ZADANIA Z MATEMATYKI
DLA WYDZIAŁU IMIR

ZADANIA w semestrze zimowym

Teoria zbiorów, funkcje.

▲ Podać interpretację geometryczną zbiorów:

a) $A\times B$, jeżeli $A=\mathbb{N}$ i $B=\mathbb{C}$ b) $X^3 = X\times X\times X$, gdzie $X=\langle 3,4\rangle$

c) $A\times B$, gdzie $A=\{x: 0\le x\le 1\}$, $B=\mathbb{R}$ d) $\langle 1,3\rangle\times\{2,4\}$

e) $\{1,3\}\times\{2,4\}$.

▲ Znaleźć dziedziny następujących funkcji:

a) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$ b) $y=\sqrt{4x-x^2}$ c) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$

▲ Zbadać parzystość (nieparzystość) następujących funkcji:

a) $y=\frac{\sin x}{x}$ b) $y=a^x-\frac{1}{a^x}$ c) $y=x+x^2$.

▲ Niech funkcje $f(x)$ i $g(x)$ będą zadane następująco:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & dla \quad x<1 \\ 3 & dla \quad x=1 \\ x^2+2x+1 & dla \quad x>1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} -x^2 & dla \quad x<0 \\ x & dla \quad x\in[0,1) \\ 2x-1 & dla \quad x\ge 1 \end{cases}$$

a) narysować wykresy obu funkcji

b) sprawdzić, czy funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ są różnowartościowe

c) wyznaczyć f^{-1} oraz g^{-1}.

▲ Znaleźć funkcje, z których utworzone są funkcje złożone określone wzorami:

a) $f(x)=\left(2x^2+x+1\right)^2$ b) $g(x)=3^{\frac{1}{x+1}}$

c) $h(x)=\sqrt{\sin\left[\log_2(tg3x)\right]}$.

▲ Obliczyć:

a) $3\arcsin 1-2\arcsin 0+4\operatorname{arc}tg 1-\operatorname{arc}tg(-1)$

b) $\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arc}tg(-3)-3\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arc}tg\left(tg\frac{7}{8}p\right)-\operatorname{arc}tg 1$.

Rachunek różniczkowy fukncji jednej zmiennej.

▲ Zapisać przy pomocy kwantyfikatorów definicje pojęć:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$

▲ Korzystając z odpowiedniej definicji wykazać, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)=0$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+2}\right)=0,6$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$

▲ Zbadać, czy istnieją następujące granice i obliczyć te, które istnieją:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+1}{5n^2+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+3)(n+1)}{4n^4+2n^3-7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+...+n}{n-3}-\frac{n}{2}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3-n}-n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{a}{2^n}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+2}$

▲ Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{8x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2 2x}{3x^4}$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{ctg\frac{p\,x}{2}}$

f) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{1-ctg^3x}{2-ctgx-ctg^3x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{e^x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{2x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x}$

▲ Obliczyć granice niewlaściwe:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x}{(x-2)^4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x+1}{(x-1)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$

▲ Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{16+x^4}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+x-8}{9x^3+2x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{1+x^2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^3}{2+x^2}$

▲ W podanych punktach obliczyć granice jednostronne danych funkcji i rozstrzygnąć, czy funkcje te mają granice w tych punktach:

a) $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ *w punkcie* $x=0$

b) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}+x$ *w punkcie* $x=1$

c) $f(x)=arctg\dfrac{1}{1-x}$ *w punkcie* $x=1.$

▲ Wyznaczyć punkty nieciągłości funkcji

a) $y=\frac{x+|x|}{2x}$ b) $y=\frac{\sin x}{|x|}$

c) $y=\frac{x}{x^2-1}$ d) $y=tg2x$

e) $y=arctg\frac{1}{x}$ f) $y=2^{\frac{1}{x-2}}$

g) $y=\frac{x^2+1}{x^2}$

oraz określić rodzaj nieciągłości w tych punktach.

▲ Dla jakich wartości a funkcja $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w $(-\infty,\infty)$?

a) $f(x)=\begin{cases} x-a & dla \quad x<10 \\ \log x & dla \quad x\geq 10 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2^x+8 & dla \quad x\leq 0 \\ (x-a)^2 & dla \quad x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 5^{x-1} & dla \quad x\leq 0 \\ a & dla \quad x>0 \end{cases}$

▲ Dobrać $a\in R$ tak, aby funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & dla \quad x\neq 0 \\ a & dla \quad x=0 \end{cases}$$

była ciągła dla wszystkich $x\in R$

▲ Funkcja $f(x)=1-x\sin\frac{1}{x}$ jest nieokreślona dla $x=0$. Określić wartość $f(0)$ tak, aby funkcja $f(x)$ była ciągła w punkcje $x=0$.

▲ Wykorzystując własności funkcji cciągłych wykazać , że równanie $x^5-3x=1$ ma co najmniej jeden pierwiastek zawarty między 1 i 2.

▲ Wykazać, że równanie $e^x-\frac{1}{x^2}=0$ ma pierwiastek w przedziale $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

▲ Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos\left(\frac{e^x-1}{2x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin 2x}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} arctg\left(\frac{\sin x}{|x|}\right)$.

▲ Na podstawie definicji znaleźć wzór na pochodną funkcji:

a) $y=\sqrt{x}$ b) $y=x^4$

c) $y=3+x^2$ d) $y=\frac{1}{2x+1}$

e) $y=\frac{1}{3x}$ f) $y=-2+5x^2$

▲ Napisać równanie stycznej do linii $y=\frac{x^3}{3}$ w punkcie x=-1.

▲ Pod jakim kątem linia $y=\sin x$ przecina oś OX?

▲ Dla funkcji $y=\left(1+x\sqrt{x}\right)x$ obliczyć $y'(0)-y'(1)$

▲ Pokazać, że pochodna funkcji $f(x)=\frac{1-x+x^3-x^5}{\sqrt{2}}$ jest funkcją parzystą.

▲ Znaleźć punkty, w których następujące funkcje nie posiadają pochodnych:

a) $y=|x+2|$

b) $y=|x|+|x-1|$

Wyniki zilustrować rysunkiem.

▲ Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a) $y=\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3$ b) $y=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

c) $y=\sqrt[5]{2-\frac{3}{x-1}}$ d) $y=arctg\,\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

e) $y=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ f) $y=\arccos\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$

g) $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$

h) $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$

i) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$

j) $y=\ln\ln\ln x$

k) $y=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$

l) $y=\ln\sqrt{\frac{\sin 2t}{1-\sin 2t}}$

m) $y=(\sin x)^{\sin x}$

n) $y=(a+bx)^x$

o) $y=x^{\frac{1}{x}}$

▲ W jakim punkcie styczna do paraboli $y=x^2+1$

a) jest równoległa do osi OX

b) tworzy z dodatnim kierunkiem osi OX kąt $a=\frac{p}{3}$.

▲ Jaki warunek muszą spełniać współczynniki a, b i c, aby parabola $y=ax^2+bx+c$ była styczna do osi OX.

▲ Znaleźć kąt przecięcia krzywych: $y=x^2$ i $y=x$.

▲ Obliczyć pochodną n-tego rzędu funkcji:

a) $y=e^{\frac{-x}{a}}$

b) $y=\ln x$

c) $y=x^n$

d) $y=\sqrt{x}$

e) $y=\cos^2 x$.

▲ Obliczyć wszystkie różniczki funkcji $y=x^4$ w punkcje $x_0=2$ i dla $dx=0,5$.

▲ Korzystając z twierdzenia de l`Hospitala obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$

e) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}\frac{tgx}{tg3x}$

f) $\lim\limits_{x\to p}(p-x)tg\frac{x}{2}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)ctgx$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

▲ Wykazać, że pomiędzy pierwiastkami funkcji $f(x)=x^2-4x+3$ znajduje się pierwiastek jej pochodnej. Wyjaśnić to na rysunku.

▲ Czy teza twierdzenia Rolle`a ma zastosowanie do funcji $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ w przwdziale $\langle -1,1\rangle$? Wyjaśnij za pomocą rysunku.

▲ W jakim punkcje styczna do paraboli $y=x^2$ jest równolegla do cięciwy łączącej punkty $A(-1,1)\ i\ B(3,9)$. Wyjaśnić za pomocą rysunku.

▲ Narysować łuk AB linii $y=|\cos x|$ w przedziale $\langle 0,p\rangle$. Dlaczego łuk ten nie ma stycznej rownoległej do cięciwy AB? Które z założenia twierdzenia Lagrange`a nie są tutaj spełnione?

▲ Wyznaczyć przedzialy monotoniczności i ekstrema funkcji:

a) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x-15$ b) $y=x^4-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}$

c) $y=\frac{x}{x^2+1}$ d) $y=e^{-x^2}$

e) $y=\frac{1}{x^2+1}$

▲ Znaleźć współczynniki trójmianu $y=x^2+bx+c$ takie ,żeby w punkcje $x=1$ trójmian osiągał minimum równe 3.

▲ Spośród trójkątów o danym obwodzie 2p i danym boku a znaleźć trójkąt, którego pole byłoby największe.

▲ W daną kule wpisać stożek o największej objętości.

▲ Okno ma kształt prostokąta zakończonego półkolem. Dany jest obwód okna 2p. Wyznaczyć wysokość i szerokość okna tak, aby ilość światła praenikającego przez to okno była największa.

▲ Pudełko do zapałek ma długość 5cm i objętość $33\frac{3}{4}cm^3$. Jaka musi być szerokośc i wysokośc pudełka , aby suma pól wszystkich dziewięciu ścianek pudełka była najmniejsza?

▲ Znaleźć asymptoty linii i narysować linie:

a) $y=\frac{x^2}{x+1}$ b) $y=\frac{2}{|x|}-1$

c) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

▲ Znaleźć przedziały wypukłości i punkty przegięcia funkcji:

a) $y=\frac{x^3}{6}-x^2$ b) $y=e^{-x^2}$

c) $y=\frac{2x}{1+x^2}$ d) $y=2^{\frac{1}{x}}$.

▲ Zbadać przebieg funkcji i naszkicować wykres:

a) $y=x^2\sqrt{x+1}$ b) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

c) $y=\frac{(1-x)^2}{2x}$ d) $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}$

e) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

▲ Stosując twierdznie o wzorze Taylora obliczyć przybliżone wartości:

a) $arctg1{,}1$ b) $\arcsin 0{,}54$

c) $\log_{10} 11$ d) $(1.98)^3$.

Liczby zespolone.

▲ W zbiorze liczb zespolonych **C** wykonać działania:

a) $(1+3i)+(2-4i)$ b) $(2-i)(1+3i)$

c) $(2-3i)(1+4i)$ d) $(3+2i)(3-2i)$.

▲ Znaleźć x i y, jeśli x i y są liczbami rzeczywistymi i spełniają związek:

$$(3-2i)x+(4+i)y=2+6i$$

▲ Znaleźć część rzeczywistą i część urojoną następujących liczb zespolonych:

a) $\dfrac{2-i}{1+i}$ b) $\dfrac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{1+i}$.

▲ Wykazać, że $|z_1-z_2|$ jest odległością między punktami z_1 i z_2.

▲ Znaleźć zbiór punktów na płaszczyźnie zespolonej spełniających warunki:

a) $|z|=1$ b) $2\le|z|\le4$

c) $|z-1|\le\dfrac{1}{2}$ d) $\arg z=\dfrac{p}{4}$

e) $\dfrac{p}{4}\le\arg z\le\dfrac{2p}{3}$.

▲ Obliczyć: $(1+i)^{24}$, $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

▲ Obliczyć pierwiastki: $\sqrt{i}$, $\sqrt[3]{1-i}$, $\sqrt[3]{-8}$.

▲ Rozwiązać równania:

a) $z^2-i=0$ b) $z^5=1+\sqrt{3}i$

c) $z^2-2z+5=0$ d) $z^4-6z^2+25=0$

e) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$ f) $|z|-z=1+2i$

e) $|z|+z=2+i$.

Całki.

▲ Obliczyć całki:

$a)\quad \int \frac{\left(x^2-1\right)^3 dx}{x},$

$b)\quad \int \left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)dx,$

$c)\quad \int \left(3+2\sqrt[4]{x}\right)^3 dx,$

$d)\quad \int \frac{x-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\, dx,$

$e)\quad \int \left(2x^{-1,2}+3x^{-0,8}-5x^{0,38}\right)dx,$

$f)\quad \int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx,$

$g)\quad \int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\, dx,$

$h)\quad \int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz,$

$i)\quad \int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}\, du,$

$j)\quad \int \left(e^{-x}+1\right)^3 dx,$

k) $\frac{e^{2x}-1}{e^x}\, dx,$

$l)\quad \int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\, dx.$

▲ Całkując przez części obliczyć całki:

$a)\quad \int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx,$

$b)\quad \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}dx,$

$c)\quad \int x\left(\operatorname{arctg} x\right)^2 dx,$

$d)\quad \int \frac{\ln^3 x}{x^2}\, dx,$

$e)\quad \int x^2 \ln\left(1+x\right)dx,$

$f)\quad \int \sin\left(\ln x\right)dx,$

$g)\quad \int \left(\arccos x\right)^3 dx,$

$h)\quad \int \cos x \ln\left(c\operatorname{tg} x\right)dx,$

$i)\quad \int x^2 \arcsin x dx.$

▲ Całkując przez podstawienie obliczyć całki:

$a)\quad \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}\, dx,$

$b)\quad \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx,$

$c)\quad \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{8-x^3}},$

$d)\quad \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx,$

$e)\quad \int x\sin\left(2x^2+1\right)dx,$

$f)\quad \int \left[\cos\left(2x-\frac{p}{4}\right)\right]^{-2} dx,$

$g)$ $\int \cos x e^{\sin x} dx,$

$h)$ $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1+x^2} dx,$

$i)$ $\int e^{-x^3} x^2 dx.$

▲ Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki:

$a)$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-5x^4}},$

$b)$ $\int \frac{dx}{x^2-6x+12},$

$c)$ $\int \sqrt{2x+3}dx,$

$d)$ $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+11},$

$e)$ $\int \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} dx.$

▲ Obliczyc całki następujących funkcji wymiernych:

$a)$ $\int \frac{dx}{(x+2)(x-5)},$

$b)$ $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2-x-2},$

$c)$ $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx,$

$d)$ $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

$e)$ $\int \frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2x},$

$f)$ $\int \frac{(2x-5)dx}{(x-1)^3},$

$g)$ $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x^2+1)},$

$h)$ $\int \frac{(2x^3+x^2+5x+1)dx}{(x^2+3)(x^2-x+1)},$

$i)$ $\int \frac{(3x+2)dx}{(x^2-3x+3)^2}$

$j)$ $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} dx,$

$k)$ $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}.$

▲ Obliczyć całki funkcji trygonometrycznych:

$a)$ $\int \sin 3x \sin 5x dx,$

$b)$ $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x},$

$c)$ $\int \frac{dx}{\sin 2x}$

$d)$ $\int \frac{dx}{\cos x},$

$e)$ $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x} dx,$

$f)$ $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx,$

$g)$ $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x},$

$h)$ $\int \sin^5 x dx,$

$i)\quad \int \cos 2x \cos 3x\,dx,$

$j)\quad \int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^2 x},$

$k)\quad \int \frac{\sin^2 x\,dx}{1-\operatorname{tg} x}$

▲ Obliczyć całki funkcji niewymiernych:

$a)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x^2}},$

$b)\quad \int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{x+\sqrt[6]{x^5}},$

$c)\quad \int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}dx,$

$d)\quad \int \frac{x^2dx}{3\sqrt[3]{x+2}},$

$e)\quad \int \frac{x^2+1}{\sqrt{3x+1}}\,dx,$

$f)\quad \int x\sqrt[4]{2x+3}\,dx,$

$g)\quad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}dx,$

$h)\quad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x}},$

$i)\quad \int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{1+x}}dx,$

$j)\quad \int \frac{x\,dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$

▲ Obliczyć całki:

$a)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{11-6x+x^2}},$

$b)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+12}}$

$c)\quad \int \frac{2dx}{\sqrt{-2x^2+4x+7}},$

$d)\quad \int \frac{5dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}},$

$e)\quad \int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}},$

$f)\quad \int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx,$

$g)\quad \int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}},$

$h)\quad \int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3-2x-x^2}},$

$i)\quad \int \frac{(2x^2-3)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}},$

$j)\quad \int \frac{3x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}},$

$k)\quad \int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx,$

$l)\quad \int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx,$

$m)\quad \int \sqrt{1-4x-x^2}\,dx,$

$n)\quad \int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx,$

$o)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}},$

$p)\quad \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}},$

$q)\quad \displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$

▲ Wyprowadź wzór rekurencyjny na $I_n = \int \sin^n x dx$, $n \geq 0.$

▲ Za pomocą definicji całki oznaczonej obliczyć:

$a)\quad \displaystyle\int_2^6 x dx,\qquad b)\quad \int_1^3 (2x+1)\, dx,\qquad c)\quad \int_0^1 e^x dx.$

▲ Obliczyć całki:

$a)\quad \displaystyle\int_3^5 \frac{x dx}{x^2-4},$

$b)\quad \displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2+2x+1},$

$c)\quad \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx,$

$d)\quad \displaystyle\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}},$

$e)\quad \displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}},$

$f)\quad \displaystyle\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx,$

$g)\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{x dx}{\left(x^2+1\right)^2},$

$h)\quad \displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}},$

$i)\quad \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2},$

$j)\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx.$

▲ Stosując twierdzenie o zmianie zmiennych w całce oznaczonej obliczyć:

$a)\quad \displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx,$

$b)\quad \displaystyle\int_0^{\frac{p}{2}} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\, dx,$

$c)\quad \displaystyle\int_{-\frac{p}{2}}^{-\frac{p}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}},$

$d)\quad \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{1+e^x},$

$e)\quad \displaystyle\int_{\frac{1}{p}}^{\frac{2}{p}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx,$

$f)\quad \displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx,$

$g)\quad \displaystyle\int_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$

▲ Całkując przez części obliczyć następujące całki:

$a)\quad \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx,$

$b)\quad \int_0^{\frac{p}{2}} e^{2x} \sin^2 x\,dx,$

$c)\quad \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x},$

$d)\quad \int_1^2 x \log_2 x\,dx,$

$e)\quad \int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx,$

$f)\quad \int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}dx,$

$g)\quad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$

$h)\quad \int_1^e \ln^3 x\,dx.$

▲ Obliczyć (jeśli istnieją) całki:

$a)\quad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}},$

$b)\quad \int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2},\ a>0,$

$c)\quad \int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3},$

$d)\quad \int_{-1}^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}},$

$e)\quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$

$f)\quad \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x-12}},$

$g)\quad \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x},$

$h)\quad \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

▲ Obliczyć lub stwierdzić rozbieżność następujących całek:

$a)\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^4},$

$b)\quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}},$

$c)\quad \int_0^\infty e^{-5x}dx,$

$d)\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{x^2+1},$

$e)\quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+x},$

$f)\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)},$

$g)\quad \int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},$

$h)\quad \int_{a^2}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}},$

$j)$ $\int_0^{\infty} x\sin x dx,$ $\qquad$ $i)$ $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx,$

$k)$ $\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx dx,$ $\qquad$ $l)$ $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$

▲ Zbadać zbieżność całek:

$a)$ $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^3+1},$ $\qquad$ $b)$ $\int_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx,$

$c)$ $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx,$ $\qquad$ $d)$ $\int_1^{\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx.$

▲ Obliczyć pola obszarów ograniczonych liniami:

$a)$ $y=3-2x-x^2,\ y=0$ $\qquad$ $b)$ $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0,$

$c)$ $y=x^2,\ y=2-x^2,$ $\qquad$ $d)$ $y=x^2+4x,\ y=x+4;$

e) pole figury ograniczonej kardioidą $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t,$

f) pole figury ograniczonej lemniskatą Bernoulli’ego: $r^2=a^2\cos 2j$.

▲ Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót wokół osi Ox figury ograniczonej liniami:

$a)$ $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0,$ $\qquad$ $b)$ $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=0,\ x=1,\ x=-1,$

$c)$ $x^2-y^2=a^2,\ x=2x,\ x=-2a,$ $\qquad$ $d)$ $y=\cos\left(x-\frac{p}{3}\right),\ x=0,\ y=0$

$\left(przy\ x>0\right),$

$e)$ $x=a\cos^2 t,\ y=b\sin^2 t\ \left(astroida\right).$ $\qquad$ $f)$ $r=a\left(1+\cos j\right)\left(kardioida\right).$

▲ Obliczyć długość łuku lini:

$a)$ $y=\frac{x^2}{2}-1\ odciętej\ osią\ \mathrm{O}x,$ $\qquad$ $b)$ $y=\ln\left(1-x^2\right)\ od\ x=-1/2\ do\ x=1/2,$

$c)$ $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t,$ $\qquad$ $d)$ $r=a\left(1+\cos j\right),$

e) długość jednego zwoju spirali Archimedesa $r=aj$.

▲ Wyprowadź wzór na pole czaszy kuli.

▲ Objaśnij metodę trapezów dla całek oznaczonych i podaj tw. o zbieżności tej metody.

<u>**ZADANIA w semestrze letnim**</u>

<u>Algebra liniowa.</u>

▲ Dane są macierze:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć : a) C^T , b) $2A-3B$, c) D^2 .

▲ Sprawdzić, że prawdziwa jest równość $AX=Y$ jeżeli:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

▲ Sprawdzić czy $(AB)^T=B^TA^T$, jeżeli:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

▲ Sprawdzić, które z podanych macierzy są osobliwe:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & -1 & 1\\ 7 & 5 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

▲ Dla podanej macierzy A znaleźć : a) macierz dopełnień algebraicznych, b) macierz transponowaną dopełnień algebraicznych, c) wyznacznik macierzy, d) macierz odwrotną:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$$. Sprawdzić rachunkiem poprawność wyniku.

▲ Obliczyć rzędy następujących macierzy:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -4 & 6\\ -4 & 0 & 2 & 0\\ & & & \end{bmatrix}.$$

▲ Dla jakiej wartości parametru a macierz A ma najwyższy rząd:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 4\\ a & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

▲ Stosując wzory Cramera, metodę macierzową i metodę eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

$a)$ $$\begin{cases}2x-y-z=4\\ 3x+4y-2z=11\\ 3x-2y+4z=11\end{cases}$$

$b)$ $$\begin{cases}2x+2y-z+t=4\\ 4x+3y-z+2t=6\\ 8x+5y-3z+4t=12\\ 3x+3y-2z+2t=6\end{cases}$$

$c)$ $$\begin{cases}x+iy=1+i\\ 2(1+i)x+(-1+i)y=3\end{cases}$$

▲ Rozwiązać równanie macierzowe $AX=B$, gdzie:

$a)$ $$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}0\\ -3\end{bmatrix}.$$

$b)\qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

▲ Zbadać rozwiązalność podanych układów równań i – gdy jest to możliwe – znaleźć ich rozwiązania:

$$a)\quad \begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12 \end{cases},\qquad b)\quad \begin{cases} 2x+3y-z+t=1 \\ 8x+12y-9z+8t=3 \\ 4x+6y+3z-2t=3 \\ 2x+3y+9z-7t=3 \end{cases}$$

$$c)\quad \begin{cases} 2x+y-4z=0 \\ 3x+5y-7z=0 \\ 4x-5y+6z=0 \end{cases}‘\qquad d)\quad \begin{cases} 2x-y+5z+7t=0 \\ 4x-2y+7z+5t=0 \\ 2x-y+z-5t=0 \end{cases}.$$

$$e)\quad \begin{cases} 3x-5y+2z+4t=2 \\ 7x-4y+z+3t=5 \\ 5x+7y-4z-6t=3 \end{cases},\qquad f)\quad \begin{cases} 2x+3y+11z+5t=2 \\ x+y+5z+2t=1 \\ 2x+y+3z+2t=-3 \\ x+y+3z+4t=-3 \end{cases}$$

▲ Określić, dla jakich wartości parametrów „a” i „b” układ równań:

$$\begin{cases} 3x-2y+z=b \\ 5x-8y+9z=3 \\ 2x+y+az=-1 \end{cases}$$

jest: a) oznaczony, b) nieoznaczony, c) sprzeczny.

▲ Oblicz wartości i wektory własne dla macierzy

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

▲ Co to jest wielomian charakterystyczny macierzy ? Podaj definicję wektora i wartości własnej.

Geometria analityczna w przestrzeni.

▲ Oblicz odległość punktu M(1,0,1) od prostej x=3z+2, y=2z .

▲ Przez punkt (0,8,1) przeprowadź płaszczyznę prostopadłą do prostej x=y=z .

▲ Znajdź płaszczyznę przechodzącą przez prostą x+y-3z+6=0, 2x-y+2z+5=0 i równoległą do prostej x = y = z .

▲ Podaj definicję lewoskrętnego układu wektorów i definicję iloczynu wektorowego w przestrzeni.

▲ Kiedy trzy wektory w przestrzeni są komplanarne (podaj definicję i twierdzenie)?

▲ Wymień własności iloczynu wektorowego. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach A(7,-3,0), B(1,2,-2), C(1,5,-4).

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

▲ Wyznaczyć dziedzinę podanych niżej funkcji:

$a)\quad z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\qquad b)\quad z=\sqrt{xy},\qquad c)\quad z=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$d)\quad z=\dfrac{xy}{y-x},\qquad e)\quad z=x+\sqrt{x^2-y^2},\qquad f)\quad z=\arcsin\dfrac{y-1}{x},$

$g)\quad z=\sqrt{x\sin y}.$

▲ Wykazać, że dla $x\to 0$ i $y\to 0$ funkcja $u=\dfrac{y}{x-y}$ może dążyć do różnych wartości liczbowych. Podać przykłady takiego sposobu dążenia punktu (*x,y)* do punktu (0,0), dla którego : lim u = 3, lim u = 2, lim u = 1, lim u = 0, lim u = -2.

▲ Wykazać, że:

$a)\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=-\dfrac{1}{4},\qquad b)\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{xy}=1,\qquad c)\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{x}=0.$

▲ Narysować wykres funkcji:

$$z = F(x,y) = \begin{cases} 1, & gdy\ xy > 0 \\ 0, & gdy\ xy = 0 \\ -1, & gdy\ xy < 0 \end{cases}$$

i pokazać na nim linie nieciągłości funkcji.

▲ Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu 1-szego następujących funkcji:

$a)$ $z = \left(5x^2y - y^3 + 7\right)^3$, $b)$ $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}$, $c)$ $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$,

$d)$ $z = e^{-\frac{z}{y}}$, $f)$ $z = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g)$ $z = \ln tg\dfrac{x}{y}$,

$h)$ $z = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$, $i)$ $z = xye^{\sin xyp}$,

$j)$ $z = x + y - \sqrt{x^2+y^2}\ w\ punkcie\ (3,4)$, $k)$ $z = \sqrt{1-\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{xy}$.

▲ Jaki kąt tworzy z dodatnim kierunkiem osi Oy styczna do krzywej:

$$z = \sqrt{1+x^2+y^2},\quad x = 1\ w\ punkcie\left(1,1,\sqrt{3}\right)?$$

▲ Powierzchnie $z = x^2 + 2x + 3y - 4$ przecięto płaszczyzną $y = 1$. Znaleźć równanie krzywej przecięcia i równanie stycznej do krzywej przecięcia w punkcie, którego współrzędna $x = 1$.

▲ Pod jakim kątem przecinają się krzywe płaskie otrzymane z przecięcia się powierzchni $z = x^2 + \dfrac{y^2}{6}$ i $z = \dfrac{x^2+y^2}{3}$ z płaszczyzną $y = 2$?

▲ Sprawdzić, że $z_{xy} = z_{yx}$ jeśli $z = arctg\dfrac{y}{x}, x \neq 0$.

▲ Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego dla funkcji:

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ b) $z = arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$

c) $u = e^{xyz}$ d) $z = e^x\left(x\cos x - y\cos y\right)$

▲ Obliczyć pochodne funkcji złożonych

a) $u = e^{x-2y}$, gdzie $x = \sin t$, $y = t^2$; $\dfrac{du}{dt} = ?$

b) $z = x^2 \ln y$, $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$; $z_u = ?$, $z_v = ?$

▲ Sprawdzić, że funkcja $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$, gdzie $x = u + v$, $y = u - v$ spełnia równanie

$$z_u + z_y = \frac{u-v}{u^2 - v^2}$$

▲ Znaleźć gradient funkcji:

a) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ dla punktu P(2,1)

b) $z = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$ w punkcie M(6,4,ln100)

▲ Obliczyć kąt między gradientami funkcji $z = \arcsin \dfrac{x}{x+y}$ w punktach A(1,1) i B(3,4)

▲ Znaleźć pochodną funkcji $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ w punkcie M(3,1), w kierunku wektora MN, gdzie N(6,5).

▲ Obliczyć pochodną funkcji $u = xy^2 + z^3 - xyz$ w punkcie M(1,1,2) w kierunku tworzącym z osiami układu współrzędnych kąty odpowiednio: $\dfrac{p}{3}, \dfrac{p}{4}, \dfrac{p}{3}$.

▲ Znaleźć różniczki zupełne zadanych funkcji:

a) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ b) $u = \ln\left(x^3 + 3y^3 - z^3\right)$

c) $z = \sqrt[3]{x + y^2}$ dla p(2,5), $\left(\vartriangle x, \vartriangle y\right) = \left(0,1; 0,01\right)$

▲ Obliczyć przybliżone wartości wyrażenia:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2}$

▲ Znaleźć ekstrema funkcji:

$a)\qquad z = 4(x-y) - x^2 - y^2,\qquad\qquad b)\qquad z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

▲ Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji:

$a)$ $z = x^2 - y^2$, w kole $x^2 + y^2 \le 4$

$b)$ $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ w prostokącie ograniczonym prostymi $x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$

$c)$ $z = x^2 y(4 - x - y)$ w trójkącie ograniczonym prostymi $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 6.$

Całki wielokrotne i krzywoliniowe.

▲ Obliczyć całki podwójne po zadanych prostokątach:

a) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy,$ gdzie $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

b) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy,$ gdzie $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

c) $\iint\limits_D x \sin(x+y)\,dxdy,$ gdzie $D = \left\{(x, y) : 0 \le x \le p, 0 \le y \le \frac{p}{2}\right\}$

d) $\iint\limits_D x^2 y e^{xy}\,dxdy,$ gdzie $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$

▲ Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ zamienić na całkę literowaną, jeśli obszar D jest:

a) równoległobokiem ograniczonym prostymi: $x = 3,\ x = 5,\ 3x - 2y + 4 = 0,$ $3x - 2y + 1 = 0$

b) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

c) $D = \{(x, y) : y \ge x^2, y^2 \le 4 - x^2\}$

d) trójkątem o bokach $y = x,\ y = 2x,\ x + y = 6$

▲ W podanych całkach zmienić kolejność całkowania:

a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy,$

b) $\int_0^1 dx \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dy,$

c) $\int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy$

▲ Obliczyć całki:

a) $\iint_D xydxdy,$ gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach: $O(0,0),\ A(4,0),\ B(0,6)$

b) $\iint_D xy^2dxdy,$ gdzie D jest obszarem ograniczonym liniami o równaniach: $y = x^2$ i $y + x = 2$

c) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy,$ gdzie obszar D jest ograniczony liniami o równaniach: $xy = 1,$ $y = 4x$ oraz $x = 3$

▲ Przechodząc do współrzędnych biegunowych wyznaczyć granice całkowania w następujących całkach:

a) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy,$

b) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy,$

c) $\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$

▲ Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami:

a) $y^2 = 4x + 4$ oraz $y = 2 - x$

b) $y = x^2 - 8x + 20$ oraz $y = x + 2$

c) $3y^2 = 25x$ oraz $5x^2 = 9y$

▲ Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami o równaniach:

a) $2x + 3y + 5z = 24,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

b) $z = x^2 + y^2,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

c) $z = x + y + 4,\ y^2 = 4x,\ x = 4,\ z = 0,\ y = 0$ (dla $y > 0$)

d) $y = x^2,\ x = y^2,\ z = 12 = y - x^2$

▲ Obliczyć następujące całki krzywoliniowe:

a) $\int_L x dx$, gdzie L jest konturem trójkąta, którego bokami są osie układu współrzędnych i prosta $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

b) $\int_L (x^2-y^2)dx$, gdzie L jest łukiem paraboli $y=x^2$ między punktami $A(0,0)$ i $B(2,4)$

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xydx+(y-x)dy$ oraz $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy+x^2dy$ wzdłuż linii:

1) $y=x$ 2) $y=x^2$ 3) $y=x^3$ 4) $y^2=x$

d) $\int_L \frac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$, gdzie L jest częścią okręgu: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ dla $t\in\langle 0,p\rangle$

Równania różniczkowe zwyczajne.

▲ Znaleźć całkę, a następnie całkę szczególną równania różniczkowego, spełniającą podany obok warunek początkowy:

a) $\frac{dy}{dx}=\sin x$, $y\left(\frac{p}{2}\right)=0$

b) $\frac{dy}{dx}=e^{-x}$, $y(1)=1$

c) $\frac{dy}{dz}=x^3-3x^2+x-1$, $y(-1)=-2$

▲ Wykazać, że podana funkcja jest całką szczególną danego równania różniczkowego w pewnym zbiorze liczb:

a) $y=\frac{\sin x}{x}$; $xy'+y=\cos x$

b) $y=x\sqrt{1-x^2}$; $yy'=x-2x^3$

c) $y=\frac{3}{\cos x}$; $y'-ytgx=0$

▲ Dany jest wzór określający rodzinę funkcji oraz równanie różniczkowe:

a) $y=\dfrac{-1}{4x+C}$; $y'=4y^2$

b) $y=\ln\left(C+2e^x\right)$; $y'=2e^{x-y}$

c) $y=\sqrt{2x^2+Cx}$; $y'=\dfrac{2x^2+y^2}{2xy}$

▲ Wykazać, że wzór ten przedstawia całkę ogólną danego równania różniczkowego.

▲ Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{tgy}{x}$ b) $y-x\dfrac{dy}{dx}=1+x^2\dfrac{dy}{dx}$

c) $e^y\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}-2x\left(1+e^y\right)=0$

▲ Znaleźć całki szczególne poniższych równań, dla podanych obok warunków początkowych:

a) $ydx+ctgxdy=0,\ \ y\left(\dfrac{p}{2}\right)=-1$

b) $y=y'\cos^2 x\ln y,\ \ y\left(p\right)=1$

c) $2\left(1+e^x\right)yy'=e^x,\ \ y\left(0\right)=0$

d) $y'=\dfrac{1+y^2}{1+x^2},\ \ y\left(0\right)=1$

▲ Rozwiązać równanie różniczkowe:

a) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x}}{x},$

$y'\cos x-y\sin x=\sin 2x,$

$y'-ytgx=ctgx,$

$\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{1+x^2}y=-\dfrac{1}{2x\left(1+x^2\right)}.$

b) $y'+3y=e^{7x},$

$$y' - y = xe^{2x},$$
$$4y' + 7y = 14x^2 - 11x + 18,$$
$$2y' + 5y = 5\sin x + 4\cos x,$$
$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3x^2 - 2x^3 + (4x-2)\cos 2x - 4x\sin 2x,$$
$$\frac{dy}{dx} + 3y = \cos 3x - (6x+1)\sin 3x + e^{-3x},$$
$$\frac{dy}{dx} + y = (x+1)\cos 2x - 2x\sin 2x + \sin x + \cos x + x^2.$$

c) $y' - xy = -y^3 e^{-x^3}$

$$x^2y^2y' + yx^3 = 1,$$
$$tds - 2sdt = t^3 \ln t dt,$$

$y' - \frac{xy}{2(x^2-1)} = \frac{x}{2y}$ znaleźć krzywą przechodzącą przez punkt $P_0(0,1)$.

▲ Wyznaczyć całkę szczególną spełniającą podane warunki początkowe:

$t\frac{ds}{dt} = 2ts - 3;\quad s = 1$ gdy $t = -1,$

$3y^2y' + y^3 = x + 1;\quad y = -1$ gdy $x = 1,$

$(1-x^2)y' - xy = xy^2;\quad y = 0,5$ gdy $x = 0.$

▲ Rozwiązać równania różniczkowe:

$$y''' = \frac{6}{x^3};\quad y(1) = 2,\quad y'(1) = 1,\quad y''(1) = 1$$
$$y'' = 4\cos 2x;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$$
$$y'' + y' tgx = \sin 2x$$
$$yy'' + y'^2 = 0$$
$$xy'' - y' = e^x x^2$$
$$y'' + 2yy'^3 = 0.$$

▲ Rozwiązać równania różniczkowe:

$$y''-5y'+4y=0$$
$$2y''-6y'-y=0$$
$$y''-4y'-5y=0$$
$$y''-4y'+13y=0$$
$$y''-2y'+y=0$$
$$y''=4y$$

▲ Znaleźć całkę szczególną podanego równania różniczkowego spełniającą zadane wrunki początkowe:

$$y''-4y'+3y=0; \quad y(0)=2, \quad y'(0)=4$$
$$4y''-12y'+9y=0; \quad y(0)=5, \quad y'(0)=14$$
$$y''-2y'+5y=0; \quad y(0)=3, \quad y'(0)=15$$

▲ Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

$$y''+6y'+10y=1-x$$
$$y''-3y'+2y=x^2$$
$$y''+9y=2\cos 3x+5\sin 3x$$
$$y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$$
$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$$
$$y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$$

▲ Znaleźć całki szczególne podanych równań różniczkowych przy zadanych warunkach początkowych:

a) $y''+4y=\sin x; \quad x=0, \quad y=1, \quad y'=1$

b) $y''-2y'=e^{2x}+x^2-1; \quad x=0, \quad y=\frac{1}{8}, \quad y'=1.$

Zadania wybrali: dr Maria Potępa i dr Ryszard Mosurski.