2 do nieskończoności (2^∞)

Piotr Oprocha

AGH

Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
Kraków, Polska

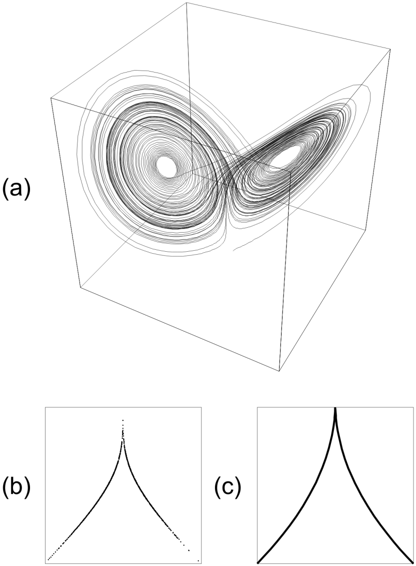
Kraków, 10 październik 2008

Przykład Lorenza (1963)

"From a theoretical standpoint, he showed that very complicated behaviors could arise from very simple systems— chaotic behavior could be generated with only three variables involved.

In contradiction to the old, well-established tenet according to which simple causes gave rise to simple effects, he found that simplicity could indeed generate complexity."

Aubin & Dalmedico, 2002

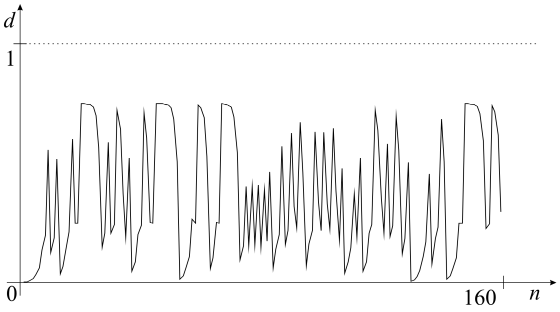


Twierdzenie Li i Yorke (1975)

In this paper, we analyze a situation in which the sequence $\{F^n(x)\}$ is non-periodic and might be called "chaotic".

Li i Yorke, 1975

1. Wykres $d = |f^n(x) - f^n(y)|$ dla $x = 0.25$, $y = 0.249$ oraz $f(x) = 4x(1-x)$.



Twierdzenie Li i Yorke (1975)

1. punkt p jest okresowy o okresie n (f posiada cykl o długości n) gdy
   1. $f^n(p) = p$
   2. $f^i(p) \neq p$ dla $i = 1, \ldots, n-1$.

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągłe. Gdy f ma cykl o długości 3 to:

1. Dla każdego $k = 1, 2, \ldots$ funkcja f posiada cykl o długości k
2. Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (nie zawierający punktów okresowych) taki, że dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Twierdzenie Li i Yorke (1975)

1. punkt p jest okresowy o okresie n (f posiada cykl o długości n) gdy
   1. $f^n(p) = p$
   2. $f^i(p) \neq p$ dla $i = 1, \dots, n-1$.

Twierdzenie (Li-Yorke)

Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągłe. Gdy f ma cykl o długości 3 to:

1. Dla każdego $k = 1, 2, \dots$ funkcja f posiada cykl o długości k
2. Istnieje nieprzeliczalny zbiór S (nie zawierający punktów okresowych) taki, że dla dowolnych $x, y \in S$ jeśli $x \neq y$ to

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0.$$

Porządek Szarkowskiego (1964)

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2^2 \rhd 5 \cdot 2^2 \rhd \ldots$$
$$\ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Twierdzenie (Szarkowski)

Jeżeli funkcja ciągła $f : [0,1] \to [0,1]$ posiada cykl długości k a l jest liczbą mniejszą od k w porządku Szarkowskiego ($k \rhd l$), to f posiada także cykl o długości l.

Twierdzenie (Szarkowski)

Dla dowolnych k, l spełniających $k \rhd l$ istnieje funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ która posiada cykl o długości l ale nie posiada cyklu o długości k.

Porządek Szarkowskiego (1964)

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2 \rhd 5 \cdot 2 \rhd \ldots \rhd 3 \cdot 2^2 \rhd 5 \cdot 2^2 \rhd \ldots$$

$$\ldots 2^{\infty} \ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

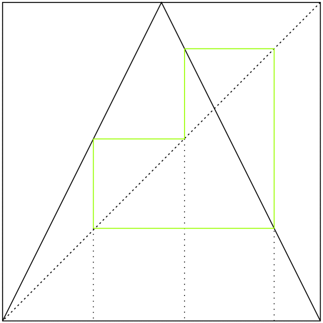
Twierdzenie (Szarkowski)

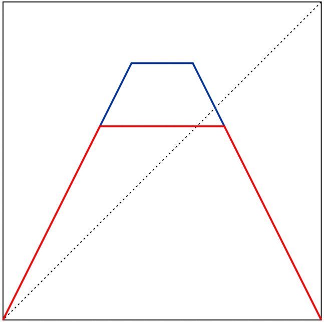
Jeżeli funkcja ciągła $f : [0,1] \to [0,1]$ posiada cykl długości k a l jest liczbą mniejszą od k w porządku Szarkowskiego ($k \rhd l$), to f posiada także cykl o długości l.

Twierdzenie (Szarkowski)

Dla dowolnych k, l spełniających $k \rhd l$ istnieje funkcja $f : [0,1] \to [0,1]$ która posiada cykl o długości l ale nie posiada cyklu o długości k.

Namiot i trapezy





1. $T(x) = 1 - |1 - 2x|, \qquad T_h(x) = \min\{T(x), h\}$
2. $h(n) = \min\{\max P \ : \ P$ - cykl długości $n\}$

2^∞ jednak istnieje!

1. $\mathbb{P}(f) = \{n \ : \ f$ ma cykl długości $n\}$
2. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ określamy
$$\mathrm{Sz}(k) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ k \trianglerighteq n\}\,.$$
3. Mówimy, że f ma typ Szarkowskiego $k \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ gdy
$$\mathbb{P}(f) = \mathrm{Sz}(k).$$
4. Określamy liczbę $h = h(2^\infty)$ wzorem
$$h(2^\infty) = \sup_n h(2^n)$$
5. Odwzorowanie $T_{h(2^\infty)}$ jest typu Szarkowskiego 2^∞.

2^∞ jednak istnieje!

1. $\mathbb{P}(f) = \{n \ : \ f \text{ ma cykl długości } n\}$
2. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ określamy
$$\mathrm{Sz}(k) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ k \trianglerighteq n\}.$$
3. Mówimy, że f ma typ Szarkowskiego $k \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ gdy
$$\mathbb{P}(f) = \mathrm{Sz}(k).$$
4. Określamy liczbę $h = h(2^\infty)$ wzorem
$$h(2^\infty) = \sup_n h(2^n)$$
5. Odwzorowanie $T_{h(2^\infty)}$ jest typu Szarkowskiego 2^∞.

2^∞ jednak istnieje!

1. $\mathbb{P}(f) = \{n \ : \ f$ ma cykl długości $n\}$
2. Dla $n \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ określamy
$$\mathrm{Sz}(k) = \{n \in \mathbb{N} \ : \ k \trianglerighteq n\}\,.$$
3. Mówimy, że f ma typ Szarkowskiego $k \in \mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ gdy
$$\mathbb{P}(f) = \mathrm{Sz}(k).$$
4. Określamy liczbę $h = h(2^\infty)$ wzorem
$$h(2^\infty) = \sup_n h(2^n)$$
5. Odwzorowanie $T_{h(2^\infty)}$ jest typu Szarkowskiego 2^∞.

Chaos w sensie Li i Yorke'a raz jeszcze

1. Odwzorowanie $f : X \to X$ jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a gdy istnieje nieprzeliczalny zbiór $S \subset X$ taki, że dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$ zachodzi

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> 0,\\ \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0.\end{aligned}$$

2. Jeśli $f : I \to I$ jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a to ma typ Szarkowskiego conajmniej 2^∞
3. Jeśli $f : I \to I$ ma typ Szarkowskiego $\mathrm{Sz}(k)$ gdzie $k \rhd 2^\infty$ to jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a
4. Gdy $X = I$ można założyć, że zbiór S w powyższej definicji jest zbiorem Cantora (gdy X jest dowolny, można to zrobić dla definicji z $\delta > 0$).

Chaos w sensie Li i Yorke'a raz jeszcze

1. Odwzorowanie $f : X \to X$ jest δ-chaotyczne w sensie Li i Yorke'a gdy istnieje nieprzeliczalny zbiór $S \subset X$ taki, że dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$ zachodzi

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> \delta, \\ \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$

2. Jeśli $f : I \to I$ jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a to ma typ Szarkowskiego conajmniej 2^∞
3. Jeśli $f : I \to I$ ma typ Szarkowskiego $\mathrm{Sz}(k)$ gdzie $k \triangleright 2^\infty$ to jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a
4. Gdy $X = I$ można założyć, że zbiór S w powyższej definicji jest zbiorem Cantora (gdy X jest dowolny, można to zrobić dla definicji z $\delta > 0$).

Chaos w sensie Li i Yorke'a raz jeszcze

1. Odwzorowanie $f : X \to X$ jest δ-chaotyczne w sensie Li i Yorke'a gdy istnieje nieprzeliczalny zbiór $S \subset X$ taki, że dla dowolnych $x, y \in S$, $x \neq y$ zachodzi

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> \delta, \\ \liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0. \end{aligned}$$

2. Jeśli $f : I \to I$ jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a to ma typ Szarkowskiego conajmniej 2^∞
3. Jeśli $f : I \to I$ ma typ Szarkowskiego $\mathrm{Sz}(k)$ gdzie $k \rhd 2^\infty$ to jest chaotyczne w sensie Li i Yorke'a
4. Gdy $X = I$ można założyć, że zbiór S w powyższej definicji jest zbiorem Cantora (gdy X jest dowolny, można to zrobić dla definicji z $\delta > 0$).