

Dyfuzja Arnolda w Problemie Trzech Ciał

Maciej Capiński

Wydział Matematyki Stosowanej AGH

10.10.2008

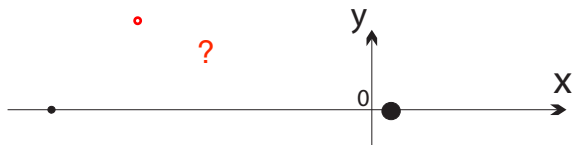
Plan prezentacji

- Ograniczony problem trzech ciał
- Zasada zachowania energii
- Układy apriori niestabilne
- Twierdzenia KAM oraz o normalnej hiperboliczności
- Dyfuzja Arnolda
- Kilka pytań otwartych

Ograniczony problem trzech ciał

Problem kołowy

$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & p'_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\y' &= \frac{\partial H}{\partial p_y} & p'_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}\end{aligned}$$



$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{(p_x + y)^2 + (p_y - x)^2}{2} - \Omega(x, y),$$

$$\Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

Zasada zachowania energii

Problem kołowy

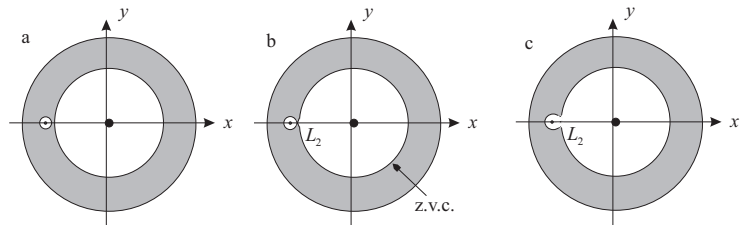
$$\begin{aligned}x' &= \frac{\partial H}{\partial p_x} & p'_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\y' &= \frac{\partial H}{\partial p_y} & p'_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}\end{aligned}$$



$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' + \frac{\partial H}{\partial p_x}p'_x + \frac{\partial H}{\partial p_y}p'_y = 0$$

Obszar Hill'a

Problem kołowy



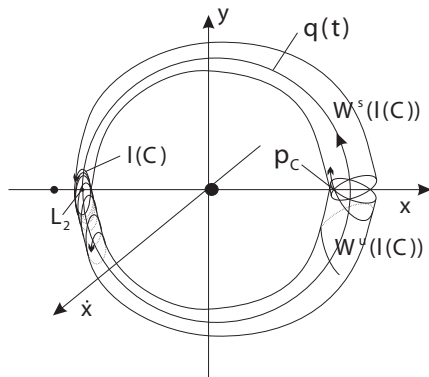
$$H = C$$

a. $C < C_2$

b. $C = C_2$

c. $C > C_2$

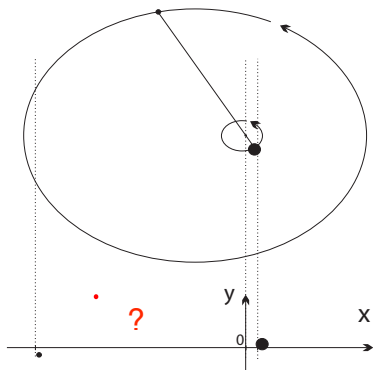
Układ apriori niestabilny



[LMS] J. Llibre, R. Martinez, C. Simo, *Transversality of the Invariant Manifolds Associated to the Lyapunov Family of Periodic Orbits Near L_2 in the Restricted Three Body Problem*, Jour. of Diff. Eq. 58, 104-156 (1985).

Ograniczony problem trzech ciał

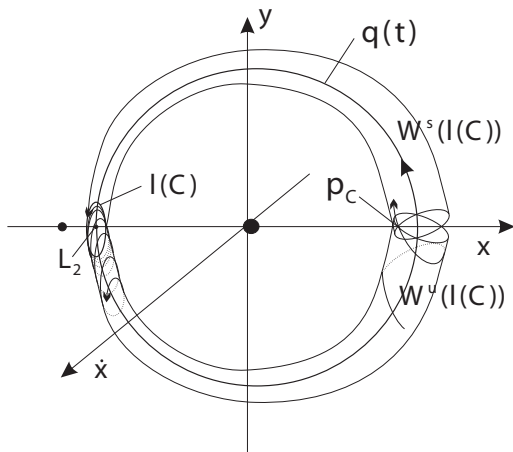
Problem eliptyczny



$$H^e(x, y, p_x, p_y) = H(x, y, p_x, p_y) + eG(x, y, t) + O(e^2)$$

Główne pytanie:

Co przetrwa?

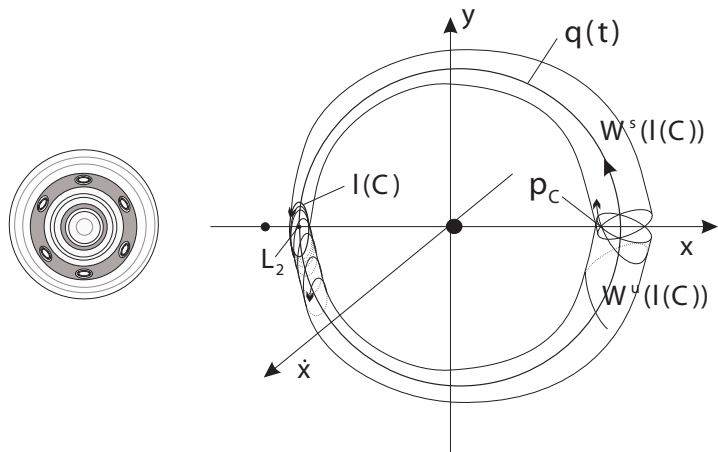


Zbiór Cantora orbit okresowych przetrwa perturbację:

- Zbiór orbit okresowych jest normalnie hiperboliczny
- Na zbiorze występuje zjawisko "twistu" - można stosować Tw. K.A.M.

Główne pytanie:

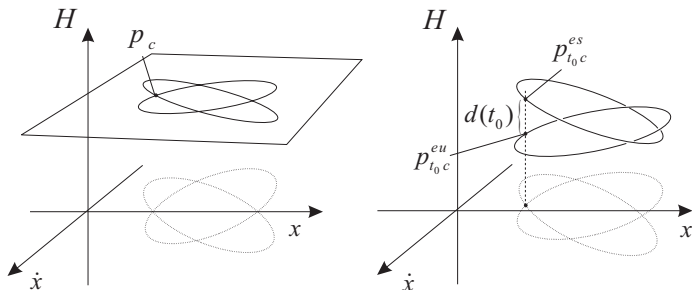
Co przetrwa?



Zbiór Cantora orbit okresowych przetrwa perturbację:

- Zbiór orbit okresowych jest normalnie hiperboliczny
- Na zbiorze występuje zjawisko "twistu" - można stosować Tw. K.A.M.

Czy rozmaitość stabilna i niestabilna mogą się spotkać?



$$P_{t_0}^e : \Sigma_{t_0} \rightarrow \Sigma_{t_0+2\pi}$$

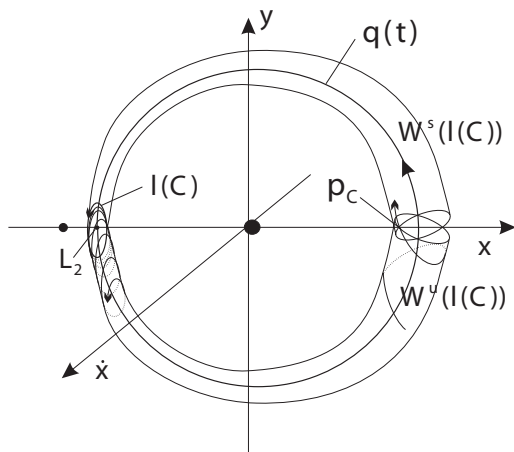
Metoda Melnikowa:

$$d(t_0) = eM(t_0) + O(e^2)$$

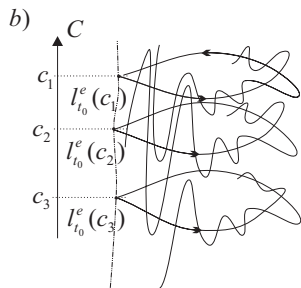
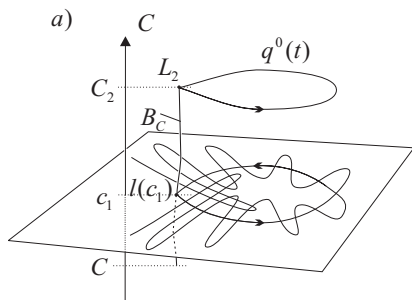
$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H, G\}(q^0(t-t_0), t) dt$$

Dynamika przetrwa

A nawet więcej...



Dyfuzja Arnolda



Problemy otwarte

- Co dla rzeczywistych parametrów μ oraz e ? (np. układ Słońce Jowisz)
- Dla jak wielkich perturbacji działa normalna hiperboliczność?
- Dla jak wielkich perturbacji działa KAM?