"Nie można oprzeć się wrażeniu, że formuły matematyczne mają niezależny od nas byt i inteligencję, że są mądrzejsze niż my sami, nawet mądrzejsze niż ich odkrywcy, i że możemy wywnioskować z nich więcej niż poprzednio w nich zawarto."
Heinrich Rudolph Hertz

Def. Macierzą o wymiarach n na m nazywamy odwzorowanie A: {1,2,...,n}×{1,2,...m}→a_{ij}∈ X.
Jeżeli X=ℝ ∨ X=ℂ, to macierz A nazywamy macierzą liczbową.

Metody zapisu macierzy:

1. tablicowy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
2. wierszowy $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$, gdzie $w_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}]$ jest i-tym wierszem macierzy A
3. kolumnowy $A = [k_1 \quad k_2 \quad \ldots \quad k_m]$, gdzie $k_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ jest j-tą kolumną macierzy A
4. skrócony $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$

Def. Jeżeli m=n, to macierz o wymiarach n na n nazywamy macierzą kwadratową stopnia n.

Oznaczenia: M(n,m) – zbiór wszystkich macierzy liczbowych o wymiarach n na m
M(n) – zbiór wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n

Def. Macierzą trójkątną górną nazywamy macierz A∈M(n) taką, że $\forall i > j$: $a_{ij} = 0$.

Macierzą trójkątną górną nazywamy macierz A∈M(n) taką, że $\forall i < j$: $a_{ij} = 0$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - macierz trójkątna górna $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - macierz trójkątna dolna

Macierzą diagonalną (przekątniową) nazywamy macierz A∈M(n) taką, że $\forall i \neq j$: $a_{ij} = 0$.

$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - macierz diagonalna

Diagonalą (przekątną) macierzy kwadratowej A nazywamy macierz $d = [a_{11} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{nn}]$.

Macierzą jednostkową stopnia n nazywamy macierz diagonalną stopnia n, która na diagonali ma same jedynki. Oznaczamy ją $\mathbb{1}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

Macierzą zerową wymiaru n na m nazywamy macierz tego wymiaru, której wszystkie elementy równe są 0. Oznaczamy ją $\mathbb{O}_{n\times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

Uwaga: W oznaczeniach macierzy jednostkowej i macierzy zerowej opuszczamy indeksy, jeżeli znane są wymiary tych macierzy.

Def. Mówimy, że macierze A i B są równe $\Leftrightarrow$ A,B $\in$ M(n,m) $\wedge$ $\forall i = 1, \dots, n \forall j = 1, \dots, m$: $a_{ij} = b_{ij}$

Def. Niech A,B$\in$M(n,m). Sumą macierzy A i B nazywamy macierz A+B$\in$M(n,m) taką, że

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Uwaga: Aby dodać do siebie dwie macierze muszą one mieć ten sam wymiar!

Definicja: Iloczynem macierzy A i liczby α nazywamy macierz $\alpha \cdot A \epsilon \mathrm{M(n,m)}$, taką że

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot [a_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Tw. własności sumy macierzy i iloczynu macierzy przez liczbę

Jeżeli $A, B, C \in M(n, m)$ i $\alpha, \beta \in X$ $(X = \mathbb{R} \vee \mathbb{C})$, to:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \mathbb{O} = A$
4. $A + (-1) \cdot A = \mathbb{O}$
5. $\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$
8. $1 \cdot A = A$

Dowód:

1. $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij}] + [a_{ij}] = B + A$
2. $A + (B + C) = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}] =$
$$= ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}] = (A + B) + C$$
3. $A + \mathbb{O} = [a_{ij}] + [0] = [a_{ij}] = A$

4. $A + (-1) \cdot A = [a_{ij}] + (-1) \cdot [a_{ij}] = [a_{ij}] + [(-1) \cdot a_{ij}] = [a_{ij} - a_{ij}] = [0] = \mathbb{O}$

5. $\alpha(A + B) = \alpha([a_{ij}] + [b_{ij}]) = \alpha \cdot [a_{ij} + b_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij} + \alpha \cdot b_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij}] + [\alpha \cdot b_{ij}] =$
$$= \alpha \cdot [a_{ij}] + \alpha \cdot [b_{ij}] = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

6. $(\alpha + \beta)A = (\alpha + \beta) \cdot [a_{ij}] = [(\alpha + \beta) \cdot a_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot a_{ij}] = [\alpha \cdot a_{ij}] + [\beta \cdot a_{ij}] =$
$$= \alpha \cdot [a_{ij}] + \beta \cdot [a_{ij}] = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = (\alpha \cdot \beta) \cdot [a_{ij}] = [(\alpha \cdot \beta) \cdot a_{ij}] = [\alpha \cdot (\beta \cdot a_{ij})] = \alpha \cdot [\beta \cdot a_{ij}] =$
$$= \alpha \cdot (\beta \cdot [a_{ij}]) = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$$

8. $1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$

Def. Jeżeli $A \in \mathrm{M}(\mathrm{n.m})$ to macierzą transponowaną do A nazywamy macierz $A^T \in \mathrm{M}(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ taką, że $[a_{ij}]^T = [a_{ji}]$.

Tw. własności transponowania
Jeżeli $A, B \in M(n, m)$ i $\alpha \in X$, to:
1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

Dowód:

1. $(A^T)^T = \left([a_{ij}]^T\right)^T = [a_{ji}]^T = [a_{ij}] = A$

2. $(A + B)^T = ([a_{ij}] + [b_{ij}])^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ij}]^T + [b_{ij}]^T =$
$$= A^T + B^T$$

3. $(\alpha \cdot A)^T = (\alpha \cdot [a_{ij}])^T = [\alpha \cdot a_{ij}]^T = [\alpha \cdot a_{ji}] = \alpha \cdot [a_{ji}] = \alpha \cdot [a_{ij}]^T = \alpha \cdot A^T$

Def. Niech $A \in M(n,m)$ i $B \in M(m,k)$. iloczynem macierzy A przez B nazywamy macierz $A \cdot B \in M(n,k)$ taką, że

$$A \cdot B = [a_{ij}] \cdot [b_{jl}] = \left[\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jl}\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ l=1,\dots,k}}$$

Uwaga: Aby wykonać mnożenie dwóch macierzy, ilość kolumn w macierzy pierwszej musi być taka sama jak ilość wierszy w macierzy drugiej.

Tw. własności iloczynu macierzy

Jeżeli $A, E \in M(n,m), B, D \in M(m,k), C \in M(k,p), \alpha \in X, to$

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$
3. $A \cdot (B + D) = A \cdot B + A \cdot D$
4. $(A + E) \cdot B = A \cdot B + E \cdot B$
5. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
6. $A \cdot I_m = A = I_n \cdot A$

Dowód:

1. niech $f_{il} = \sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot b_{jl}),\ g_{jp} = \sum_{l=1}^{k}(b_{jl} \cdot c_{lp})$

$$([a_{ij}] \cdot [b_{jl}]) \cdot [c_{lp}] = [f_{il}] \cdot [c_{lp}] = \left[\sum_{l=1}^{k}(f_{il} \cdot c_{lp})\right] = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k}(a_{ij} \cdot b_{jl}) \cdot c_{lp}\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} a_{ij} \cdot (b_{jl} \cdot c_{lp})\right] = \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot g_{jp})\right] = [a_{ij}] \cdot [g_{jp}] = [a_{ij}] \cdot ([b_{jl}] \cdot [c_{lp}])$$

2. $\left(\alpha \cdot [a_{ij}]\right) \cdot [b_{jl}] = \left[\sum_{j=1}^{m}((\alpha \cdot a_{ij}) \cdot b_{jl})\right] = \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot (\ \alpha \cdot b_{jl}))\right] = [a_{ij}] \cdot [\alpha \cdot b_{jl}] =$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha \cdot (a_{ij} \cdot b_{jl})\right] = \alpha \cdot \left([a_{ij}] \cdot [b_{jl}]\right)$$

3. $[a_{ij}] \cdot \left([b_{jl}] + [d_{jl}]\right) = [a_{ij}] \cdot [b_{jl} + d_{jl}] = \left[\sum_{j=1}^{m}[a_{ij}](b_{jl} + d_{jl})\right] = \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot b_{jl} + a_{ij}d_{jl})\right] =$

$$= \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot b_{jl}) + \sum_{j=1}^{m}(a_{ij}d_{jl})\right] = \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} \cdot b_{jl})\right] + \left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}d_{jl})\right] = [a_{ij} \cdot b_{jl}] + [a_{ij}d_{jl}]$$

4. analogicznie

5. $[(A \cdot B)^T]_{ij} = [(A \cdot B)]_{ji} = \left[\sum_{o=1}^{m} A_{jo} \cdot B_{oi}\right] = \left[\sum_{o=1}^{m} A^T{}_{oj} \cdot B^T{}_{io}\right] = \left[\sum_{o=1}^{m} B^T{}_{io} \cdot A^T{}_{oj}\right] = [B^T \cdot A^T]$

6. $A \cdot \mathbb{1}_m = [a_{ij}] \cdot [I_{jl}] = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{m}(a_{ij} \cdot 0) + a_{il} \cdot 1\right] = [a_{il}] = A$

$$\mathbb{1}_n \cdot A = [I_{ij}] \cdot [a_{jl}] = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(0 \cdot a_{ij}) + a_{il} \cdot 1\right] = [a_{il}] = A$$

Np. Oblicz:

1. $$\left(3\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\\ -3 & 5\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)^T \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 4\\ 6 & 5\\ -13 & 9\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 6 & -13\\ 4 & 5 & 9\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 6 & -13\\ 4 & 5 & 9\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1+18+26 & 2+24-13\\ -4+15-18 & 8+20+9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43 & 13\\ -7 & 37\end{bmatrix}$$

2. $A \cdot B \ i \ B \cdot A \ \ dla \ \ A = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix} \ B = \begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix}-14 & 9\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix}11 & 6\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

Wniosek: Mnożenie macierzy ogólnie nie jest przemienne.

3) Rozwiąż: $$\left(3\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix} \cdot X\right)^T + \begin{bmatrix}-2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & -4\\ 1 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix} = \mathbb{1}$$

$$X \in M(2) \Rightarrow X = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

$$X^T \cdot 3\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & 19\\ 7 & -19\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-4 & 19\\ 7 & -19\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}-2a+c & -a-3c\\ -2b+d & -b-3d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -19\\ -7 & 20\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6a+3c=5 \\ -3a-9c=-19 \\ -6b+3d=-7 \\ -3b-9d=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{4}{21} \\ b=\frac{1}{21} \\ c=\frac{43}{21} \\ d=-\frac{47}{21} \end{cases}$$

Uwaga: W tego typu zadaniach, gdy nie istnieje rozwiązanie układu to nie ma takiej macierzy. Gdyby układ miał nieskończenie wiele rozwiązań to istnieje nieskończenie wiele macierzy X.

Zadanie:

1. Niech $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Oblicz:

   a) $(3A-B)^T \cdot C$, b) $A \cdot B^T \cdot 2C$, c) $A^T \cdot C + 3B^T$

2. Wylicz macierz X z równania:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\left(X-2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $X+2X^T=2\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T$

3. Oblicz: a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^8$, c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^6$

Def. Permutacją zbioru {1,…,n} nazywamy każde odwzorowanie σ={1,…,n}→{1,…,n}, które jest wzajemnie jednoznaczne. Oznaczamy ją $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Przez P_n oznaczmy zbiór wszystkich permutacji zbioru {1,…,n}

Wniosek

Wszystkich permutacji zbioru {1,…,n} jest n!

Np. Oblicz złożenie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Def. Transpozycją w zbiorze {1,…,n} nazywamy permutację τ ∈ P_n taką, że

$$\exists i, j \in \{1, .., n\}, i \neq j: [\tau(i) = j \ \wedge \ \tau(j) = i \wedge \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}: \ \tau(k) = k \ ]$$

Def. Znakiem permutacji $\sigma \in P_n$ nazywamy liczbę

$$sgn\sigma = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ jest złożeniem parzystej liczby transpozycji} \\ -1, & \sigma \text{ jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji} \end{cases}$$

Np. Oblicz znak $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$sgn\sigma = -1$$

Def. Jeżeli A $\in$ M(n), to wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę

$$\mathrm{det}A = |A| = \sum_{\sigma \in P_n} sgn\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Np. Oblicz wyznaczniki

1. $det[a_{11}] = a_{11}$

1!=1 $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad sgn\sigma_1 = 1$

2. $det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

2!=2 $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad sgn\sigma_1 = 1, sgn\sigma_2 = -1$

3. $det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} -$

$-a_{13}a_{22}a_{31}$

3!=6 $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$sgn\sigma_1 = 1, sgn\sigma_2 = 1, sgn\sigma_3 = 1, sgn\sigma_4 = -1, sgn\sigma_5 = -1, sgn\sigma_6 = -1$

Wniosek:

$$|A| = \sum_{\sigma \in P_n} sgn\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Dowód:

odwzorowanie odwrotne do permutacji jest permutacją $\sigma(i) = j \;\Rightarrow\; i = \sigma^{-1}(j)$.

$$sgn\sigma^{-1} = sgn\sigma$$

Tw. reguła Sarrusa

Mówi jak inaczej wyliczyć wyznacznik macierzy 3 na 3

$$\begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Wyznacznik równy jest sumie iloczynów na wyznaczonych przekątnych wziętych z odpowiednimi znakami

$$\begin{matrix} + & + & + & - & - & - \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Wyznacznik równy jest sumie iloczynów na wyznaczonych przekątnych wziętych z odpowiednimi znakami

Dowód: wystarczy obliczyć wyznacznik zgodnie z regułą i porównać z poprzednim wynikiem

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Np. Oblicz $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 4 + 0 + 6 - (6 + 0 + 8) = -4$

Zadanie:

1. Oblicz wyznaczniki: a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

5. Oblicz i sprowadź do najprostszej postaci:

a) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & sinx & ctgx \\ sinx & 0 & sinx \\ ctgx & sinx & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} sinxcosy & sinxsiny & cosx \\ rcosxcosy & rcosxsiny & -rsinx \\ -rsinxsiny & rsinxcosy & 0 \end{vmatrix}$

Def: Niech A∈M(n). Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A, nazywamy liczbę A_{ij} równą wyznacznikowi macierzy, która powstaje z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny pomnożonemu przez $(-1)^{i+j}$.

Np. Oblicz dopełnienia algebraiczne elementów macierzy $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=(-8)$ $A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=10$ $A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=4$

$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=(-16)$ $A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}=17$ $A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5$

$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-2$ $A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=1$ $A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1$

Tw. Laplace'a

Jeżeli A∈M(n) , to $|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ - rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny (j=1,…,n) lub $|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ - rozwinięcie względem i-tego wiersza (i=1,…,n).

Dowód:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, (-1)^{i+j} \sum_{\sigma\in P_{n-1}} sgn\sigma \, a_{1\delta(1)} \dots a_{i-1\sigma(i-1)} a_{i+1\sigma(i+1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \cdots$$

$$\delta: \{1, \dots, i-1, i+1, \dots n\} \to \{1, \dots, j-1, j+1, \dots n\}$$

niech $\tilde{\sigma}:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$ taka, że $\tilde{\sigma}(k)=\begin{cases}\sigma(k) & ,k\neq i\\ j & ,k=i\end{cases}$

$$\tilde{\sigma}=\begin{pmatrix}1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n\\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i-1) & j & \sigma(i+1) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

aby obliczyć $sgn\tilde{\sigma}$ należy do permutacji $\sigma=\begin{pmatrix}1 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n\\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i-1) & \sigma(i+1) & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$

dołożyć na końcu $\binom{i}{j}$ i następnie „przesunąć" je na swoje miejsca dokonując (n-i) transpozycji dla wskaźnika i oraz n-j transpozycji dla wskaźnika j

$$sgn\tilde{\sigma}=sgn\sigma\cdot(-1)^{n-i}\cdot(-1)^{n-j}=sgn\sigma\cdot(-1)^{i+j}$$

$$\dots=\sum_{\tilde{\sigma}\in P_n} sgn\tilde{\sigma}\, a_{1\tilde{\sigma}(1)}\dots a_{i\tilde{\sigma}(i)}\dots a_{n\tilde{\sigma}(n)}=|A|$$

Np. Oblicz wyznacznik:

$$\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot 9-2\cdot 19=-56$$

Tw. własności wyznaczników

Jeżeli A=$[\mathrm{k}_1\ \dots\ \mathrm{k}_\mathrm{n}]$, to

1. $det\left[k_1\dots k_i\dots k_j\dots k_n\right]=-\det[k_1\dots k_j\dots k_i\dots k_n]$
2. $det\left[k_1\dots \alpha k_i\dots k_j\dots k_n\right]=\alpha\det[k_1\dots k_i\dots k_n],\ \ \alpha\in X$
3. $det\left[k_1\dots k_i+\overline{k}_i\dots k_n\right]=\det[k_1\dots k_i\dots k_n]+\det[k_1\dots \overline{k}_i\dots k_n]$

4. $det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] = 0$
5. $\det[k_1 \dots k_i \dots k_i \dots k_n] = 0$
6. $\det\left[k_1 \dots k_i + \alpha k_j \dots k_j \dots k_n\right] = \det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n]$
7. $\det \mathbb{1} = 1$
8. $detA^T = detA$

Dowód:

1. $det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} = \cdots$

niech $\tilde{\sigma} = \tau^\circ \sigma$, gdzie $\tau \epsilon P_n$ takie, że $\tau(i) = j, \tau(j) = i$ – transpozycja $\Rightarrow$ $\text{sgn}\tilde{\sigma} = -sgn\sigma$

$\dots = \sum_{\tilde{\sigma} \epsilon P_n} (-sgn\tilde{\sigma})\, a_{1\tilde{\sigma}(1)} \dots a_{j\tilde{\sigma}(j)} \dots a_{i\tilde{\sigma}(i)} \dots a_{n\widetilde{\sigma(n)}} = -\det[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n]$

2. $det\left[k_1 \dots \alpha k_i \dots k_j \dots k_n\right] = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots \alpha a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$
$= \alpha \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \alpha \det[k_1 \dots k_i \dots k_n]$

3. $det\left[k_1 \dots k_i + \overline{k}_i \dots k_n\right] = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots \left(a_{i\sigma(i)} + \bar{a}_{i\sigma(i)}\right) \dots a_{n\sigma(n)} =$
$= \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots \bar{a}_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} =$
$= \det[k_1 \dots k_i \dots k_n] + \det[k_1 \dots \overline{k}_i \dots k_n]$

4. $det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] = det[k_1 \dots \mathbb{O} + \mathbb{O} \dots k_n] = det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] + det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] =$
$= 2det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] \Rightarrow det[k_1 \dots \mathbb{O} \dots k_n] = 0$

5. $\det[k_1 \dots k_i \dots k_i \dots k_n] = -\det[k_1 \dots k_i \dots k_i \dots k_n] \Rightarrow \det[k_1 \dots k_i \dots k_i \dots k_n] = 0$

6. $\det\left[k_1 \dots k_i + \alpha k_j \dots k_j \dots k_n\right] = \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] + \det\left[k_1 \dots \alpha k_j \dots k_j \dots k_n\right] =$
$= \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] + \alpha\det\left[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n\right] = \det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n]$

7. $\det \mathbb{1} = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \dots a_{nn} = 1$ bo $a_{ij} = 0\ dla\ i \neq j$

8. $detA^T = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \det A$

Wniosek:
Takie same własności jak dla kolumn, prawdziwe są dla wierszy.

Np. Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_2-3k_1\\ k_3+2k_1\\ k_5-k_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -14 & 4 & 2 & -7 \\ 3 & -8 & 7 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 \\ -14 & 4 & 2 & -7 \\ -8 & 7 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} \overset{\substack{w_2+w_3\\ w_3+2w_1\\ w_4+2w_3}}{=} \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 \\ -22 & 11 & 0 & -11 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ -19 & 15 & 0 & -12 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\cdot 1\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -19 & 15 & -12 \end{vmatrix} \overset{\substack{k_1+2k_2\\ k_3+k_2}}{=} 11\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 3 \\ 11 & 15 & 3 \end{vmatrix} = 11\cdot 1\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = -11\cdot(36-33) = -33$$

Tw. Cauchy'ego
Jeżeli $A, B \in M(n)$, to $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Dowód:
przyjmijmy $C = A\cdot B \Rightarrow c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl}$

$$|A|\cdot|B| = \sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \cdot \sum_{\omega \epsilon P_n} sgn\omega\, b_{1\omega(1)} \dots b_{i\omega(i)} \dots b_{n\omega(n)} = \cdots$$

niech $\tilde{\sigma} = \omega^{\circ}\sigma \Rightarrow sgn\tilde{\sigma} = sgn\omega \cdot sgn\sigma$

$\dots = \sum_{\tilde{\sigma}\epsilon P_n} sgn\tilde{\sigma} \sum_{\sigma(1)=1}^{n} a_{1\sigma(1)} b_{\sigma(1)\omega(\sigma(1))} \dots \sum_{\sigma(i)=1}^{n} a_{i\sigma(i)} b_{\sigma(i)\omega(\sigma(i))} \dots$

$\dots \sum_{\sigma(n)=1}^{n} a_{n\sigma(n)} b_{\sigma(n)\omega(\sigma(n))} = \sum_{\tilde{\sigma}\epsilon P_n} sgn\tilde{\sigma}\, c_{1\tilde{\sigma}(1)} \dots c_{i\tilde{\sigma}(i)} \dots c_{n\tilde{\sigma}(n)} = |C| = |A\cdot B|$

Np. Oblicz wyznacznik

1. $det\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}^7 = \left(det\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}\right)^7$ = 10^7

2. detX jeżeli $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 7 & 36\\ 5 & 12 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \cdot detX \cdot det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix} = det\begin{bmatrix}-1 & 7 & 36\\ 5 & 12 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$6 \cdot detX \cdot 6 = -36 \cdot 12 \cdot 3 \Rightarrow detX = -36$

Wniosek:

Jeżeli A$\in$M(n) jest macierzą trójkątną, to $|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

Dowód: indukcja

I. n=1 O.K.

II. Z: jeżeli A$\in$M(n) jest macierzą trójkątną, to $|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$

T: jeżeli A$\in$M(n+1) jest macierzą trójkątną, to $|A| = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}a_{n+1n+1}$

D: załóżmy, że A$\in$M(n+1) jest macierzą trójkątną górną (dla trójkątnej dolnej analogicznie)

$$|A| = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1n+1}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} & a_{nn+1}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n+1n+1}\end{vmatrix} = a_{n+1n+1}(-1)^{2n+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix} =$$

$$= a_{n+1n+1}a_{nn} \ldots a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} k_1 \leftrightarrow k_2 = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_3 + w_1 \\ w_4 + 2w_1 \\ w_5 - 3w_1 \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -8 & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} w_3 - 3w_2 \\ w_4 - 4w_2 \\ w_5 + 5w_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & -18 & 4 & -7 \end{vmatrix} k_4 \leftrightarrow k_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -18 & -7 \end{vmatrix} w_4 \leftrightarrow w_3 = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -18 & -7 \end{vmatrix} w_5 + \frac{4}{3} w_3 =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{11}{3} \end{vmatrix} w_5 - \frac{1}{6} w_4 = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 15 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6} \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1) \cdot 1(-3) \cdot 12 \cdot \frac{17}{6} = -102$$

Zadanie:

1. Wylicz dopełnienia algebraiczne elementów macierzy:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}-3 & 0 & 2\\1 & -4 & -1\\5 & 2 & -3\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}2 & -4 & 0 & 1\\1 & 3 & -3 & -2\\2 & -1 & 2 & 0\\-3 & 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

2. Rozwiąż : a) $\begin{vmatrix}x & 2x-1 & 1\\2 & -1 & 1\\3 & 1 & 1\end{vmatrix} = 4$,b) $\begin{vmatrix}1 & sinx & sin^2x\\2 & \sqrt{2} & 1\\2 & \sqrt{3} & \frac{3}{2}\end{vmatrix} = 0$,c) $\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\-1 & 2 & 1\\4 & 2x & -1\end{vmatrix} = -21$

3. Rozwiąż nierówności:

a) $\begin{vmatrix}4sinx & 1\\1 & 2cosx\end{vmatrix} < 1$, b) $\begin{vmatrix}2 & x+2 & -1\\1 & 1 & -2\\5 & -3 & x\end{vmatrix} \geq 0$, c) $\begin{vmatrix}logx & 1 & 1\\2 & -1 & 3\\logx^2 & 1 & 1\end{vmatrix} \leq -5$

4. Oblicz wyznaczniki: a) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\3 & 0 & 5 & 4\\7 & 9 & 2 & 7\\3 & 1 & 13 & 19\end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 1 & 4\\2 & 1 & 5 & 1 & 2\\3 & 4 & 1 & -2 & 1\\2 & 1 & 1 & 5 & 2\\3 & -1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1\\3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2\\4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3\\5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4\\6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{vmatrix}$

5. Wylicz wyznacznik macierzy X z równania: a) $2 \cdot X \cdot X^T = \begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -3 & -2\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$,

b) $X \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\-2 & 1 & -2\\1 & 3 & 1\end{bmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\1 & -3 & 1\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$, c) $X^3 = \begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\3 & -1 & 2\end{bmatrix}$