Lemat 52.30 Niech $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ = przestrzenie Hilberta, $\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2 < \infty$

$(f_i)_i \subseteq \mathcal{H}_1$ > liniowo niezależne oraz $(g_i')_i \subseteq \mathcal{H}_2$ - takie liniowo niezależne
$(g_i)_i \subseteq \mathcal{H}_2$

Załóżmy, że $\exists_j \; g_j'$ = nietrywialna kombinacja liniowa $(g_i)_i$
(tzn. co najmniej dwa niezerowe współczynniki)

i przypuśćmy, że dane jest $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dopuszczające przedstawienie $\psi = \sum_i c_i f_i \otimes g_i = \sum_i d_i f_i' \otimes g_i'$ dla pewnych $(f_i') \subseteq \mathcal{H}_1$ oraz $(c_i)_i, (d_i)_i \subseteq \mathbb{C}$.

Wówczas $\exists_k \; f_k'$ = nietrywialna kombinacja liniowa $(f_i)_i$
(tzn. co najmniej dwa niezerowe współczynniki).

Dowód. • Twierdzimy, że $\text{lin}\{f_i\}_i = \text{lin}\{f_i'\}$: gdyby tak nie było to (b.s.o. bo symetryczna sytuacja) np. $f_1' \notin \text{lin}\{f_i\}_i$ i wtedy $f_1' \otimes g_1' \notin \text{lin}\{f_i \otimes g_i\}_i$: faktycznie mamy rozważmy funkcjonały $\varphi \in \mathcal{H}_1^*$, $\eta \in \mathcal{H}_2^*$ że $\varphi|_{\text{lin}\{f_i\}_i} = 0$, $\varphi(f_1') \neq 0$, $\eta(g_1') \neq 0$, $\eta(g_i') = 0$ $i \neq 1$

i wtedy $\forall_i\ (\varphi\otimes\eta)(f_i\otimes g_i) = \underbrace{\varphi(f_i)}_{=0}\eta(g_i) = 0$

$$(\varphi\otimes\eta)(f_1'\otimes g_1') = \varphi(f_1')\eta(g_1') \neq 0$$

$$\forall_{i\neq 1}\ (\varphi\otimes\eta)(f_i'\otimes g_i') = \varphi(f_i')\underbrace{\eta(g_i')}_{=0} = 0$$

a więc każdy $(\varphi\otimes\eta)(\sum_i c_i f_i\otimes g_i) = \sum_i c_i \underbrace{(\varphi\otimes\eta)(f_i\otimes g_i)}_{=0} = 0$

$$(\varphi\otimes\eta)(\sum_i d_i f_i'\otimes g_i') = \underbrace{d_1(\varphi\otimes\eta)(f_1'\otimes g_1')}_{\neq 0} + \sum_{i\neq 1} d_i\underbrace{(\varphi\otimes\eta)(f_i'\otimes g_i')}_{=0} = d_1(\varphi\otimes\eta)(f_1'\otimes g_1') \neq 0$$

co przeczy $\sum_i c_i f_i\otimes g_i = \sum_i d_i f_i'\otimes g_i'$

- skoro już wiemy, że $\text{lin}\{f_i\} = \text{lin}\{f_i'\}$ to gdyby teza nie była prawdziwa to zestaw $(f_i)_i$ różniłby się od zestawu $(f_i')_i$ co najwyżej kolejnością i przeskalowaniem tzn.
$\forall_i \exists_j \exists_{\alpha_{ij}\in\mathbb{C}}\ f_i' = \alpha_{ij} f_j$ i ponieważ to j jest jedyne dla danego i to b.s.o. możnaby napisać $f_i' = \alpha_i f_i$ dla pewnego $\alpha_i\in\mathbb{C}$

$\sum_i d_i f_i'\otimes g_i' = \sum_i \underbrace{d_i \alpha_{ij(i)}}_{\text{ozn. } \beta_i} f_{j(i)}\otimes g_i' = \sum_i \beta_i f_{j(i)}\otimes g_i' = \sum_i \gamma_i f_i\otimes g_i''$
gdzie podmieniamy indeksy tak żeby się zgadzało tzn. g_i'' jest postaci g_k' z odpowiednim k, γ_i odpowiednio β_k itd...

- wtedy $\sum_i d_i f_i'\otimes g_i' = \sum_i \underbrace{d_i\alpha_i}_{\text{ozn.} = d_i'} f_i\otimes g_i' = \sum_i d_i' f_i\otimes g_i'$ a więc każdy

$$\sum_i c_i f_i\otimes g_i = \sum_i d_i' f_i\otimes g_i' \Rightarrow \sum_i f_i\otimes(c_i g_i - d_i' g_i') = 0$$

- jak poprzednio pokażemy, że $\text{lin}\{g_i\} = \text{lin}\{g_i'\}$ bo gdyby np. $g_1'\notin\text{lin}\{g_i\}_i$ to biorąc $\eta\in\mathcal{H}_2^*$, że $\eta|_{\text{lin}\{g_i\}_i} = 0$, $\eta(g_1')\neq 0$ oraz $\varphi\in\mathcal{H}_1^*$ że $\varphi(f_1)\neq 0$, $\varphi(f_i) = 0$ $i\neq 1$
każdy $(\varphi\otimes\eta)(\sum_i f_i\otimes(c_i g_i - d_i' g_i')) = \sum_i c_i\varphi(f_i)\underbrace{\eta(g_i)}_{=0} - \sum_i d_i' \underbrace{\varphi(f_i)\eta(g_i')}_{=0 \text{ dla } i\neq 1}$
$= -d_1'\varphi(f_1)\eta(g_1') \neq 0$

- z założenia na temat $(g_i)_i$ oraz $(g_i')_i$ mamy, że
$\exists_i\ c_i g_i - d_i' g_i' \neq 0$: b.s.o. niech np. $c_1 g_1 - d_1' g_1' \neq 0$ wtedy

biorąc $\varphi \in \mathcal{H}_1^*$ że $\varphi(f_1) \neq 0$, $\varphi(f_i) = 0$ dla $i \neq 1$
$\eta \in \mathcal{H}_2^*$ że $\eta(c_1 g_1 - d_1' g_1') \neq 0$ mamy

$$(\varphi \otimes \eta)\left(\sum_i f_i \otimes (c_i g_i - d_i' g_i')\right) = \sum_i \underbrace{\varphi(f_i)}_{=0 \text{ dla } i \neq 1} \eta(c_i g_i - d_i' g_i') = \varphi(f_1)\,\eta(c_1 g_1 - d_1' g_1')$$

$\neq 0$ co daje sprzeczność $\otimes$

<u>Tw. 5.2.3.1</u> Niech $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ – pn. Hilberta oraz $\psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$
$\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2, \dim \mathcal{H}_3 < \infty$

ma przedstawienie $\psi = \sum_i c_i f_i \otimes g_i \otimes h_i = \sum_i d_i f_i' \otimes g_i' \otimes h_i'$

gdzie $\begin{cases} (f_i)_i,\ (f_i') \subseteq \mathcal{H}_1 \\ (g_i)_i,\ (g_i') \subseteq \mathcal{H}_2 \\ (h_i)_i,\ (h_i') \subseteq \mathcal{H}_3 \end{cases}$ – liniowo niezależne.

Wówczas żadne dwa spośród zestawów: $(f_i)_i, (f_i')_i$ oraz $(g_i)_i, (g_i')_i$ oraz $(h_i)_i, (h_i')_i$ nie mogą się różnić nietrywialnie tzn. tak aby pewien wektor był nietrywialną kombinacją wektorów z drugiego zestawu.

<u>Dowód</u> • Nie wprost, przypuśćmy, że np. zestawy $(h_i)_i$ oraz $(h_i')_i$ różnią się nietrywialnie i połóżmy

$F_i := f_i \otimes g_i$
$F_i' := f_i' \otimes g_i'$. Zatem $\psi = \sum_i c_i F_i \otimes h_i = \sum_i d_i F_i' \otimes h_i'$

• z poprzedniego lematu $(F_i)_i$ oraz $(F_i')_i$ różnią się nietrywialnie, np. $F_1' =$ nietrywialna kombinacja $(F_i)_i$

• no ale to oznaczałoby, że F_1' jest splątany a skoro $F_1' = f_1' \otimes g_1'$ to F_1' – separowalny! Sprzeczność!

• to kończy dowód bo argument zakładający, że zestawy $(h_i)_i$ oraz $(h_i')_i$ różnią się nietrywialnie nie traci ogólności rozważań: gdyby np. zachodziło to dla $(g_i)_i$ oraz $(g_i')_i$ to mielibyśmy wziąć $F_i = f_i \otimes h_i$, $F_i' = f_i' \otimes h_i'$ (modulo naturalne utożsamienie $f_1 \otimes g_1 \otimes h_1 \cong f_1 \otimes h_1 \otimes g_1 = F_1 \otimes g_1$) $\boxtimes$

- Tw. 52.31. stanowi dla niektórych mocny argument za <u>rozwiązaniem</u> problemu preferowanej bazy – gdyż rozwiązanie (tzw. „obiektywność") osiągana by była na poziomie $S+A+E$ (układ + aparat + środowisko): problem jednak w tym, że mając przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ jej faktoryzacja do postaci $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$ nie jest jedyna
- Warto jeszcze wspomnieć, że taki „trójortogonalny" rozkład nie musi zawsze istnieć: tw. 52.31 mówi jedynie, że <u>jeśli</u> istnieje to musi być jedyny.
- Zwróćmy też uwagę, że w tym twierdzeniu baza nie jest wybierana w oparciu o „prawa fizyczne" jak np. postać hamiltonianów – więc to podejście jest odmienne od podejścia w którym rozważa się „pointer states" (einselection).