"Liczby rządzą światem."
Pitagoras

Def. Liczbą zespoloną nazywamy liczbę postaci $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $i^2 = -1$.

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C} = \{ x + yi : x, y \in \mathbb{R} \}$

Oznaczenia $x = \operatorname{Re} z$ – część rzeczywista liczby z,
$y = \operatorname{Im} z$ – część urojona liczby z .

Def. Mówimy, że liczby zespolone $z = x + yi$ oraz $w = a + bi$ są równe $\Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.

Działania na liczbach zespolonych.

Niech $z = x + yi$, $w = a + bi$, wtedy :

$z + w = (x + yi) + (a + bi) = (x + a) + (y + b)i$

$z \cdot w = (x + yi) \cdot (a + bi) = x \cdot a + y \cdot ai + x \cdot bi + y \cdot bi^2 = (xa - yb) + (ya + xb)i$

Tw. własności działań w $\mathbb{C}$

Niech z, w, u będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy:

$z + w = w + z$	przemienność dodawania
$(z+w)+u = z+(w+u)$	łączność dodawania
$z + (0+0i) = z$	element neutralny dodawania
$z + (-1) \cdot z = 0+0i$	element przeciwny do z
$z \cdot w = w \cdot z$	przemienność mnożenia
$(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$	łączność mnożenia
$z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$	rozdzielność dodawania względem mnożenia

Dowód:

Niech z= x + yi; w=a + bi; u= c + di ;

Ad.1 z + w=x + yi + a +bi =a +bi + x+ yi = w + z

Ad.2 (z + w)+u=(x+ yi + a+ bi)+c+di =(x+a)+c+((y+b)+d)i =x+(a+c)+(y+(b+d))i=z+(w+u)

Ad.3 z+(0+0i)=x +yi +0+0i =x+0+(y+0)i =x +yi =z

Ad.4 z+(-1)·z=x+yi + (-1)·(x+ yi)=x+yi -x- yi=x-x+(y-y)i=0+0i

Ad.5 z·w=(x +yi)·(a +bi)=(xa-yb)+(xb+ya)i=(ax-by)+(bx+ay)i=(a +bi)·(x +yi)=w·z

Ad.6 (z·w)·u=((x +yi)·(a +bi))·(c +di)=((xa-yb)+(xb+ya)i)·(c+di)=
=(xac-ybc-xbd-yad)+(xbc+yac+xad-ybd)i

z·(w·u)=(x +yi)·((a +bi)·(c +di))=(x+yi)·((ac-bd)+(ad+bc)i)=(xac-xbd-yad-ybc)+(yac-ybd+xad+xbc)i

Ad.7 z·(w+u)=(x+yi)·(a+c+(b+d)i)=(xa+xc-yb-yd)+(xb+xd+ya+yc)i =
=(xa-yb)+(xb+ya)i+(xc-yd)+(xd+yc)i=z·w+z·u

Def. Sprzężeniem liczby zespolonej z= x + yi nazywamy liczbę $\bar{z}$=x-yi; (ozn . $\bar{z}=z^*$)

Modułem liczby zespolonej z= x +yi nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Tw. własności sprzężenia liczby zespolonej

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = z$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Dowód: wystarczy rozpisać

Tw. własności modułu liczby zespolonej

1. $|z| \geq 0 \ \wedge \ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
3. $|z + w| \leq |z| + |w|$
4. $Rez \leq |z| \wedge \ Imz \leq |z|$

Dowód: wystarczy rozpisać

Wniosek:

Jeżeli $z \neq 0$, to $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Np. Oblicz

$$\frac{(1-2i)\overline{(-2+3i)}}{(3+i)^2} - \frac{(-4+3i)(\bar{2}i)^2}{(1+i)^6} = \frac{(1-2i)(-2-3i)}{9+6i+i^2} - \frac{(-4+3i)(-2i)^2}{(1+2i+i^2)^3} =$$

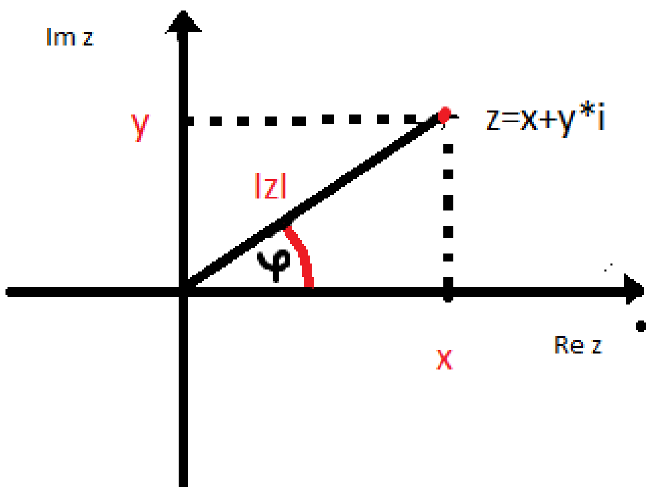
$$= \frac{-2-6+4i+6i}{8+6i} - \frac{(-4+3i)(2i)^2}{(2i)^3} = \frac{(-8+10i)(8-6i)}{64+36} - \frac{(-4+3i)(-2i)}{4} =$$

$$= \frac{-64+60+80i+48i}{100} - \frac{6+8i}{4} =$$

$$= -\frac{1}{25} - \frac{3}{2} + \left(\frac{32}{25} - 2\right)i = -\frac{77}{50} - \frac{18}{25}i$$

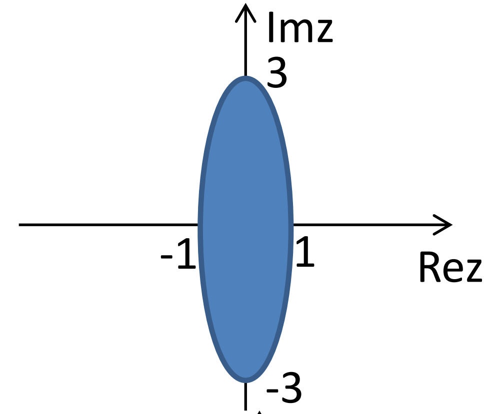
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej:

Liczbę zespoloną reprezentuje punkt na płaszczyźnie zespolonej z=(x,y), gdzie x=Rez, y=Imz.



Np.

1. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór A=$\{z \in \mathbb{C}: |z + 2\bar{z}| \leq 3\}$



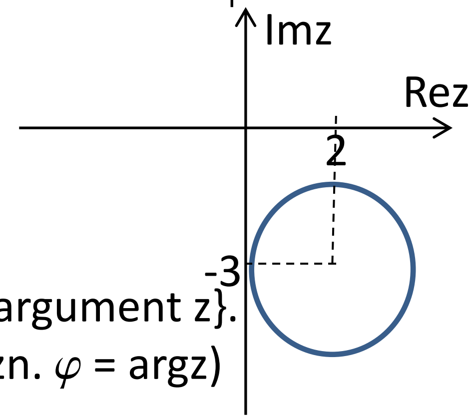
Niech z=x+yi

$$|x + yi + 2x - 2yi| \leq 3$$

$$\sqrt{(3x)^2 + (-y)^2} \leq 3$$

$$x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1 \quad \text{równanie elipsy}$$

2. Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiór B=$\{z \in \mathbb{C}: |z - 2 + 3i| = 2\}$



Zgodnie z definicją |z-w| jest odległością pomiędzy punktami z i w ⇒

$|z - 2 + 3i| = 2$ jest okręgiem o środku 2-3i i promieniu 2

Def. Argumentem liczby zespolonej z = x +yi nazywamy

każdą liczbę rzeczywistą φ, taką że : cos φ=$\frac{x}{|z|}$ $\wedge$ sinφ =$\frac{y}{|z|}$

Zbiór wszystkich argumentów liczby zespolonej z nazywamy Arg z ={φ: φ-argument z}.

Argumentem głównym liczby z nazywamy taki φ є Argz, że $\varphi \in [0,2\pi)$ (ozn. φ = argz)

Wniosek:

Jeżeli z=x+yi, to dla $\varphi \in$ Arg z: z= |z|(cosφ +$i$sinφ) – postać trygonometryczna liczby z

Def. $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$, gdzie $\varphi \in$ Arg z

Wniosek:

Jeżeli z= |z|(cosφ +$i$sinφ), to dla $\varphi \in$ Arg z: $z = |z|e^{i\varphi}$ - postać wykładnicza liczby z

Np. Napisz postać trygonometryczną liczby z=3-2i

|z|=$\sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ $\begin{cases} cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}} \\ sin\varphi = \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{cases}$ ⇒ $\varphi \in$IV ćwiartki $\wedge$ $tg\varphi = -\frac{2}{3}$ ⇒ φ=-arctg$\frac{2}{3}$

$$3-2i=\sqrt{13}(\cos\left(-arctg\frac{2}{3}\right)+isin\left(-arctg\frac{2}{3}\right))$$

Tw. Własności argumentu liczby zespolonej

Jeżeli $\varphi \in$ Argz $\wedge$ $\psi \in$ Argw , to

1. $\varphi + \psi \in$ Arg(z·w)
2. $\varphi - \psi \in$ Arg($\frac{z}{w}$) , w≠0

Dowód:

z·w=|z|(cosφ+$i$sinφ)·|w|(cosψ+$i$sinψ)=|z|·|w|(cosφcosψ-sinφsinψ+ i(sinφcosψ+cosφsinψ))=

=|z|·|w|(cos(φ+ψ)+$i$sin(φ+ψ))

$$\frac{z}{w}=\frac{|z|(cos\varphi+isin\varphi)}{|w|(cos\psi+isin\psi)}=\frac{|z|(cos\varphi+isin\varphi)(cos\psi-isin\psi)}{|w|(cos^2\psi+sin^2\psi)}=$$

$$\frac{|z|(cos\varphi cos\psi+sin\varphi sin\psi+i(sin\varphi cos\psi-cos\varphi sin\psi)}{|w|}=\frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi)+isin(\varphi-\psi))$$

⍰

Wniosek: wzór de Moivre'a

$$(|z|(cos\varphi+isin\varphi))^n=|z|^n(cosn\varphi+isinn\varphi)\quad dla\ n\in$$

Dowód: indukcja

I. n=1 O.K.

II. Z: $(|z|(cos\varphi+isin\varphi))^n=|z|^n(cosn\varphi+isinn\varphi)$

T: $(|z|(cos\varphi+isin\varphi))^{n+1}=|z|^{n+1}(\cos(n+1)\varphi+isin(n+1)\varphi)$

D:$(|z|(cos\varphi+isin\varphi))^{n+1}=|z|^n(cosn\varphi+isinn\varphi)\cdot|z|(cos\varphi+isin\varphi)=$
$|z|^{n+1}(\cos(n\varphi+\varphi)+isin(n\varphi+\varphi))$

Np. Oblicz

$$\frac{(\sqrt{3}-i)^{13}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6}{(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^{17}} = \frac{2^{13}\cdot 2^6(\cos\left(-\frac{13\pi}{6}+\frac{6\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{13\pi}{6}+\frac{6\pi}{4}\right))}{\left(2\sqrt{2}\right)^{17}(cos\frac{17\cdot 4\pi}{3}+isin\frac{17\cdot 4\pi}{3})} =$$

$$= \frac{2^{19}}{2^{25}\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{6}-\frac{68\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{4\pi}{6}-\frac{68\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2^6\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{70\pi}{3}\right)+isin\left(-\frac{70\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^8}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}{2^9}$$

$z_1 = \sqrt{3}-i,\qquad |z_1| = 2\qquad \begin{cases} cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\varphi_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 \in IV\ ćw.\ \ tg\varphi_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$

$z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i,\qquad |z_2| = 2\qquad \begin{cases} cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sin\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 \in I\ ćw.\ \ tg\varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$

$z_3 = -\sqrt{2}-\sqrt{6}i,\quad |z_3| = 2\sqrt{2}\qquad \begin{cases} cos\varphi_3 = -\frac{1}{2} \\ sin\varphi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_3 \in III\ ćw.\ \ tg\varphi_3 = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{4\pi}{3}$

Zadanie:

1. Oblicz: a) $(-2+3i)\overline{(3-5i)}+\left(\frac{2-i}{3+4i}\right)^2$, b) $\frac{2-i}{1+2i}\cdot\frac{1+i}{-2+3i}$, c) $i^{13}(2\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^3$
2. Wylicz wszystkie liczby zespolone spełniające równanie: a) $z^2 = |z|$, b) $\frac{z+1}{z-1}+1 = i$,
   c) $(2-i)z+(1-3i)\bar{z} = 1-3i$

3. Na płaszczyźnie zespolonej narysuj zbiory: a) $\{ z\in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(-1+3i)z+1-i\leq 0\}$,

b) $\{ z\in \mathbb{C}\colon |iz+2-3i|> 2 \wedge \arg z^3 \leq \pi\}$, c) $\{ z\in \mathbb{C}\colon |z^2+4| \leq |z-2i| \wedge \arg(iz-z) > \frac{3\pi}{2}\}$

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej liczby: a) $\sqrt{3}-3i$, b) $1+itg\frac{\pi}{10}$, c) $-cos\frac{\pi}{8}+isin\frac{9\pi}{8}$

5. Oblicz: a) $\frac{(\sqrt{3}+i)^7(-\sqrt{2}+\sqrt{6}i)^5}{(3-\sqrt{3}i)^{11}}$, b) $\frac{(2-2i)^{18}}{(1+i)^8(-\sqrt{7}+\sqrt{21}i)^{10}}$, c) $\left(\frac{(i-1)(\sqrt{15}-\sqrt{5}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^8$

Def. Niech $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $n\in\mathbb{N}$.
Pierwiastkiem stopnia n z liczby zespolonej $z\neq 0$ nazywamy każdą liczbę zespoloną w taką, że $w^n = z$ (piszemy, że $w = \sqrt[n]{z}$)
UWAGA: Pierwiastkiem zespolonym z z=0 jest w=0. ($0 = \sqrt[n]{0}$)

Tw.
Jeżeli $z = |z|(cos\varphi + isin\varphi) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, to $\sqrt[n]{z} \in \{\sqrt[n]{|z|}(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi+2k\pi}{n})\colon k=0,1,\dots,n-1\}$

Dowód:

$$[\sqrt[n]{|z|}(cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi+2k\pi}{n})]^n = |z|\left(cosn\frac{\varphi+2k\pi}{n} + isinn\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) =$$
$$= |z|\big(\cos(\varphi+2k\pi) + isin(\varphi+2k\pi)\big) = |z|(cos\varphi + isin\varphi) \quad \text{dla } k = 0,1,\dots,n-1$$

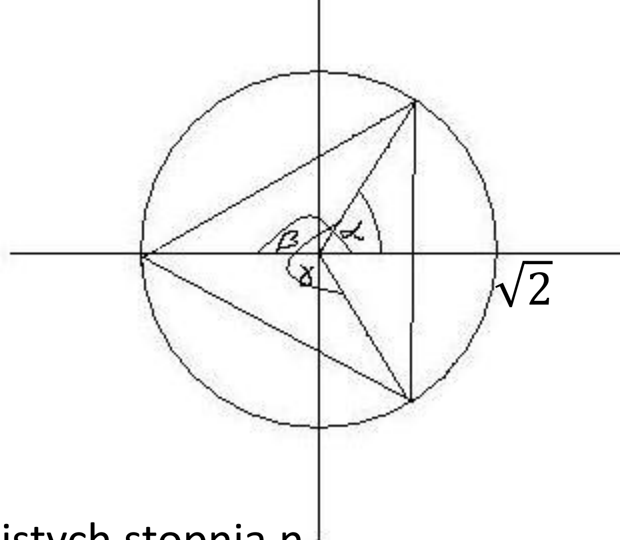
Wniosek:
Pierwiastki n-tego stopnia z liczby $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, leżą na okręgu o środku w $z_0 = 0$ i promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ oraz tworzą n-kąt foremny wpisany w ten okrąg.

Np. Oblicz $\sqrt[3]{(1+i)^3}$

$$\sqrt[3]{(1+i)^3} \in \{1+i, \sqrt{2}(cos\beta + isin\beta), \sqrt{2}(cos\gamma + isin\gamma)\}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\,, \qquad \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}$$

$$\sqrt[3]{(1+i)^3} \in \{1+i, \sqrt{2}(cos\frac{11\pi}{12} + isin\frac{11\pi}{12}),$$
$$\sqrt{2}(cos\frac{19\pi}{12} + isin\frac{19\pi}{12})\}$$



Wniosek:
Każdy wielomian zmiennej zespolonej o współczynnikach rzeczywistych stopnia n ma n pierwiastków w zbiorze liczb zespolonych.
Jeżeli z_0 jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód:
1. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki liniowe lub kwadratowe o ujemnym wyróżniku. Pierwiastkami trójmianu kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$ o $\Delta < 0$ są $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, gdzie $\sqrt{\Delta}$ jest jednym z pierwiastków zespolonych z Δ
2. Niech $W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ i $W(z_0) = 0$.

$$\overline{W(z_0)} = 0 \ \wedge \ \overline{a_n {z_0}^n + a_{n-1} {z_0}^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = 0 \ \Rightarrow$$
$$a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0 \Rightarrow W(\overline{z_0}) = 0$$

Np. Rozwiąż

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$

$\Delta = -12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \in \{2\sqrt{3}i, -2\sqrt{3}i\}$

$z_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

2. $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$

$w = z^2 \;\Rightarrow\; w^2 - 2w + 5 = 0$

$\Delta = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \in \{4i, -4i\}$

$w_{1,2} = 1 \pm 2i \;\Rightarrow\; z^2 = 1 + 2i \;\;/\;\; z^2 = 1 - 2i$

$$(x + yi)^2 = 1 + 2i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^4 - x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$t = x^2 \quad t^2 - t - 1 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{cases}$$

dla $(x + yi)^2 = 1 - 2i$ otrzymamy pierwiastki sprzężone do wcześniej wyliczonych

Odp. $z \in \left\{ \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right\}$

3. $(z-2i)^3=(2z+i)^3$

zakładamy, że $2z \neq -i \quad bo \ \left(-2\frac{1}{2}i\right)^3 \neq 0$

$\left(\frac{z-2i}{2z+i}\right)^3=1 \ \Rightarrow \ \frac{z-2i}{2z+i}=\sqrt[3]{1}$

$|1|$=1, $\varphi = arg1 = 0 \ \Rightarrow$

$\sqrt[3]{1} \in \left\{\sqrt[3]{1}(cos0+isin0), \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}\right), \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)\right\}=\{1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

$$\frac{z-2i}{2z+i}=1 \ \vee \ \frac{z-2i}{2z+i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ \frac{z-2i}{2z+i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=-3i \ \vee \ z=\frac{3i-\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}i} \ \vee \ z=\frac{3i+\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}i}$$

$$z=-3i \ \vee \ z=\frac{3i-5\sqrt{3}}{14} \ \vee \ z=\frac{3i+5\sqrt{3}}{14}$$

Zadanie:

6. Oblicz pierwiastki zespolone: a) $\sqrt[3]{8\sqrt{3}-8i}$, b) $\sqrt[6]{(1+i)^2}$, c) $\sqrt[8]{(\sqrt{3}i-1)^{24}}$

7. Rozwiąż równania: a) $(iz-1)^3=-i$, b) $z^3=(3z-i)^3$, c) $(1-z)^4=(1-i)^8$

8. Rozwiąż: a) $z^4+1=0$, b) $z^2+2z+5=0$, c) $z^4-4z^2+5=0$

9. Rozwiąż: a) $18z^3-9z^2+2z-1=0$, b) $(1+i)z^3+2z^2+(4+4i)z+8=0$,
c) $z^3+3(2-i)z^2+3(3-4i)z+(2-11i)=0$

10. Wiedząc, że z_0 jest pierwiastkiem równania rozwiąż:
a) $2z^4-10z^3+35z^2-30z+13=0 \quad z_0=2-3i$,
b) $z^4-2z^3+6z^2-8z+8=0 \quad z_0=1+i$,
c) $z^5-2z^4+10z^3+z^2-2z+10=0 \quad z_0=1+3i$