem projekcji P (central carrier) nazywamy najmniejszy centralny projekcji Z spełniający $P \leq Z$.

Oznaczamy Co .

Def. 15.7 i) Projekcji P nazywamy nieskończoną gdy $\exists P_0 \leq P, P_0 \neq P, P \sim P_0$

Gdy P nie jest nieskończona to P nazywamy skończoną

ii) Projekcji P nazywamy właściwie nieskończoną (properly infinite) gdy $\forall Z$ -projekcja PZ -skończona $\Rightarrow PZ=0$

iii) Gdy I jest skończona to algebra A nazywamy skończoną.

Def. 15.8 Algebra von Neumanna A nazywamy algebrą:

i) typu I gdy $\exists P$ -projekcja abelowa $C_P = I$

ii) typu II gdy A nie posiada projekcji abelowych ale $\exists P$ -projekcja skończona $C_P = I$

iii) typu III gdy nie zawiera projekcji skończonych (nierozdzielnych)

Dodatkowo: iv) A jest typu I_n gdy $\exists \{P_i\}_{i=1}^n$ P_i -projekcje abelowe $P_i \perp P_j, i \neq j$
 $\sum_{i=1}^n P_i = I, P_i \sim P_j$ dla $i, j \in \{1, \dots, n\}$

v) A jest typu II_1 gdy I jest skończona oraz II_∞ gdy I jest właściwie nieskończona

vi) A jest półskończona gdy $\forall Z$ -projekcja centralna $Z \neq 0, \exists P$ -projekcja skończona $P \leq Z, P \neq 0$

Istnieje równoważny sposób definiowania tych typów:

Def. 15.8' A = alg. von Neumanna nazywamy algebrą

i) typu I gdy $\forall 0 \neq Z \in \text{Proj}(A) \cap \text{Z}(A), \exists P \in \text{Proj}(A) (P\text{-abelowa i } P \leq Z)$

ii) typu II gdy jest półskończona i nie zawiera projekcji abelowych

iii) typu III gdy nie zawiera projekcji skończonych (nierozdzielnych).

Prop. 15.9 Definicje 15.8 i 15.8' są faktograficznie równoważne.

Dowód $\rightarrow$ Najpierw dla typu I: równoważny maksymalny rozmiar

$\{P_i\}_{i \in I}$ projekcji o własnościach

a) $C_{P_i} \perp C_{P_j}$ dla $i \neq j$

b) P_i - abelowe

• (jeżeli mamy rodzinę takich rodzin to bierzemy sumę takiego zbioru dostajemy powinnę taką rodzinę $\Rightarrow$ istnieje maksymalna taka rodzina)

• Władujemy $P := \sum_{i \in I} P_i$ wtedy P - abelowa

$$\Rightarrow C_P = C_{\sum_{i \in I} P_i} = \bigvee_{i \in I} C_{P_i} = \sum_{i \in I} C_{P_i}$$

// uwaga: samo $P_i \perp P_j$ nie wystarcza aby P - abelowa ale $C_{P_i} \perp C_{P_j}$ już tak

• Dowód, że $A = \text{typu I}$ według def. 15.8' $\Rightarrow$ według def. 15.8

Bierzemy, że $C_P = I$ (P - abelowa więc to słuszny dowód)

nie wprost $C_P \neq I \Rightarrow I - C_P \neq 0 \xrightarrow[\text{def. 15.8'}]{I - C_P \text{ centralna}} \exists Q \leq I - C_P \Rightarrow$

$$\Rightarrow C_Q \leq C_{I - C_P} = I - C_P \Rightarrow C_Q \perp C_P \Rightarrow \forall_{i \in I} C_Q \perp C_{P_i} \text{ zatem } Q$$

można dołączyć do rodziny $\{P_i\}_{i \in I} \Rightarrow$ sprzeczność z maksymalnością $\Rightarrow C_P = I$

• Dowód, że $A = \text{typu I}$ według def. 15.8 $\Rightarrow$ według def. 15.8'

niech Q - abelowa, że $C_Q = I \Rightarrow 0 \neq Z = ZC_Q \xrightarrow{(*)} ZQ \neq 0$

$Z \in \text{Proj}(A) \cap Z(A), Z \neq 0$

(*) bo $ZQ = 0 \Rightarrow C_{ZQ} = 0 \xrightarrow{C_{ZQ} = ZC_Q} ZC_Q = 0$ nie a $Z \neq 0$

• Q - abelowa $\Rightarrow ZQ$ - abelowa

$ZQ \leq Z \Rightarrow ZQ$ do def. 15.8'

$\rightarrow$ Teraz dla projekcji skończonych

Def. 15.8 i 15.8' są postaci (warunki) i nie zmieniają pój. abelowości

$\Leftrightarrow$ (warunki') i nie zmieniają pój. abelowości: podobnie, że warunki $\Leftrightarrow$ warunki'

• niech $\{Q_i\}_{i \in I}$ - maksymalna rodzina projekcji o własnościach

a) $C_{Q_i} \perp C_{Q_j}$ dla $i \neq j$

b) Q_i - skończone

(uwaga: z $\langle K \rangle$ taka rodzina istnieje)

(bo dla rodziny takich rodzin (jeżeli suma tej) ma te własności)

• Władujemy $Q := \sum_{i \in I} Q_i$ wtedy Q - skończona

// uwaga: samo $Q_i \perp Q_j$ nie wystarcza aby Q - skończona ale $C_{Q_i} \perp C_{Q_j}$ już tak

$$\Rightarrow C_Q = C_{\sum_{i \in I} Q_i} = \bigvee_{i \in I} C_{Q_i} = \sum_{i \in I} C_{Q_i}$$

• dowód 15.8' $\Rightarrow$ 15.8: podobnie, że $C_Q = I$ (Q - skończona więc to słuszny dowód)

niezupewnia $C_Q \neq I \Rightarrow I - C_Q \neq 0 \xrightarrow[\text{def 15.8}]{I - C_Q \text{ centralna}} \exists R \leq I - C_Q \Rightarrow$
 $\Rightarrow C_R \leq I - C_Q \Rightarrow C_R \perp C_Q \Rightarrow \forall C_R \perp C_Q$
 $R \neq 0$

zatem R mała dodatnio do redukcji $\{Q_i\}_{i \in I} \Rightarrow$ sprzeczność z
 maksymalnością $\Rightarrow C_Q = I$

• dawad 15.8 $\Rightarrow$ 15.8': jeżeli $R = \text{abelowa}$; $\begin{matrix} Z \in \text{Proj}(A) \cap Z(A) \\ Z \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 + Z = Z C_R \xrightarrow{(*)} Z R \neq 0$ $(*)$ bo $Z R = 0 \Rightarrow C_{Z R} = 0$
 $Z C_R = Z \neq 0$

• R -składowa Z -centralna $\Rightarrow Z R$ -składowa; $Z R \leq Z \Rightarrow Z R$ jest dawa de def. 15.8'

• Zatem A typu II wedlug 15.8 $\Leftrightarrow$ wedlug 15.8'

• Ponieważ definicje 15.8 i 15.8' dla typu II są dokładnie takie
 same to mamy też

Teraz naszym celem będzie konstruacja funkcji typu II: jeżeli $\Gamma =$ melowa-
 na grupa dyskretna $\mathcal{H} = \ell^2(\Gamma) = \{x: \Gamma \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{g \in \Gamma} |x(g)|^2 < \infty\}$
 dla $x, y \in \mathcal{H}$ pórnym $(x * y)(g_0) = \sum_{g \in \Gamma} x(g_0 g^{-1}) y(g) = \sum_{g \in \Gamma} x(g_0 g) y(g^{-1})$
 } można to zapisać równoważnie jako $\sum_{g, h: gh = g_0} x(g) y(h)$ no bo $gh = g_0 \Leftrightarrow g = g_0 h^{-1}$
 $h = g^{-1} g_0$
 } i wtedy ta suma to $\sum_{g \in \Gamma} x(g) y(g^{-1} g_0) = \dots$ $g \mapsto g_0 g$ $g^{-1} \mapsto g^{-1} g_0$ $g^{-1} g_0 \mapsto g^{-1} g_0 g_0^{-1} g_0 = g^{-1}$
 $= \sum_{g \in \Gamma} x(g_0 g) y(g^{-1})$ - ok!

Uwagi 15.10 i) Ta suma jest zbieżna: dla $x \in \ell^2(\Gamma)$ jeżeli $x': \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$
 $x'(g) := x(g_0 g^{-1})$ wtedy $|(x * y)(g_0)| = \left| \sum_{g \in \Gamma} x(g_0 g^{-1}) y(g) \right| = \left| \sum_{g \in \Gamma} y(g) x'(g) \right| =$
 $= |\langle y, x' \rangle_{\ell^2(\Gamma)}| \leq \|y\| \cdot \|x'\| = \|y\| \cdot \|x\|$ bo $\|x'\| = \|x\|$

ii) to nie tylko daję, że suma jest skończona ale, że $\forall_{g \in \Gamma} |(x * y)(g)| \leq$
 $\leq \|x\| \cdot \|y\|$ co daję, że funkcja $x * y: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ jest ograniczona
 (tzn. $x * y \in \ell^\infty(\Gamma)$) a także że dla $x \in \ell^4(\Gamma)$ funkcja
 $y \mapsto (x * y)(g)$ jest ograniczona (jego norma jest $\leq \|x\|_{\ell^4(\Gamma)}$).

iii) przypominamy, że ogólnie gdzie $x \in \ell^p$, $y \in \ell^q$ to spłot $x * y \in \ell^r$ gdzie
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = 1$: gdzie więc $p = q = 2$ to mamy
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow \frac{1}{r} = 0 \Rightarrow r = \infty$ więc w pełnej ogólności nie możemy poprawić

tego, że $x * y \in \ell^\infty(\Gamma)$.

Możemy zatem rozważyć $L_x, R_x: \ell^2(\Gamma) \rightarrow \ell^\infty(\Gamma)$

$$L_x(y) := x * y \quad R_x(y) = y * x$$

określamy $e_g: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$

$$e_g(h) = \delta_{gh} = \begin{cases} 1 & h=g \\ 0 & h \neq g \end{cases}$$

- kanoniczna baza $\ell^2(\Gamma)$

Własności 15.11 i) $(e_g * x)(h) = x(g^{-1}h)$

$$ii) (x * e_g)(h) = x(hg^{-1})$$

$$iii) e_g * e_h = e_{gh}$$

$$iv) e_1 * x = x * e_1 = x$$

David i) $(e_g * x)(h) = \sum_{k \in \Gamma} e_g(hk^{-1})x(k) = \left\{ \begin{array}{l} hk^{-1}=g \\ h=gk \\ k=g^{-1}h \end{array} \right\} = x(g^{-1}h)$
(jedyną niezerującą współrzędną)

ii) $(x * e_g)(h) = \sum_{k \in \Gamma} x(hk^{-1})e_g(k) \stackrel{k=g}{=} x(hg^{-1})$

iii) $(e_g * e_h)(k) \stackrel{(i)}{=} e_h(g^{-1}k) = \left\{ \begin{array}{l} g^{-1}k=h \\ k=gh \end{array} \right\} = \delta_{k,gh} = e_{gh}(k) \Rightarrow e_g * e_h = e_{gh}$

iv) $(e_1 * x)(h) \stackrel{(i)}{=} x(1^{-1}h) = x(h) \Rightarrow e_1 * x = x * e_1 = x$

$$(x * e_1)(h) = x(h \cdot 1^{-1}) = x(h)$$

2 własności (i) i (ii) można też $\|e_g * x\| = \|x * e_g\|$ oraz słowo $e_g * e_h \stackrel{(iii)}{=} e_{gh}$

to $e_g * e_{g^{-1}} = e_{gg^{-1}} = e_1$ i $e_1 * x = x * e_1 = x$ widzimy, że operatory

L_{e_g} są izometrycznymi i są odwracalnymi: $L_{e_g}^{-1} = L_{e_{g^{-1}}}$ zatem

Wniosek 15.12 Odwracanie $\Gamma \ni g \mapsto L_{e_g}$ jest reprezentacją unitarną

David Ponieważ pokazujemy, że dla $g \in \Gamma$ operator L_{e_g} działa falizując

w $\ell^2(\Gamma)$, jest izometryczny i jest odwracalny. Ponadto $L_{e_{gh}} = L_{e_g * e_h} = L_{e_g} \circ L_{e_h}$

$$\text{no bo } (L_{e_{gh}}x)(k) = (e_{gh} * x)(k) = x((gh)^{-1}k) = x(h^{-1}g^{-1}k)$$

$$(L_{e_g}L_{e_h}x)(k) = (L_{e_h}x)(g^{-1}k) = x(h^{-1}g^{-1}k)$$

Lemat 15.13 Niech $T \in B(\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$ spełniający $\forall g, h \in \Gamma \langle T e_g, e_h \rangle = \langle x * e_g, e_h \rangle$

Wtedy $T = L_x$.

David • Wierzymy już, że $x * e_g \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle x * e_g, e_h \rangle$ ma sens oraz mamy

$$(x * e_g)(h) = \langle x * e_g, e_h \rangle \stackrel{\uparrow}{=} \langle T e_g, e_h \rangle$$

↑
wsp. Fouriera dla h

zależność

• oba funkcjonalny $y \mapsto \langle Ty, e_n \rangle$ są ciągłe (przewidywać bo $T \in B(H)$)
 $y \mapsto (x * y)(h)$

a drugi z uwagi (5.10 ii)) i z poprzedniego zgodność się na barwę
 zatem są równe $\forall y \in H$ a więc $\forall y \in H (x * y)(h) = \langle Ty, e_n \rangle = \langle Ty, h \rangle \{e_g\}_{g \in \Gamma}$

$$\Rightarrow x * y = Ty \Rightarrow T = L_x \quad \square$$

Uwaga 15.14 Ten lemat byłby prawdziwy gdyby wzięliśmy $L_x \in B(H)$ ale
 tego nie wiemy (nawet tego że $L_x y = x * y \in \ell^c(\Gamma)$): jednak gdy założymy
 że są spełnione (ten fakt T istnieje) to wtedy $L_x \in B(H)$.

Własności 15.15 Niech $x, y \in H$ są takimi że $L_x, L_y \in B(H)$. Wtedy:

(i) $L_{ax+by} = aL_x + bL_y$

(ii) $L_{x*y} = L_x \cdot L_y$

(iii) $L_x^* = L_{x^*}$ gdzie $x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}$

(iv) $L_{e_1} = I$ (v) $L_x = L_y \Leftrightarrow x = y$

Dowód (i) $((ax+by) * z)(h) = \sum_{g \in \Gamma} (ax+by)(hg^{-1}) z(g) = \sum_{g \in \Gamma} (ax(hg^{-1}) + by(hg^{-1})) z(g)$
 $= a \sum_{g \in \Gamma} x(hg^{-1}) z(g) + b \sum_{g \in \Gamma} y(hg^{-1}) z(g) = a(x * z)(h) + b(y * z)(h) \Rightarrow (ax+by) * z =$
 $= ax * z + by * z \Rightarrow L_{ax+by} = aL_x + bL_y$

(ii) Po pierwsze L_{x*y} ma sens bo $x * y \in H$ bo $x * y = x * (y * e_1) =$
 $= L_x L_y e_1$ i teraz skorzystamy z lematu:

$$\langle L_{x*y}(e_g), e_n \rangle = \langle (x * y) * e_g, e_n \rangle = [(x * y) * e_g](h) = \sum_{k \in \Gamma} (x * y)(hk^{-1}) e_g(k) \stackrel{k=g}{=} (x * y)(hg^{-1})$$

$$\langle L_x L_y(e_g), e_n \rangle = x * (y * e_g)(h) = \sum_{k \in \Gamma} x(hk^{-1}) (y * e_g)(k) = \sum_{k \in \Gamma} x(hk^{-1}) y(kg^{-1}) =$$

$$= \sum_{k \in \Gamma} x(hg^{-1}(kg^{-1})^{-1}) y(kg^{-1}) \stackrel{kg^{-1} \mapsto k}{=} \sum_{k \in \Gamma} x(hg^{-1}k^{-1}) y(k) = (x * y)(hg^{-1})$$

wycie wychodzi to samo i z lematu $L_{x*y} = L_x L_y$ (wzł. T patrz)

(iii) $\langle L_x^*(e_g), e_n \rangle = \langle e_g, L_x(e_n) \rangle = \langle L_x(e_n), e_g \rangle = L_x(e_n)(g) =$
 $= \overline{(x * e_n)(g)} = \overline{x(gh^{-1})}$

$$\langle L_{x^*}(e_g), e_n \rangle = L_{x^*}(e_g)(h) = (x^* * e_g)(h) = x^*(hg^{-1}) = \overline{x((hg^{-1})^{-1})} =$$

$$= \overline{x(gh^{-1})} \quad \text{i wyszło to samo.}$$

(iv) To już było bo $(x * e_g)(h) = x(hg)$ w szczególności $(e_1 * x)(h) = x(h) \Rightarrow$
 $(e_g * x)(h) = x(g^{-1}h) \Rightarrow e_g * x = x \Rightarrow L_{e_g} = I$

• (v) Gdy $x=y$ to oczywiście $L_x = L_y$; gdy $L_x = L_y$ to $\forall_{g \in \Gamma}$:

$$\begin{aligned} \langle L_x e_1, e_g \rangle &= L_x(e_1)(g) = (x * e_1)(g) = x(g) \\ \langle L_y e_1, e_g \rangle &= L_y(e_1)(g) = (y * e_1)(g) = y(g) \end{aligned} \Rightarrow x=y$$

Tw. 15.16 Utwórz $L_\Gamma = \{L_x : x \in \Gamma, L_x \in B(\Gamma)\}$ i $R_\Gamma = \{R_x : x \in \Gamma, R_x \in B(\Gamma)\}$
 są algebraami von Neumanna sprzężonymi $L_\Gamma' = R_\Gamma$.

Dowod. • 2 poprzednie własności widujemy L_Γ i R_Γ są $*$ -algebraami

• $L_\Gamma \subseteq R_\Gamma'$ bo: $T \in L_\Gamma \Rightarrow \exists_{x \in \Gamma} T = L_x$ i dla $S \in R_\Gamma$ postaw $S = R_y$ jest
 $R_\Gamma \subseteq L_\Gamma'$
 $TS = L_x R_y \stackrel{(*)}{=} R_y L_x = ST \quad (*) \quad \left. \begin{aligned} L_x R_y(z) &= x * (y * z) \\ R_y L_x(z) &= (x * z) * y \end{aligned} \right\} \text{Łączność}$

• Podalimy $R_\Gamma' \subseteq L_\Gamma$: weźmiemy $T \in R_\Gamma'$: $\forall_{g, h \in \Gamma}$ mamy

$$\begin{aligned} \langle T e_g, e_h \rangle &= \langle T(e_1 * e_g), e_h \rangle = \langle \overset{r}{T} \overset{Te R_\Gamma'}{R_{e_1}}(e_1), e_h \rangle = \langle R_{e_1} T(e_1), e_h \rangle = \\ &= \langle T(e_1 * e_g), e_h \rangle = \langle L_{T(e_1)}(e_g), e_h \rangle \stackrel{\text{lemat}}{\Rightarrow} T = L_{T(e_1)} \Rightarrow T \in L_\Gamma \end{aligned}$$

• Zatem $L_\Gamma \subseteq R_\Gamma' \subseteq L_\Gamma \Rightarrow L_\Gamma = R_\Gamma' \Rightarrow L_\Gamma'' = R_\Gamma''' = R_\Gamma' = L_\Gamma \Rightarrow L_\Gamma$ jest
 alg von Neumanna (no i wtedy R_Γ także)

Fakt 15.17 L_Γ jest generowana przez $\{L_{e_g} : g \in \Gamma\}$ i podobnie R_Γ jest
 generowana przez $\{R_{e_g} : g \in \Gamma\}$.

Dowod. • Wznowiliśmy w 15.12, że L_{e_g} i R_{e_g} są unitarne (w szczególności
 $\in B(\Gamma)$). Oznaczmy $R := W^*(\{R_{e_g} : g \in \Gamma\})$ $L = W^*(\{L_{e_g} : g \in \Gamma\})$

• Wtedy $R \subseteq R_\Gamma$ bo mamy już że R_Γ jest v.N. oraz $\forall_{g \in \Gamma} R_{e_g} \in R_\Gamma$

• Na odwrót, gdy $T \in R' \Rightarrow T \in \{R_{e_g} : g \in \Gamma\}'$ {de facto
 $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} T \in L_\Gamma$ $(*)$ przesłuchanie dowodu tw. 15.16: pokazujemy, że $R' = \{R_{e_g} : g \in \Gamma\}'$
 $R_\Gamma' \subseteq L_\Gamma$ konsekwentny tytuł z komutacją z R_{e_g}

$$\text{skąd} \quad \left\{ \begin{aligned} R &\subseteq R_\Gamma \\ R' &\subseteq L_\Gamma \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \begin{aligned} R_\Gamma' &\subseteq R' \subseteq L_\Gamma \\ &\stackrel{L_\Gamma}{\Rightarrow} \end{aligned} \Rightarrow R' = L_\Gamma = R_\Gamma' \Rightarrow R'' = R_\Gamma''$$

bo R jest v.N. $\quad R_\Gamma''$

i analogicznie $L = L_\Gamma$

Fakt 15.18 e_1 jest unitarnym generującym L_Γ i R_Γ .

Dowod. Przekształcamy $\forall x \in \Gamma$ jest generującym dla A gdy $\overline{Ax} = \Gamma$

Skoro $L_{e_g}(e_1) = e_g * e_1 = e_{g \cdot 1} = e_g = e_1 * e_g = R_{e_g}(e_1)$ to L_{e_1} i R_{e_1} zachowują bazy $\mathcal{H} = \{e_i\} \Rightarrow L_{e_1} = R_{e_1} = \mathcal{H} \Rightarrow e_1$ jest generującym

Lemma 15.19 Wektor generujący jest jednoznacznie określonym wektorem

Ogólnie mamy $\mathfrak{g}$ -działanie dla $A \Leftrightarrow \mathfrak{g}$ -separujący dla A'

(Tzn. $\forall_{A \in \mathfrak{A}} (A\mathfrak{g} = 0 \Rightarrow A = 0)$). Skoro $L_{e_1}^* = R_{e_1}$ i e_1 jest działającym dla L_{e_1} i R_{e_1} to jest też jednocześnie $R_{e_1}^* = L_{e_1}$ separujący dla L_{e_1} i R_{e_1} .

Tw. 15.20 L_{e_1} i R_{e_1} są skończone.

Dowód • Wchodzimy w poprzednich rachunkach, że $\langle L_x L_y e_g, e_h \rangle = (x * y)(hg^{-1})$ stąd mamy:

$$\langle L_x L_y e_g, e_g \rangle = (x * y)(gg^{-1}) = (x * y)(1) = \sum_{h \in \Gamma} x(h^{-1}) y(h) \stackrel{h \mapsto h^{-1}}{=} \sum_{h \in \Gamma} y(h^{-1}) x(h) = (y * x)(1) = \langle L_y L_x e_g, e_g \rangle$$

• Prawdą jest, że I jest skończona; gdy $P \sim I \Rightarrow \exists_{V \in L_{e_1}} P = V^* V$
 $V \in L_{e_1} \Rightarrow \exists_{x \in \Gamma} V = L_x$ i mamy:

$$\begin{aligned} \langle P e_g, e_g \rangle &= \langle V^* V e_g, e_g \rangle = \langle L_x^* L_x e_g, e_g \rangle = \langle L_x^* L_x e_g, e_g \rangle \stackrel{\text{pozytywne}}{=} \\ &= \langle L_x L_x^* e_g, e_g \rangle = \langle L_x L_x^* e_g, e_g \rangle = \langle V V^* e_g, e_g \rangle = \langle I e_g, e_g \rangle = \langle e_g, e_g \rangle \\ &\Rightarrow \forall_{g \in \Gamma} \langle (I - P) e_g, e_g \rangle = 0 \Rightarrow \forall_{g \in \Gamma} \| (I - P) e_g \|^2 = 0 \Rightarrow \forall_{g \in \Gamma} (I - P) e_g = 0 \end{aligned}$$

W szczególności $(I - P) e_1 = 0 \xrightarrow{\text{separujący}} I - P = 0 \Rightarrow P = I$.

• Dla R_{e_1} równieży analogicznie.

Def. 15.21 Grupa Γ nazywamy icc grupą (infinitely conjugacy classes) gdy $\forall_{h \neq 1} \# \{ghg^{-1} : g \in \Gamma\} = \infty$

Tw. 15.22 Jeżeli Γ = dyshweta (preludat) icc grupy to L_{e_1} i R_{e_1} są faktorem typu II_1 .

Dowód • L_{e_1} i R_{e_1} są niezdegenerowane względem $\{L_{e_g} : g \in \Gamma\}$ i

$\{R_{e_g} : g \in \Gamma\}$ tworzą zbiory liniowo niezależne bo up. gdy

$$c_1 L_{e_{g_1}} + \dots + c_n L_{e_{g_n}} = 0 \Rightarrow L_{c_1 e_{g_1} + \dots + c_n e_{g_n}} = 0 = L_0 \Rightarrow c_1 e_{g_1} + \dots + c_n e_{g_n} = 0$$

no ale LHS to funkcja $x: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ ze $x(g_n) = c_n$ zatem

$$x = 0 \Rightarrow \forall_{n=1, \dots, n} c_n = 0; \text{ analogicznie rozumujemy dla } R_{e_g}.$$

• Prawdą jest, że L_{e_1} to faktoryzacja: $L_x \in L_{e_1} \cap L_{e_1}^* \Rightarrow \forall_{g \in \Gamma} \begin{matrix} L_x \cdot L_{e_g} = L_{e_g} \cdot L_x \\ L_{x e_g} = L_{e_g x} \end{matrix}$

$$\Rightarrow x * e_g = e_g * x \Rightarrow \bigvee_{h \in \Gamma} (x * e_g)(h) = (e_g * x)(h) \quad \text{podstawiając } h \mapsto gh \text{ mamy}$$

$$x(ghg^{-1}) = x(g^{-1}gh) = x(h) \quad x(hg^{-1}) \quad x(g^{-1}h)$$

- zatem gdy $L_x \in Z(L(\Gamma)) \Rightarrow x$ - stały na lewoj conjugacy class no ale $x \in \ell^2(\Gamma)$ więc gdzieś $x(h) \neq 0$ to dostajemy sprzeczność bo $\#\{ghg^{-1} : g \in \Gamma\} = \infty$ zatem jedynę $h \in \Gamma$ że $x(h) \neq 0$ to $h=1$ zatem $\exists x = ce_1$ i wtedy $L_x = L_{ce_1} = cL_{e_1} = cI \in \mathbb{C}I$.

- Analogicznie dostajemy $Z(R(\Gamma)) = \mathbb{C}I$

Przykład 15.23 a) Niech $\Gamma = \mathbb{F}_n$ gdzie $n \geq 2$ (grupa wolna o n generatorach)

Niech $x \in \mathbb{F}_n$ wtedy $\#\{yxy^{-1} : y \in \mathbb{F}_n\} = \infty$: prawdziwe w module wolnej postaci x zawiera się i każdy odp. na (dowodźmy dla $n=2$)

$\rightarrow x = a \dots a^{-1}$ wtedy $y_n = b^n$ daje różne $y_n x y_n^{-1}$; taki samo $x = a^{-1} \dots a$; podobnie dla $x = b \dots b^{-1}$ $y_n = a^n$ sq daje (1 dla $x = b^{-1} \dots b$)

$\rightarrow x = a \dots b$ wtedy $y_n = b^n$ sq da; dla $x = a^{-1} \dots b^{-1}$ $y_n = b^{-n}$ sq da.

$\rightarrow x = a \dots b^{-1}$ wtedy $y_n = a^n$ sq da itp.

b) Niech $\Gamma = \Pi = \{\theta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \theta \text{ - permutacja}, \#\{n \in \mathbb{Z} : \theta(n) \neq n\} < \infty\}$

Wtedy Π jest faktoryzującą prealgebrą: niech $\theta \neq \text{id}$; niech

$n_0 := \min\{n \in \mathbb{Z} : \theta(n) \neq n\}$ (najmniejsza luka w "niezmiennie" - który jest stałymi) i niech $\tilde{\theta}_m = \text{transpozycja } m \in \mathbb{Z} \text{ oraz } n_0$ wtedy $\tilde{\theta}_m^{-1} = \tilde{\theta}_m$

i gdy $m < n_0$ to mamy, że $\tilde{\theta}_m \tilde{\theta}_m = \tilde{\theta}_m \tilde{\theta}_m$ i to działa na $m \mapsto n_0 \mapsto \theta(n_0) \mapsto \theta(n_0)$ (bo $\tilde{\theta}_m$ zmieni tylko $m \leq n_0$ no a $\theta(n_0) > n_0$)

więc dla wszystkich $m < n_0$ dostajemy różne permutacje sqd

$$\#\{\theta' \tilde{\theta}_m^{-1} : \theta' \in \Pi\} \geq \#\{\tilde{\theta}_m \tilde{\theta}_m^{-1} : m < n_0\} = \infty //$$

Widzimy zatem że $L_{\mathbb{F}_n}$ i L_{Π} produkują faktoryzującą typy II_1 .

Tw. 15.24 Algebry $L_{\mathbb{F}_2}$ i L_{Π} nie są $\ast$ -izomorficzne.

Dowód. • Określimy $a, b = \text{generatory } \mathbb{F}_2$; $1_{\mathbb{F}_2}, 1_{\Pi} = \text{jednostka w tych grupach}$. Pokażemy że w $L_{\mathbb{F}_2}$ mamy następującą własność

$$\forall u \in L(\mathbb{F}_2) \quad (u e_{1_{\mathbb{F}_2}}, e_{1_{\mathbb{F}_2}}) = 0 \Rightarrow \text{jedną z liczb } t_a := \|(u L_a - L_a u) e_{1_{\mathbb{F}_2}}\|$$

jest $> \frac{1}{25}$ zot w L_π : $\forall A_1, A_2 \in L_\pi \exists \vec{v} \in U(L_\pi) (\langle \vec{v}_{A_1}, \vec{v}_{A_2} \rangle = 0)$

$$\|(\nabla A_j - A_j \nabla) e_{1\pi}\| < \varepsilon \quad (j=1,2).$$

$$t_a^2 = \|(\nabla L_a - L_a \nabla) e_{1\pi}\|^2 \stackrel{\substack{L_a^* = L_a^* \\ \text{normalizujemy} \\ \text{lewy}}}{=} \|(\nabla L_a^* \nabla L_a - \nabla) e_{1\pi}\|^2$$

skoro $U \in L_\pi \Rightarrow \exists_{x \in H} U = L_x$ wyc

$$t_a^2 = \|(\nabla_{L_a}^* L_x L_a - L_x) e_{1\pi}\|^2 = \|(\underbrace{L_a^* L_x L_a}_{= L_{a^* x a}} - L_x) e_{1\pi}\|^2 =$$

$$= \|e_{a^*} x^* e_a - x\|^2 = \sum_{g \in \mathbb{F}_2} |(e_{a^*} x^* e_a)(g) - x(g)|^2 = \sum_{g \in \mathbb{F}_2} |x(a g a^{-1}) - x(g)|^2$$

• dla danego $S \subseteq \mathbb{F}_2$ wyc $t_a^2 = \sum_{g \in \mathbb{F}_2} |x(a g a^{-1}) - x(g)|^2 \geq \sum_{g \in S} |x(a g a^{-1}) - x(g)|^2$

omawiając $y_a(g) := x(a g a^{-1})$ $t_a^2 \geq \sum_{g \in S} |y_a(g) - x(g)|^2 = \|y_a - x\|_S^2$ gdzie

$\|\cdot\|_S$ to norma w $\ell^2(S)$: tak samo $t_b^2 \geq \|y_b - x\|_S^2$

• Twierdzenie: $|\|y_a\|_S^2 - \|x\|_S^2| \leq 2t_a$

$$|\|y_a\|_S^2 - \|x\|_S^2| = |\|y_a\|_S - \|x\|_S| \cdot (\|y_a\|_S + \|x\|_S)$$

Skorzystaj z nierówności: $t_a \geq \|y_a - x\|_S \geq |\|y_a\|_S - \|x\|_S|$ L_x -unitarny

drugi nierówności $\|y_a\|_S \leq \|y_a\| = \|e_{a^*} x^* e_a\| = \|x\| = \|L_x e_{1\pi}\| = \|e_{1\pi}\| = 1$
 $\|x\|_S \leq \|x\|$

$$\text{zatem } \|y_a\|_S + \|x\|_S \leq 1 + 1 = 2$$

• Om. $z_a(g) := x(a^{-1} g a)$ i z powyższego + z danym S zastępując $a^{-1} S a$

$$|\|y_a\|_{a^{-1}S a}^2 - \|x\|_{a^{-1}S a}^2| = \dots \Rightarrow \|y_a\|_{a^{-1}S a}^2 = \|x\|_S^2 \text{ zaś } \|z_a\|_{a^{-1}S a}^2 = \|z_a\|_S^2 \dots = |\|x\|_S^2 - \|z_a\|_S^2| \leq 2t_a$$

• Om. (dla wygody) $\mu(S) := \|x\|_S^2 (= \sum_{g \in S} |x(g)|^2)$ wtedy powyższe się tłumaczy

$$|\mu(a S a^{-1}) - \mu(S)| \leq 2t_a \quad \text{i tak samo} \quad |\mu(b S b^{-1}) - \mu(S)| \leq 2t_b$$

$$|\mu(S) - \mu(a^{-1} S a)| \leq 2t_a \quad |\mu(S) - \mu(b^{-1} S b)| \leq 2t_b$$

• S było danym: wielki tenar $S = \{w \in \mathbb{F}_2 : w \text{ zaczyna się na } "a" \text{ lub na } "a^{-1}"\}$

Wtedy trzy zbiory: $S, b S b^{-1}$ i $b^{-1} S b$ są rozłączne (ponieważ po pierwszym symbolu); $S \cup b S b^{-1} \cup b^{-1} S b = \mathbb{F}_2 \setminus \{1_{\mathbb{F}_2}\}$ (jakoś chodzi o pierwszy symbol

to faktycznie w tej samej mowie on był a, a^{-1}, b, b^{-1} : końcówka też jest

dużo starsza w $b S b^{-1}$ niż musi się kończyć na b^{-1} bo starsza w S może się kończyć na $a b^{-1}$ i wtedy dostajemy $"... a b b^{-1} = "... a"$ itd.)

- Wznowas dla jednego z tych wznowow $\mu(\dots) \leq \frac{1}{3}$ bo gdeley $\mu(S), \mu(bSb^{-1}), \mu(b^{-1}Sb) > \frac{1}{3} \Rightarrow 1 = \mu(\mathbb{T}) \geq \mu(S \cup bSb^{-1} \cup b^{-1}Sb) =$ rozłączne
 $= \mu(S) + \mu(bSb^{-1}) + \mu(b^{-1}Sb) > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$
- Teraz $X(1_{\mathbb{T}}) = (X * e_{1_{\mathbb{T}}})(1_{\mathbb{T}}) = \langle L_X e_{1_{\mathbb{T}}}, e_{1_{\mathbb{T}}} \rangle = 0$ z założenia 0
 $U = L_X$

zatem $1 = \|X\|^2 = \|X\|_{\mathbb{T} \setminus \{1_{\mathbb{T}}\}}^2 = \mu(\mathbb{T} \setminus \{1_{\mathbb{T}}\})$

- Co więcej $S \cup a^{-1}Sa = \mathbb{T} \setminus \{1_{\mathbb{T}}\}$ (nie twierdzimy że te zbiory są rozłączne bo np. $a^2 \in S \cap a^{-1}Sa$) bo w $a^{-1}Sa$ są wszystkie słowa zamykające się na b ; b^{-1} (zaley dostać $b^{\pm}(\dots)$ bierzemy $ab^{\pm}(\dots)a^{\pm} \in S$)

• Skoro $\mu(\mathbb{T} \setminus \{1_{\mathbb{T}}\}) = 1 \Rightarrow \left(\mu(S) \geq \frac{1}{2} \text{ lub } \mu(a^{-1}Sa) \geq \frac{1}{2} \right)$
 $S \cup a^{-1}Sa = \mathbb{T} \setminus \{1_{\mathbb{T}}\}$

- Twierdzimy że (*) $\mu(S) \leq \frac{1}{3} + 2t_b$ co dalej dla $\frac{1}{2} - 2t_a \leq \frac{1}{3} + 2t_b \Rightarrow$
 $\frac{1}{2} - 2t_a \leq \mu(S)$

$\Rightarrow 2t_a + 2t_b \geq \frac{1}{6} \Rightarrow t_a + t_b \geq \frac{1}{12} \Rightarrow t_a \geq \frac{1}{25} \text{ lub } t_b \geq \frac{1}{25}$

- Ponostaje pokazać (*): $\sim$ jeżeli zachodzi $\mu(S) \leq \frac{1}{3}$ tym bardziej $\Rightarrow \mu(S) \leq \frac{1}{3} + 2t_b$
 nie może wtedy zachodzić $\mu(S) \geq \frac{1}{2}$ więc $\mu(a^{-1}Sa) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2t_a \geq \underbrace{\mu(a^{-1}Sa)}_{\geq \frac{1}{2}} - \underbrace{\mu(S)}_{\leq \frac{1}{3}} = \mu(a^{-1}Sa) - \mu(S) \geq \frac{1}{2} - \mu(S) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(S) \geq \frac{1}{2} - 2t_a$

- $\rightarrow$ jeżeli zachodzi $\mu(bSb^{-1}) \leq \frac{1}{3}$ to skąd $|\mu(bSb^{-1}) - \mu(S)| \leq 2t_b \Rightarrow$
 $\Rightarrow -2t_b \leq \mu(bSb^{-1}) - \mu(S) \leq 2t_b \Rightarrow \mu(S) \leq \mu(bSb^{-1}) + 2t_b \leq \frac{1}{3} + 2t_b$

i gdy $\mu(S) \geq \frac{1}{2}$ to dla tym bardziej $\mu(S) \geq \frac{1}{2} - 2t_a$ gdyż zaś $\mu(a^{-1}Sa) \geq \frac{1}{2}$ to $|\mu(S) - \mu(a^{-1}Sa)| = \mu(a^{-1}Sa) - \mu(S) \leq 2t_a \Rightarrow$

• $\Rightarrow \mu(S) \geq \mu(a^{-1}Sa) - 2t_a \geq \frac{1}{2} - 2t_a$

$\rightarrow$ wznowas dla przypadku $\mu(b^{-1}Sb) \leq \frac{1}{3}$ argument jest analogiczny.

- Teraz przechodzimy do L_{Π} : weźmy $A_1, A_2 \in L_{\Pi}$, $A_1 = L_{x_1}$, $A_2 = L_{x_2}$
 ustalmy elementy Π w ciąg $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, jest $\varepsilon > 0$

• i znaleźć $n_0 \in \mathbb{N}$ które nie tyle by $\sum_{k > n_0} |x_j(g_k)|^2 < (\frac{\varepsilon}{2})^2$ $j=1,2$.

• potem y_j ($j=1,2$) $y_j(g_k) = \begin{cases} x_j(g_k) & k \leq n_0 \\ 0 & k > n_0 \end{cases}$ i $B_j = L_{y_j}$

wtedy $\|(A_j - B_j)e_{1\pi}\|^2 = \|x_j * e_{1\pi} - y_j * e_{1\pi}\|^2 = \|x_j - y_j\|^2 = \sum_{k > n_0} |x_j(g_k)|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2$

• dobieramy me $\mathbb{N}$ duże na tyle aby każda z permutacji

$g_1, \dots, g_{n_0}$ miała miejsce w $\{-m, \dots, m\}$ (da się bo jest ich skończona ilość)

i wtedy $g =$ transpozycja zamieniająca $m+1$ z $m+2$

• Wtedy $\forall_{k=1, \dots, n_0} gg_k = g_k g$ (bo g nieusza $\{-m, \dots, m\}$) i trójkątne, że

$$L_{e_g} B_j = B_j L_{e_g} : B_j = L_{y_j} = L_{x_j(g_1)e_{g_1} + \dots + x_j(g_{n_0})e_{g_{n_0}}} = x_j(g_1)L_{e_{g_1}} + \dots + x_j(g_{n_0})L_{e_{g_{n_0}}}$$

i L_{e_g} komutuje z każdym składnikiem:

$$L_{e_{g_k}} \cdot L_{e_g} = L_{e_{g_k} * e_g} = L_{e_{g_k g}} = L_{e_{g g_k}} = L_{e_g * e_{g_k}} = L_{e_g} \cdot L_{e_{g_k}}$$

• Stacujemy: $\|L_{e_g}(A_j - B_j)e_{1\pi}\| \stackrel{L_{e_g} \text{ - unitarny}}{=} \|(A_j - B_j)e_{1\pi}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (było wyżej)

$$\|(A_j - B_j)L_{e_g}e_{1\pi}\| = \|(A_j - B_j)e_g\| = \|x_j * e_g - y_j * e_g\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(x_j * e_g)(g_k) - (y_j * e_g)(g_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$= e_g * e_{1\pi} = e_g$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_j(g_k g^{-1}) - y_j(g_k g^{-1})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_j(g_k) - y_j(g_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

• Zatem $\|(L_{e_g} A_j - A_j L_{e_g})e_{1\pi}\| = \|L_{e_g} A_j e_{1\pi} - A_j L_{e_g} e_{1\pi}\| =$

$$= \|L_{e_g} A_j e_{1\pi} - L_{e_g} B_j e_{1\pi} + B_j L_{e_g} e_{1\pi} - A_j L_{e_g} e_{1\pi}\| \leq$$

$$\leq \|L_{e_g}(A_j - B_j)e_{1\pi}\| + \underbrace{\|(B_j - A_j)L_{e_g}e_{1\pi}\|}_{\text{bo są sobie równe}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

• jakby co to L_{e_g} - unitarny i $\langle L_{e_g}e_{1\pi}, e_{1\pi} \rangle = \langle e_g, e_{1\pi} \rangle = 0$ zatem

$V := L_{e_g}$ jest dx