

Noncommutative geometry 11

• Ten ośmiony przez Charlesa Allena i Nila Weavera: $B(H)$ posiada stan wysty, który nie jest multiplikatywny na żadnej MASie (maximally abelian subalgebra).
Chase się, że w dowodzie jest używana hipoteza continuum!

• Niech $M \subseteq B(H)$ to MASA oraz $\pi: B(H) \rightarrow Q(H)$
kanoniczna suriekcja na alg. Cartana $Q(H) := \frac{B(H)}{K(H)}$

Pokazemy natomiast, że $\pi(M) \subseteq Q(H)$ też jest MASA:

w tym celu będziemy potrzebowali pewnych rezultatów dotyczących deriwacji: niech $\mathcal{A}$ = algebra v.n. $\subseteq B(H)$

Def. 56.41 i) Deriwacją z $\mathcal{A}$ do $K(H)$ nazywamy liniowe odwzorowanie $D: \mathcal{A} \rightarrow K(H)$ spełniające $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$

$$D(A_1 A_2) = A_1 D(A_2) + D(A_1) A_2$$

ii) deriwacja $D: \mathcal{A} \rightarrow K(H)$ nazywamy wewnętrzny gdy

$$\exists K \in K(H) \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad D(A) = AK - KA = [A, K] \quad \text{wtedy } D = [\cdot, K]$$

Lemat 56.42 Załóżmy, że algebra $\mathcal{A}$ ma własność, że

dawna deriwacja $D: \mathcal{A} \rightarrow K(H)$ jest wewnętrzna.

Wówczas $\mathcal{A}$ ma następującą własność: „jeżeli $B \in B(H)$

jest takie, że $\forall A \in \mathcal{A} \quad AB - BA \in K(H) \Rightarrow B \in \mathcal{A}' + K(H)$ ”.

Dawid • Załóżmy że B ma taką własność: wtedy $D := [-, B]$ (jest deriwacją (rownie) o wartościach w $K(H)$ (z zał. własności B))

• z założenia D musi być wewnętrzna $\Rightarrow \exists_{K \in K(H)} [-, B] = [-, K]$

$$\Rightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}} AB - BA = AK - KA \Leftrightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}} A(B-K) = (B-K)A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B-K \in \mathcal{A}' \Rightarrow B \in \mathcal{A}' + K(H) \quad \square$$

Twar użyjemy następującego ogólnego rezultatu (zob.

B. Johnson, S. Parrott "Operators Commuting with a von Neumann

Algebra Modulo the Set of Compact Operators")

Tw. 56.43 Niech $\mathcal{A}$ będzie premienną algebrą von Neumanna. Wtedy każda deriwacja $\mathcal{A} \rightarrow K(H)$ jest wewnętrzna

Przy użyciu tego tw. i lematu możemy pisać:

Tw. 56.44 $\mathcal{M} = MASA$ w $\mathcal{B}(H) \Leftrightarrow \pi(\mathcal{M}) = MASA$ w $\mathcal{Q}(H)$.

Dawid • Chcemy pokazać że gdy jakiś element

$\pi(B)$ komutuje z całym $\pi(\mathcal{M}) \Rightarrow \pi(B) \in \pi(\mathcal{M})$

• Mamy $\forall_{A \in \mathcal{M}} [\pi(A), \pi(B)] = 0 \Leftrightarrow \forall_{A \in \mathcal{M}} \pi([A, B]) = 0$

$\Leftrightarrow \forall_{A \in \mathcal{M}} [A, B] \in K(H) \Leftrightarrow [-, B]: \mathcal{M} \rightarrow K(H)$ jest deriwacją

• Skoro $\mathcal{M} = \text{premienna}$ ^{Tw. 56.43} $\Rightarrow [-, B]$ jest wewnętrzna

$\Rightarrow \exists_{K \in K(H)} [-, B] = [-, K] \Rightarrow \dots$ tak jak w dawidzie lemat

$$B-K \in \mathcal{M}' = \mathcal{M} \Rightarrow \pi(B-K) \in \pi(\mathcal{M}) \quad \square$$

$\downarrow$ bo $\mathcal{M} = MASA$
 $\pi(B) - \pi(K)$
 $\pi(B)$

Dalej udowodnimy nieco techniczny (ale ciekawy sam w sobie) rezultat:

Tw. 56.45 Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$
 $\mathcal{A}$ = osrodkowa C^* -algebra ; $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \text{diag}$

stancu na ft. Wawras $\exists (p_n)_{n=1}^{\infty}$ p_n - paramy ortogonalne
 propelece niestawne w $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$
 spawajace $\forall a \in \mathcal{A} \quad p_n a p_n = f_n(a) p_n$.

David • Robimy GNS dla f_n -ow dostajac $\bar{\pi}_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$
 i $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ ze $\forall a \in \mathcal{A} \quad f_n(a) = \langle \bar{\pi}_n(a) \xi_n, \xi_n \rangle_{\mathcal{H}_n}$

• Niech $\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_n^{\oplus \infty}$ (suma prosta ko kopii tej samej $\mathcal{H}_n$)

i podobnie $\bar{f}_n := \bar{\pi}_n^{\oplus \infty}$ tzn. $\bar{f}_n: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ i dla $n \in \mathbb{N}$

wedk $\xi_{nk} \in \mathcal{H}_n$

$$\begin{aligned} \xi_{n1} &= \xi_n \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \\ \xi_{n2} &= 0 \oplus \xi_n \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \\ \xi_{n3} &= 0 \oplus 0 \oplus \xi_n \oplus 0 \oplus \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

• Wawras $\langle \bar{f}_n(a) \xi_{nj}, \xi_{nk} \rangle_{\mathcal{H}_n} = \delta_{jk} f_n(a)$ no bo

$$\text{LHS} = \langle \bar{\pi}_n^{\oplus \infty}(a) (0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \underbrace{\xi_n}_{(j)} \oplus 0 \oplus \dots), 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \underbrace{\xi_n}_{(k)} \oplus 0 \oplus \dots \rangle_{\mathcal{H}_n} =$$

$$= \langle 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \underbrace{\bar{\pi}_n(a) \xi_n}_{(j)} \oplus 0 \oplus \dots, 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus \underbrace{\xi_n}_{(k)} \oplus 0 \oplus \dots \rangle_{\mathcal{H}_n} =$$

= gdy $j \neq k$ to wszystkie skladniki sa zerowe: mamy $\langle 0, 0 \rangle_{\mathcal{H}_n} = 0$
 i $\langle 0, \xi_n \rangle$: zatem aby to bylo nierowne to $j=k$

$$= \delta_{jk} \langle \bar{\pi}_n(a) \xi_n, \xi_n \rangle = \delta_{jk} f_n(a)$$

• Niech $Q_n = \text{propeleca na } \text{lin}\{\xi_{nk} : k \in \mathbb{N}\}$ czyli $Q_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$

(to jest propeleca na „kopii wyzszego ℓ^2 zamienionego w

$\mathcal{H}_n$, izomorfizm to $\ell^2 \ni (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k \xi_{nk} \in \text{lin}\{\xi_{nk} : k \in \mathbb{N}\}$).

Q_n jako operator na $\mathcal{H}_n := \mathcal{H}_n^{\oplus \infty}$ ma postac blokowo-matrycowy

i jest blokowo diagonalny $\text{diag}(|\xi_n \rangle \langle \xi_n|, |\xi_n \rangle \langle \xi_n|, \dots)$

$$\begin{aligned}
 \text{tak. } Q_n &= | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots \Rightarrow Q_n g(a) Q_n = \\
 &= (| \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots) (\pi_n(a) \oplus \pi_n(a) \oplus \dots) (| \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots) \\
 &= | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \pi_n(a) | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \pi_n(a) | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots = \\
 &= \langle \pi_n(a) \xi_n, \xi_n \rangle | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \langle \pi_n(a) \xi_n, \xi_n \rangle | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots \\
 &= g_n(a) | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus g_n(a) | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots = g_n(a) (| \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus | \xi_n \rangle \langle \xi_n | \oplus \dots) \\
 &= g_n(a) Q_n
 \end{aligned}$$

- Jeszcze raz suma prosta: $\mathcal{K} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$ $\mathcal{H} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$;
 rozszerzamy Q_n do operatora na $\mathcal{K}$ w sposób $Q_n \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$
 $\oplus 0 \oplus Q_n \oplus 0 \oplus \dots$ (zachowujemy notację) a więc w dalszym ciągu

$$Q_n g(a) Q_n = g_n(a) Q_n$$

(obie strony są zerowe na k -tej pozycji dla $k \neq n$; LHS = $Q_n g(a) Q_n$ na n -tej pozycji)
 zob. po dowodzie Tw 56.50

- Wykonywamy Tw. Voiculescu, które daje istnienie izometrii $V: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$
 $\leftarrow$ wymaga pm. Hilberta

spełniający:

$$\pi(P) \text{ a } \pi(P)^* = \pi(V g(a) V^*)$$

tutaj $P = \text{nut}$ na obszar V a więc $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\pi(P) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$
 ma sens π to kanoniczne odwzorowanie $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{H})$: $a \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ a więc
 LHS to elementy w $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$; z prawej mamy $\mathcal{H} \xrightarrow{V^*} \mathcal{K} \xrightarrow{g(a)} \mathcal{K} \xrightarrow{V} \mathcal{H}$
 a więc $V g(a) V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\pi(V g(a) V^*) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ (ma sens)

- Władząc $p_n = \pi(V Q_n V^*) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ dostajemy iż dane podokreślenie:
 $\Rightarrow p_n = 0 \Leftrightarrow \pi(V Q_n V^*) = 0 \Leftrightarrow V Q_n V^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow V^* V Q_n V^* V \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$

$\Leftrightarrow Q_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ale $Q_n = \text{nieskończona wymiarowa}$
 więc $Q_n \notin \mathcal{K}(\mathcal{H})$ i $p_n \neq 0$

$$\Rightarrow p_n p_m = \pi(V Q_n V^*) \pi(V Q_m V^*) = \pi(V Q_n V^* V Q_m V^*) = \pi(V \underbrace{Q_n Q_m}_{=I} V^*) =$$

$$= \pi(V Q_n Q_n V^*) = 0$$

$$\Rightarrow p_n^2 = \pi(V Q_n V^*)^2 = \pi(V Q_n V^* \underbrace{V Q_n V^*}_{=I}) = \pi(V Q_n^2 V^*) = \pi(V Q_n V^*) = p_n$$

$$\Rightarrow p_n^* = \pi(V Q_n V^*)^* = \pi((V Q_n V^*)^*) = \pi(\underbrace{V^*}_{=V} \underbrace{Q_n^*}_{=Q_n} \underbrace{V^*}_{=Q_n}) = \pi(V Q_n V^*) = p_n$$

$\Rightarrow$ zauważmy jeszcze że $p_n \leq \pi(P)$ no bo $Q_n \leq I \Rightarrow V Q_n V^* \leq V V^* = P$

$$\Rightarrow \pi(V Q_n V^*) \leq \pi(P) \text{ a zatem } p_n \pi(P) = p_n$$

• mamy więc:

$$p_n a p_n = p_n \underbrace{\pi(P)}_{=\pi(V g(V^*))} a \pi(P) p_n = p_n \pi(V g(V^*)) p_n = \pi(V Q_n V^*) \pi(V g(V^*)) \pi(V Q_n V^*)$$

$$= \pi(V Q_n V^* \underbrace{V g(V^*)}_{=I} \underbrace{V^*}_{=I} V Q_n V^*) = \pi(V Q_n g(V^*) Q_n V^*) = \int_n(a) \pi(V Q_n V^*) = \int_n(a) p_n$$

Prop 56.46 Niech $A \subseteq B(H)$ i $\mathcal{K}(H) \subseteq A$ i niech $f \in \mathcal{P}(A)$
 A -osrodkowa

(stan zwykły) t.z. $\int |f|_{\mathcal{K}(H)} = 0$ oraz niech $M = MASA$ w $B(H)$.

Wówczas $\exists g \in \mathcal{P}(B(H))$ $g|_A = f$, $g|_M$ nie jest zwykły.

Dowód. • Stosujemy Tw. 56.45 do (osrodkowej) algebry

$$\pi(A) \subseteq \mathcal{Q}(H) \text{ i stano } \tilde{f} \in \mathcal{S}(\pi(A)) \quad \left(\text{ma sens bo } \int |f|_{\mathcal{K}(H)} = 0 \right)$$

$$\tilde{f}(\pi(A)) = f(A)$$

dostajemy istnienie projekcji $p \in \mathcal{Q}(H)$ że $p \pi(a) p = \tilde{f}(\pi(a)) p$

• więc, skoro $p \in \mathcal{Q}(H) \Rightarrow p = \pi(P)$ i $\tilde{f}(\pi(A)) = f(A)$ to mamy

$$\pi(P) \pi(A) \pi(P) = f(A) \pi(P) \text{ dla } a \in A.$$

• Z Tw 56.44 $\pi(M) = MASA$ w $\mathcal{Q}(H)$

• Twierdzenie że $\exists Q \in M$ $\pi(P) \not\leq \pi(Q)$ i $\pi(P) \not\perp \pi(Q)$
 Q -projekcja

(ten projektora skośna do $\pi(P)$): gdyby tak nie było to

$$\forall Q \in M \quad (\pi(P) \leq \pi(Q) \text{ lub } \pi(P) \perp \pi(Q)) \Rightarrow \dots \text{ } \pi(P) \text{ melotega} \dots \Rightarrow \text{całe } \pi(M)$$

$\Rightarrow \pi(P) \in \pi(M)' = \pi(M)$: ponieważ, że $\pi(P)$ jest minimalna w $\pi(M)$ a to da się pokazać bo w $\pi(M)$ nie ma takiego M jako MASA jest premierny algorytm von Neumanna więc jest to z (jedną z $\mathbb{C}^n, \ell^\infty, L^\infty[0,1], L^\infty[0,1] \oplus \mathbb{C}^n, L^\infty[0,1] \oplus \ell^\infty$) i wiadomo że $\pi(M)$ nie ma podzestaw minimalnych

- Gdyby $\pi(P)$ nie była minimalna w $\pi(M)$ to istniałaby $\pi(Q) \in \pi(M)$; $\pi(Q) < \pi(P)$ no ale mamy że $\pi(Q) \neq 0$ ($\pi(P) \leq \pi(Q)$ lub $\pi(P) \perp \pi(Q)$) więc pewna część odpada

$$\Rightarrow \pi(P) \perp \pi(Q) \Rightarrow 0 = \pi(P)\pi(Q) = \pi(Q) \text{ sprzeczność}$$

bo $\pi(Q) < \pi(P)$

- To pokazuje że $\pi(P)$ jest minimalna i daje się pokazać że $\pi(P) \leq \pi(Q)$ lub $\pi(P) \perp \pi(Q)$ co daje że $\pi(P) \not\leq \pi(Q)$ i $\pi(P) \not\perp \pi(Q)$.

- Niech $g: \mathcal{Q}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ $\Rightarrow g$ -wierzchnia (bo $\mathcal{Q}(H)$ = preordal)
 g = nieprzemierzalna repr.

$$\Rightarrow g(\pi(P)) \not\leq g(\pi(Q)) \text{ i } g(\pi(P)) \not\perp g(\pi(Q)) \Rightarrow g(\cdot) \text{ to operator na } K$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in \mathcal{R}(g(\pi(P))), \xi \notin \mathcal{R}(g(\pi(Q))), \xi \notin \mathcal{R}(g(\pi(Q)))$$

$\xi \in K$
 $\|\xi\|=1$

- Kluczowy $g: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ $g(A) = \langle g(\pi(A))\xi, \xi \rangle$

$$\Rightarrow g \text{ jest stanem bo } g(I) = \langle g(\pi(I))\xi, \xi \rangle = \|\xi\|^2 = 1$$

$$g(A^*A) = \langle g(\pi(A^*A))\xi, \xi \rangle = \langle g(\pi(A))^* g(\pi(A))\xi, \xi \rangle = \langle g(\pi(A))\xi, g(\pi(A))\xi \rangle = \|g(\pi(A))\xi\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ jest więcej bo g -nieprzemierzalna $\Rightarrow g \circ \pi$ jest nieprzemierzalna

$\Rightarrow$ skoro $\xi \notin \mathcal{R}(g(\pi(Q)))$ i $\xi \notin \mathcal{R}(g(\pi(Q)))$ to

$$g(Q) = \langle g(\pi(Q))\xi, \xi \rangle \in (0; 1) \text{ a więc } g|_M \text{ nie jest}$$

wystry (gdzie bajt to $M = \text{NASA} \Rightarrow M$ -membrana $\Rightarrow g$ bajty
 multiplikacyjny $\Rightarrow g(Q) \in \{0, 1\}$ bo $Q = \text{polecja}$)

$\Rightarrow$ wreszcie g predykta f bo:

$$\begin{aligned} g(A) &= \langle g(\pi(A))\xi, \xi \rangle = \sum_{\xi \in \mathcal{R}(g(\pi(P)))} = \langle g(\pi(A))g(\pi(P))\xi, g(\pi(P))\xi \rangle \\ &= \langle g(\pi(PAP))\xi, \xi \rangle = \langle g(f(A)\pi(P))\xi, \xi \rangle = \text{dostanemy } g(\pi(P)) * g(\pi(A))g(\pi(P)) \\ &= f(A) \langle g(\pi(P))\xi, \xi \rangle = f(A) \|\xi\|^2 = f(A) \quad \square \end{aligned}$$

Będziemy potrzebowali jeszcze jednego pomocniczego rezultatu
 ale żeby go sformułować potrzebujemy kilku definicji

Def. 56.47 Będziemy mówić o podzbiory ω_1

i) $S \subseteq \omega_1$ nazywamy domkniętym gdy $\forall S_0 \subseteq S \quad \#S_0 = \aleph_0 \Rightarrow \sup S_0 \in S$

ii) $S \subseteq \omega_1$ nazywamy nieograniczonym gdy $\forall \alpha < \omega_1 \quad \exists \beta \in S \quad \beta > \alpha$

Def. 56.48 Gdy $(A_\alpha)_\alpha$ = wstępująca rodzina C^* -algebr

(z miarą jako zbiór lubo parą elementów) wówczas rodzinę
 tę nazywamy ciągłą gdy dla każdego granicznego α mamy

$$A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$$

Prop. 56.49 Niech $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ będzie ciągłą wstępującą rodziną
 skończonych C^* -algebr i $A := \bigcup_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$. Wówczas

i) A jest C^* -algebrą

ii) gdy $f \in P(A)$ (tzn. $f = \text{stan wystry}$) to

$\{\alpha < \omega_1 : f|_{A_\alpha} = \text{stan wystry}\}$ jest domknięty i nieograniczony.

Uwaga i) Jedynym problemem mogłoby być zupełność: gdy

$$\text{(jednak)} \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \alpha_n < \omega_1 \quad x_n \in A_{\alpha_n}$$

"ciąg Cauchy'ego"

Biorąc $L := \sup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ mamy dalej $L < \omega_1$ zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in A_n \Rightarrow \exists x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A_\infty \subseteq A \Rightarrow A \text{ - zupełna}$$

ii) Domkniętość zbioru $S := \{L < \omega_1 : f|_{A_L} \text{ jest ciągły}\}$

• Niech $S_0 \subseteq S$ i $L := \sup S_0$: gdy $L \in S_0 \Rightarrow L \in S$
 $\# S_0 = \aleph_0$

i hence mamy więc $L \notin S_0$ tzn. $L = \text{granica} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_L = \overline{\bigcup_{\beta < L} A_\beta} \Rightarrow \bigcup_{\beta < L} A_\beta \text{ gęsty w } A_L$$

• nie wystarczy $L \notin S \Rightarrow f|_{A_L}$ nie jest ciągły $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists f_1, f_2 \in S(\omega_L) \quad f_1 \neq f_2 \quad f|_{A_L} = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$$

• Twierdzenie ze $\exists \beta \in S_0 \quad f|_{A_\beta} \neq f|_{A_\beta}$ to gęsty

$$\forall_{\beta \in S_0} f|_{A_\beta} = f|_{A_\beta} \Rightarrow f|_{\bigcup_{\beta \in S_0} A_\beta} = f|_{\bigcup_{\beta \in S_0} A_\beta} \xrightarrow{\text{gęstość}} f|_{A_L} = f|_{A_L} \text{ sprzeczność}$$

• no ale skoro $f|_{A_\beta} \neq f|_{A_\beta} \Rightarrow f|_{A_\beta}$ nie jest ciągły
 co jest sprzecznością bo $\beta \in S_0 \subseteq S$

Wreszcie pokazujemy $S = \{L < \omega_1 : f|_{A_L} \text{ jest ciągły}\}$
 jest nieograniczony:

• Pewien niuans: te algorytmy nie muszą zankować
 (choćby więc nie ma granicy) ze zwrócenie

stanu prostawie stanem ale: skoro f jako stan

$$\text{ma normę 1 tzn. } \|f\| = 1 \Rightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \quad \frac{\|f(x_n)\|}{\|x_n\|} \rightarrow 1$$

ale $\forall_{n \in \mathbb{N}} x_n \in A_n$ i biorąc $L_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ mamy $L_0 < \omega_1$

i biorąc dowolne $\beta > L_0$ będzie już że $\|f|_{A_\beta}\| = 1$

zatem w def. nieograniczoności możemy zawrzeć się

do tabuły elementów $L < \omega_1$ dla których już $f|_{A_L}$

jest stanem (mimo stary testujemy na zbiorze współczynn-

wymagającym pewnym odcięciem) zatem b.s.o. zaistadamy
 f₁ jest stałym.

• Pociągamy następujący wniosek:

$$(*) \text{ dla } \alpha < \omega_1 \quad \forall_{x \in A_\alpha} \exists_{\alpha' \geq \alpha} \forall_{\beta \geq \alpha'} \forall_{f_1, f_2 \in S(A_\beta)} \left(f|_{A_\beta} = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow \right.$$

$$\left. \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \right\} \text{ pewnym wtedy } f|_{A_\beta} \text{ jest stałym na elemencie } x \}$$

$$\text{zgodzimy się to } \exists_{x \in A_\alpha} \forall_{\alpha' \geq \alpha} \exists_{\beta \geq \alpha'} \exists_{f_1^B, f_2^B \in S(A_\beta)} f|_{A_\beta} = \frac{f_1^B + f_2^B}{2} \quad \uparrow$$

$$f_1^B(x) \neq f_2^B(x) \text{ innego stawy } \exists_{\varepsilon > 0} \exists_{T \subseteq \omega_1} \exists_{f_1^B, f_2^B \text{ dla } \beta \in T} \text{ } T\text{-niezgodny}$$

$$f|_{A_\beta} = \frac{f_1^B + f_2^B}{2} \quad \text{ i } |f_1^B(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \quad \leftarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} |f_1^B(x) - f(x)| &= |f_1^B(x) - \frac{1}{2}f_1^B(x) - \frac{1}{2}f_2^B(x)| = |\frac{1}{2}f_1^B(x) - \frac{1}{2}f_2^B(x)| = \\ &= \frac{1}{2}|f_1^B(x) - f_2^B(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |f_1^B(x) - f_2^B(x)| > \varepsilon \end{aligned} \right\} \text{ więc ta nierówność}$$

jest równoważna tej - która wygląda bardziej naturalnie

→ niech $\mathcal{U}$ = ultrafiltr na T zawierający wszystkie zbiory

$\{\beta \in T : \beta \geq \beta_0\}$ (po wszystkich $\beta_0 < \omega_1$) : istnieje taki

bo T -niezgodny (wziewamy $\langle K, \mathbb{Z} \rangle$)

→ zdefiniujemy $g_1(x) := \lim_{\mathcal{U}} f_1^B(x)$ (granica względem ultrafiltru)

$$g_2(x) := \lim_{\mathcal{U}} f_2^B(x) : \text{skoro } f|_{A_\beta} = \frac{f_1^B + f_2^B}{2} \Rightarrow f = \frac{g_1 + g_2}{2}$$

ale przeciwnie do granicy w $|f_1^B(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{dostajemy } |g_1(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow f(x) \neq g_1(x) \Rightarrow g_1(x) \neq g_2(x)$$

co mniej więcej f był stałym i sprzeczność daje (*).

• weźmy $\alpha < \omega_1$: A_α - rozdzielna $\Rightarrow \exists (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A_\alpha$

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = A_\alpha$: stosujemy (*) do każdego x_n

dostając kolejne α_n że dla $\beta \geq \alpha_n$ mamy

$$(f|_{A_\beta} = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f_1(x_n) = f_2(x_n))$$

i możemy więc $L^* := \sup A_n$ ze dla $\beta \geq L^*$ mamy
 $f|_{A_n} = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f_1(x_n) = f_2(x_n)$ jest spełniony jednocześnie
 na $n \Rightarrow$ z góry $(x_n)_{n=1}^\infty \Rightarrow$ mamy $f|_{A_n} = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$ jest spełniony dla $x \in A_n$.

• Wreszcie ustalmy $L < L_1$ i pólcimy $L_1 := L^*$ jak wyżej
 $L_2 = L_1^*, L_3 = L_2^*, \dots$ i wreszcie $\beta = \sup_n L_n$ wtedy
 $f|_{A_n}$ jest ciągły dla $x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ no ale z zał. ciągłości
 $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ - gęste w $A_n \Rightarrow f|_{A_n} = \text{ciągły na } A_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow \beta \in S \quad \square$

Jesteśmy wreszcie gotowi sformułować i udowodnić
 nasze główne twierdzenie:

Tw. 56.50 Przy założeniu hipotezy continuum

tu $\mathfrak{C} = \aleph_1$ istnieje stan ciągły na $B(H)$, którego
 rozszerzenie do danej MASA nie jest stanem ciągłym.

Dowód. $\#B(H) = \mathfrak{C} \stackrel{\text{zał.}}{=} \aleph_1$ to dane $T \in B(H)$ jest wyznaczane
 przez wartości na (przeliczalnej) bazie $\mathcal{H}$; zatem $\#B(H) =$
 $= \mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$

• Gdy $M = \text{MASA} \Rightarrow M$ jest melioralnie generowana
 $M \subseteq B(H)$

(z ogólnej teorii) $\Rightarrow \#\{M \subseteq B(H) \mid M = \text{MASA}\} =$
 $= \#\{S \subseteq B(H) \mid \#S = \aleph_0\} = \mathfrak{C} = \aleph_1$

• Ustawmy więc w ciąg porachowania $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i
 $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ wszystkie elementy $B(H)$ i wszystkie
 $\text{MASA} \subseteq B(H)$.

• Skonstruujemy indukcyjnie porachowanie wstępujący

przebiegamy ciąg osrodkowych C^* -algebr z jednorz. $(A_\alpha)_{\alpha \in \kappa_1}$
 oraz stanow $(f_\alpha)_{\alpha \in \kappa_1}$ $f_\alpha \in \mathcal{P}(A_\alpha)$ ze dla $\alpha < \beta$:

i) $A_\alpha \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$

ii) gdy $\beta < \alpha$ to $f_\alpha|_{A_\beta} = f_\beta$

iii) $\exists Q_\alpha \in M_\alpha$ $Q_\alpha \in \mathcal{A}_{\alpha+1}$ i $f_{\alpha+1}(Q_\alpha) \in (0; 1)$,
 Q_α -projekcja

• startujemy od A_0 = dowolna osrodkowa C^* -podalgebra BCH
 z jednorz. taka ze $\mathcal{K}(H) \subseteq A_0$

ciag rzadzi $f_\alpha \in \mathcal{P}(A_\alpha)$ spelnia $f_\alpha|_{\mathcal{K}(H)} = 0$.

zauwazmy co to w i) ma byc $A_0 \in \mathcal{A}_1$ wsc A_0 jznie wie trzeba
 domyslac do A_0 : podobnie w iii) projekcja z M_0 wpadnie
 do $\mathcal{A}_1$ no i drugi warunk ten jest pieto spelniony

• Pdzieramy jake skonstruowac $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ i $f_{\alpha+1}$ fun. jake postepujemy

dla leubieg nastepniawej: zalozadamy wsc ze mamy (juze)

A_α i f_α : skoro $A_0 \subseteq A_\alpha \Rightarrow \mathcal{K}(H) \subseteq A_\alpha$
 $f_\alpha|_{\mathcal{K}(H)} = f_0|_{\mathcal{K}(H)} = 0$

$\Rightarrow$ spelniamy sq zal. Prop. 56.46 $\Rightarrow \exists g \in \mathcal{P}(BCH)$ $g|_{A_\alpha} = f_\alpha$
 (dla A_α i M_α)

i $\exists$ $Q_\alpha \in M_\alpha$ $g(Q_\alpha) \in (0; 1)$
 Q_α -projekcja

• Zapisujemy $BCH = \bigcup_{\alpha < \kappa_1} B_\alpha$ gdzie $(B_\alpha)_{\alpha < \kappa_1}$ = ciagla rodzin
 osrodkowych C^* -alg. t.j. $B_0 = C^*(A_0 \cup \{A_\alpha\} \cup \{Q_\alpha\})$
 z Prop. 56.49

$\Rightarrow \exists \alpha < \kappa_1$ $g|_{B_\alpha} = \text{czyli}$ i mozna przejsc

$\mathcal{A}_{\alpha+1} := B_\alpha$

i $f_{\alpha+1} = g|_{\mathcal{A}_{\alpha+1}} =$
 $= g|_{B_\alpha}$
 wtedy dla $\beta < \alpha+1$ jest $f_{\alpha+1}|_{A_\beta} = (g|_{\mathcal{A}_{\alpha+1}})|_{A_\beta} = g|_{A_\beta} =$
 $= (g|_{A_\alpha})|_{A_\beta} = f_\alpha|_{A_\beta} = f_\beta$

no i $f_{\alpha+1}(Q_\alpha) = g(Q_\alpha) \in (0, 1)$

- z kolei dla granicznych lubo punktowych władowy

$R_\alpha = \overline{\bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta}$ (w odwołaniu od dawodu 56.48 i) tutaj trzeba domyślać że sama jest minimalna

oraz $f_\alpha: R_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ $f_\alpha|_{R_\beta} = f_\beta$ dla $\beta < \alpha$ tak że

ii) jest spójna (no a i) oraz iii) nie dajemy granicy warty 2 bo były na temat następnego

• wtedy f_α jest ciągły: gdyż $f_\alpha = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \Rightarrow \Rightarrow \forall_{\beta < \alpha} f_\alpha|_{R_\beta} = \frac{1}{2}(g_1|_{R_\beta} + g_2|_{R_\beta}) \xrightarrow{f_\beta \text{ ciągły}} g_1|_{R_\beta} = g_2|_{R_\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1 = g_2$. Konstrukcja indukcyjna jest zakończona

• Kładziemy więc funkcję $f \in \mathcal{B}(H)$ $f|_{R_\alpha} = f_\alpha$

show $\forall_{\alpha < \aleph_1} A_\alpha \in R_{\alpha+1}$ i $\{A_\alpha\}_{\alpha < \aleph_1}$ to wszystkie elementy $\mathcal{B}(H)$ to $\mathcal{B}(H) = \overline{\bigcup_{\alpha < \aleph_1} R_\alpha}$ (tu nawet nie trzeba domyślać i f jest ciągły bo

$f = \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \Rightarrow \forall_{\alpha < \aleph_1} f|_{R_\alpha} = \frac{1}{2}(g_1|_{R_\alpha} + g_2|_{R_\alpha}) \xrightarrow{f_\alpha \text{ ciągły}} g_1|_{R_\alpha} = g_2|_{R_\alpha} \Rightarrow g_1 = g_2$

• no ale $\forall_{\alpha < \aleph_1} f(Q_\alpha) = f_{\alpha+1}(Q_\alpha) \in (0, 1)$ więc

$f|_{M_\alpha}$ nie jest ciągły $\boxtimes$

W dawodzie Tw.56.45 wyprowadziliśmy twierdzenie

Von Neumanna z pracy "A non-commutative Weierstrass

Neumann Theorem" (Tw.1.3 z tej pracy): własność

jednak podajemy definicję:

Def 56.51 Niech A = osrodkowa C^* -algebra z jednostka i

$f_i: A \rightarrow B(H_i)$ $i=1,2$: dwie reprezentacje (H_1, H_2 - osrodkowate).

Bierzemy, ze f_1 i f_2 sa odpowiedziami rownowazne (piszemy

$f_1 \sim f_2$) gdy $\exists (U_k)_{k=1}^\infty$ $U_k = \text{unitarna}$ $\forall f_1(x) - U_k^* f_2(x) U_k \in K(H_1)$
 $U_k: H_1 \rightarrow H_2$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_1(x) - U_k^* f_2(x) U_k\| = 0$

Tw 56.52 A = osrodkowa C^* -alg. z jednostka, $f: A \rightarrow B(H)$

H = osrodkowa oraz $\theta: \pi(f(A)) \rightarrow B(H_\theta)$ $f = \text{rep.}$
 $\theta = \text{rep.}$
 $\pi(f(A)) \subset Q(H)$ osrodkowa

Wtedy $f \sim f \oplus \theta \circ \pi \circ f$.

Uwaga 56.53 i) gdyby np. f byla skończenie wymiarowa

(tu $\dim H < \infty$) to $\forall x \in A$ $f(x) \in K(H) (= B(H))$ i wtedy

$\pi(f(A))$ to rewa algebra i $\theta \circ \pi \circ f = 0$ a wyc

tena jest trywialna

ii) mog nie bedziemy potrafiac drugiego warunku tu.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_1(x) - U_k^* f_2(x) U_k\| = 0$$

iii) z lewej mamy reprezentacje na H , z prawej na

$$H \oplus H_\theta //$$

Pokazemy teraz (ale zastosowac to tuleczenie:

$\Rightarrow$ w tw. 56.45 nasza algebra A jest $\subseteq Q(H)$: niech

$(a_n)_{n=1}^\infty$ = zbior gęsty w A i niech $(A_n)_{n=1}^\infty$ = zbior „podre-

sekcji” dla $(a_n)_{n=1}^\infty$ tu $\forall n \in \mathbb{N}$ $\pi(A_n) = a_n$

$\Rightarrow$ rownaimy $\tilde{A} = C^*(\{A_n\}_{n=1}^\infty \cup \{I\})$: to jest osrodkowa C^* -podalge-

bna $B(H)$: za f myslimy id: $\tilde{A} \rightarrow B(H)$

za θ myslimy $f: \pi(\text{id}(\tilde{A})) \rightarrow B(H)$

(ma sens bo f byla faithfulna

$$\pi''(\tilde{A}) \uparrow A$$

representacji R).

→ będziemy potrzebowali tylko pierwszego warunku
wgc wystawmy jeden operator unitarny: a nas $H_1 = H$

$H_2 = H \oplus K$ a wgc nasz operator unitarny dwueta:

$U: H \rightarrow H \oplus K$ wgc ma postać $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ gdzie

$$U_1: H \rightarrow H$$

$$U_2: H \rightarrow K$$

→ unitarność oznacza $U^*U = I_H \Leftrightarrow (U_1^*, U_2^*) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = I_H \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow U_1^*U_1 + U_2^*U_2 = I_H \text{ oraz } UU^* = I_{H \oplus K} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} (U_1^*, U_2^*) = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_K \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_1U_1^* & U_1U_2^* \\ U_2U_1^* & U_2U_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_K \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} U_1U_1^* = I_H & U_1U_2^* = 0 \\ U_2U_1^* = 0 & U_2U_2^* = I_K \end{matrix}$$

→ z kolei warunek $id \sim_a id \oplus g \circ \pi \circ id = id \oplus g \circ \pi$

oznacza $\forall_{T \in \tilde{A}} T - U^* (id \oplus g \circ \pi)(T)U = \text{wzrosty}$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} T - (U_1^*, U_2^*) \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & g(\pi(T)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \text{wzrosty}$$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} T - (U_1^*, U_2^*) \begin{pmatrix} TU_1 \\ g(\pi(T))U_2 \end{pmatrix} = \text{wzrosty}$$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} T - U_1^*TU_1 - U_2^*g(\pi(T))U_2 = \text{wzrosty}$$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} U_2TU_2^* - U_2U_1^*TU_1U_2^* - U_2U_2^*g(\pi(T))U_2U_2^* = \text{wzrosty}$$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} U_2TU_2^* - g(\pi(T)) = \text{wzrosty}$$

→ natomiast V którego wymagamy jest $V: K \rightarrow H$

$$V = U_2^*$$

wgc mamy $\forall_{T \in \tilde{A}} V^*TV - g(\pi(T)) = \text{wzrosty} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall_{T \in \tilde{A}} VV^*TVV^* - Vg(\pi(T))V^* = \text{wzrosty}$$

ale $VV^* = P$ even gdy T nielepa $\tilde{A}$ to $\pi(T)$ nielepa
 A wsc to daje $\forall_{T \in \tilde{A}} PTP - Vg(\pi(T))V^* = 0$ warty

Obliczajac przez π : $\forall_{T \in \tilde{A}} \pi(PTP) = \pi(Vg(\pi(T))V^*)$
 $\pi(P) \pi(T) \pi(P)$

$$\Rightarrow \forall_{a \in A} \pi(P)a\pi(P) = \pi(Vg(a)V^*) //$$

Na koniec wspomnijmy jeszcze dwa ciekawe twierdzenia
 tym razem na temat MAS w $Q(H)$ (a nie $B(H)$):

Tw. 56.54 Załóżmy CH (tj. $\aleph_1 = \aleph$) istnieje MASA, $M \subseteq$
 $\subseteq Q(H)$ o własnościach:

- M jest generowana przez proste
- M nie podnosi się do MASY w $B(H)$.

Tw. 56.55 Załóżmy CH (tj. $\aleph_1 = \aleph$): niech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S(Q(H))$
 mieć taka własność (niekonieczne wystarczy!). Wówczas
 $\exists M \subseteq Q(H)$ $M = \text{MASA}$ t.j. $\forall_{n \in \mathbb{N}} f_n|_M = \text{stan czysty}$
 (a więc multiplikatywny).