„Kto lekceważy osiągnięcia matematyki przynosi szkodę całej nauce, ponieważ ten,
kto nie zna matematyki, nie może poznać innych nauk ścisłych i nie może poznać świata."
Roger Bacon

Def. Zdaniem logicznym nazywamy zdanie w trybie oznajmującym, któremu można, w sposób jednoznaczny, przyporządkować wartość logiczną : prawda (oznaczana 1) lub fałsz (oznaczana 0). Symbole zdań zapisujemy jako: p,q,r.

Np. p – „liczba 2 jest parzysta”; q – „liczba 7 jest mniejsza niż 1”.

Def. Formą zdaniową określoną w dziedzinie D nazywamy wyrażenie zawierające zmienną (lub zmienne), które staje się zdaniem, gdy w miejsce zmiennej (lub zmiennych) podstawimy nazwę (lub nazwy) dowolnego elementu (lub dowolnych elementów) zbioru D. Symbole form zdaniowych to: f(x), f(x, y).

Np. f(x) – „$x>5$” ; g(x,y) – „$x\cdot y=5$”.

Def. Zbiór elementów spełniających formę zdaniową (zbiór rozwiązań formy) jest to zbiór tych elementów dziedziny D, które po podstawieniu w miejsce zmiennych czynią z formy zdaniowej zdanie prawdziwe.

Funktory zdaniotwórcze:
$\wedge$ - koniunkcja - „i”
$\vee$ - alternatywa - „lub”
$\Rightarrow$ - implikacja – „wynika z”
$\Leftrightarrow$ -równoważność – „równoważne z”
~ - negacja – „nieprawda, że”

Tabele wartości logicznych:

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Sprawdzanie wartości logicznej zdania metodą 0-1: $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

Podstawowe prawa rachunku zdań:

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia

$p \vee \sim p$ prawo wyłączonego środka

$\sim(p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ prawo łączności alternatywy

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ prawo łączności koniunkcji

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ prawo przemienności alternatywy

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ prawo przemienności koniunkcji

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ prawo de Morgan'a

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ prawo de Morgan'a

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo kontrapozycji (transpozycji)

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$ prawo zaprzeczenia implikacji

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$ prawo eliminacji implikacji

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ prawo przechodniości implikacji

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ prawo sylogizmu warunkowego

$(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ prawo sylogizmu warunkowego

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p]$ prawo eliminacji równoważności

Zadanie: 1. Udowodnij prawa rachunku zdań: a) rozdzielności koniunkcji wzgl. alternatywy,
b) transpozycji, c) przechodniości implikacji

2. Czy prawdziwe jest zdanie:

a) Jeżeli liczba naturalna a jest liczbą pierwszą, to o ile a jest liczbą złożoną, to a równa się 4.

b) Jeżeli liczba a dzieli się przez 3 i dzieli się przez 5, to z faktu, iż a nie dzieli się przez 3, wynika, iż a nie dzieli się przez 5.

c) Jeżeli liczba a dzieli się przez 2 lub a dzieli się przez 7, to z faktu, iż a nie dzieli się przez 7, wynika, iż a dzieli się przez 3.

3. Skonstruuj tabelki 0-1 dla zdań: a) $p \vee [(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow \backsim p)]$, b) $p \wedge [q \vee (\backsim p \Rightarrow r)]$,
c) $p \Leftrightarrow [p \wedge \backsim (\backsim q \Leftrightarrow q)]$, d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Rightarrow (p \vee q)$

4. Napisz negacje zadań: a) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (\backsim r \Rightarrow \backsim p)]$, b) $p \Leftrightarrow [q \wedge (\backsim p \Rightarrow q)]$,
c) $[\backsim (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \Leftrightarrow (p \wedge \backsim q)$, d) $(p \vee q \vee r) \Rightarrow \{\backsim p \Rightarrow [(q \vee r) \wedge \backsim p]|$

Kwantyfikatory – operatory działające na formach zdaniowych, wiążące zmienne wolne
$\forall$x – „dla każdego x" ($\bigwedge_x$)
$\exists$x – „istnieje x" ($\bigvee_x$)

Np. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$; $\exists x \in \mathbb{R}: x+2=4$.

Podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów:

$\sim\forall x: \varphi \Leftrightarrow \exists x: \sim\varphi$ prawo de Morgan'a
$\sim\exists x: \varphi \Leftrightarrow \forall x: \sim\varphi$ prawo de Morgan'a
$\forall x: (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\forall x: \varphi \Rightarrow \forall x: \psi)$ prawo półrozdzielności dużego kwantyfikatora z implikacją
$\forall x: (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\forall x: \varphi) \wedge (\forall x: \psi)$ prawo rozdzielności dużego kwantyfikatora z koniunkcją
$\exists x: (\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\exists x: \varphi) \vee (\exists x: \psi)$ prawo rozdzielności małego kwantyfikatora z alternatywą
$\forall x: \varphi \vee \forall x: \psi \Rightarrow \forall x: (\varphi \vee \psi)$ prawo półrozdzielności dużego kwantyfikatora z alternatywą
$\exists x: \varphi \wedge \exists x: \psi \Leftarrow \exists x: (\varphi \wedge \psi)$ prawo półrozdzielności małego kwantyfikatora z koniunkcją

Zadanie: 1. Zaprzecz zdaniu logicznemu: a) $\exists x \forall y:(x+y>0 \Leftrightarrow y\geq 2)$, b) $\forall x:(x\leq 3 \Rightarrow \exists y: x+y^2=3)$,
c) $\exists x: [x \neq 1 \ \wedge \ \forall y: (y^3 = x \ \Rightarrow \ y > 1)]$

2. Znajdź zbiór rozwiązań formuły: a) $f(x): \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \geq 2$, b) $f(x): \ |x-1| + |2-4x| = 2 \ \Rightarrow$
$3x^2 - 8x - 3 \leq 0$, c) $f(x,y): \frac{3x-2y+1}{x+3y-2} \geq 1$, d) $f(x,y): x \cdot y < 1 \ \wedge x + y \geq 0$

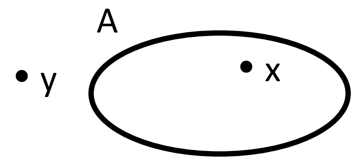
3. Określ wartość logiczną zdania: a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: (|x| = |y| \Rightarrow x = y)$,
b) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: (|x| = |y| \Rightarrow x = y)$, c) $\forall a \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}: (x^2 - 2a^2 = ax)$,
d) $\forall x \in \mathbb{R} \exists a \in \mathbb{R}: (x^2 - 2a^2 = ax)$, e) $\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}: (x^2 - 2a^2 = ax)$

4. Zapisz w języku symbolicznym zdanie:
a) Każda liczba rzeczywista jest równa samej sobie.
b) Kwadrat liczby wymiernej jest liczbą wymierną.
c) Dla każdej liczby naturalnej istnieje liczba naturalna od niej większa.
d) Jeżeli dwie liczby całkowite dzielą się wzajemnie jedna przez drugą, to różnią się co najwyżej znakiem.

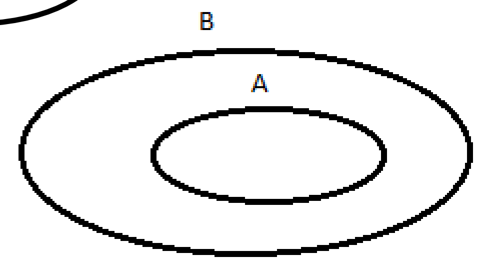
Zbiór jest pojęciem pierwotnym (nie ma definicji zbioru). Oznaczamy A,B,C,…
Zbiory są określane poprzez podanie własności elementów zbioru (np. własności wyrażonych poprzez formę zdaniową) $A=\{x: f(x)\}$ lub poprzez podanie wszystkich elementów $A=\{a,b,c,..\}$.

Relacje określane dla zbiorów:

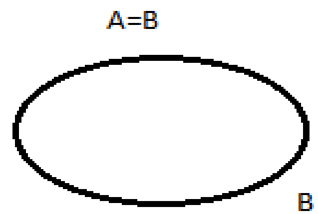
$x \in A$ – „x należy do zbioru A”



$\sim\ y \in A \Leftrightarrow y \notin A$ – „y nie należy do zbioru A”



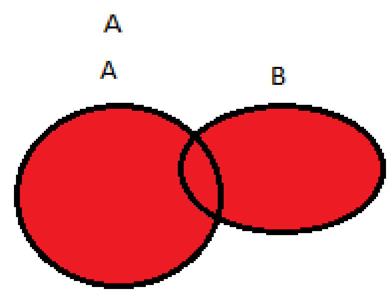
$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$ – „A zawiera się w B” lub „A jest podzbiorem B”



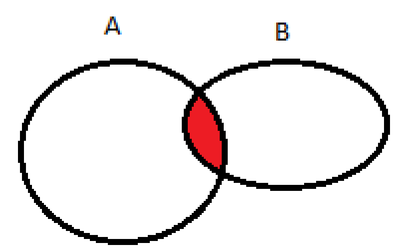
$A=B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B$ – „A jest równe B”

Działania na zbiorach:

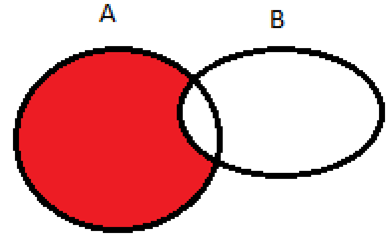
Suma zbiorów A i B : $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

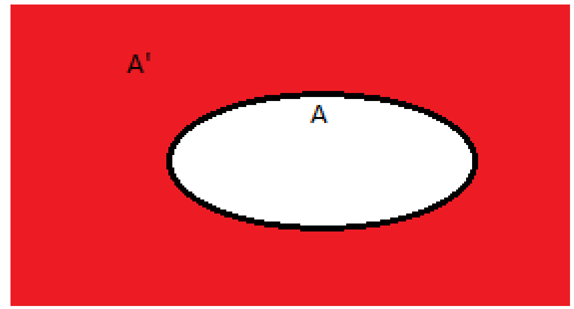


Iloczyn zbiorów A i B (przecięcie, część wspólna): $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$



Różnica zbiorów A i B: $A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$





Dopełnienie zbioru A: $A' = \{x: x \notin A\}$

Podstawowe prawa rachunku zbiorów:

$A \cup B = B \cup A$ prawo przemienności sumy

$A \cap B = B \cap A$ prawo przemienności iloczynu

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ prawo łączności sumy

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ prawo łączności iloczynu

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ prawo rozdzielności iloczynu wzgledem sumy

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ prawo rozdzielności sumy względem iloczynu

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ prawo de Morgana

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ prawo de Morgana

$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$

$A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$

Zadanie: 1. Wyznacz i narysuj zbiory A∪B, A∩B, A\B, B\A:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 4\}, B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\}$

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y - x \leq 0\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y < 3\}$

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \geq 3\}, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 3 - 2x\}$

2. Oblicz $A \cup B, (A \backslash B) \cap C, (A \cap B) \cup C, (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$:

a) $A = (1,5], B = [3,4], C = (-\infty, 2)$

b) $A = [-2, \infty), B = (-5,4] \cap \mathbb{Z}, C = \mathbb{R} \backslash [1, \infty)$

c) $A = \{x \in \mathbb{N}: x^2 - 3x - 4 \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{Z}: |x - 1| < 3\}, C = \{x \in \mathbb{R}: \frac{2-x}{x+6} \geq 1\}$

3. Sprawdź, czy:

a) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$

b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

c) $(A \cup B \cup C) \backslash (A \cup B) = C$

4. Wykaż, że

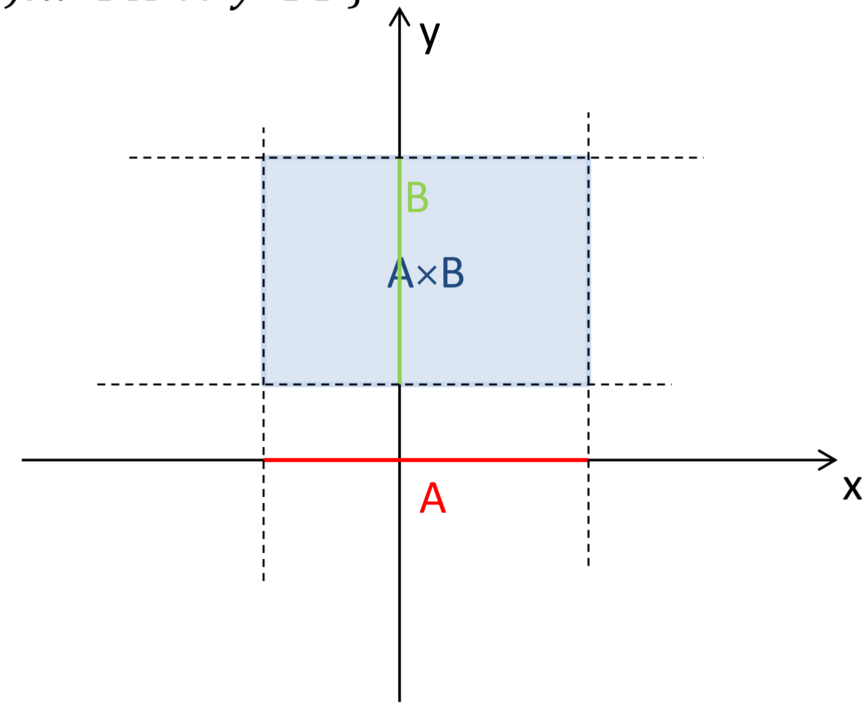
a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

c) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

d) $(A \backslash B) \cup C = [(A \cup C) \backslash B] \cup (B \cap C)$

Iloczyn kartezjański zbiorów A i B: $A \times B = \{(x, y): x \in A \ \wedge \ y \in B\}$

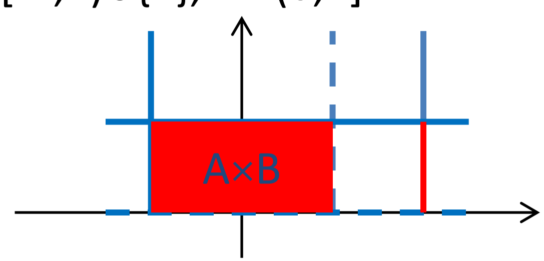


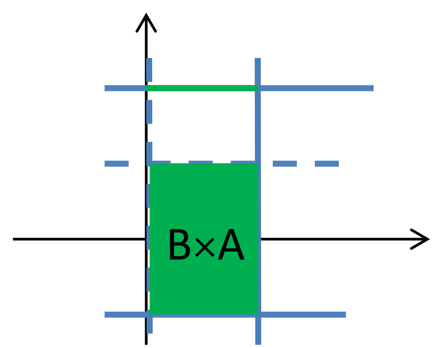
Podstawowe prawa dla iloczynu kartezjańskiego:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$
$$A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$
$$(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$$
$$A \subset B \ \wedge \ C \subset D \ \Rightarrow \ A \times C \subset B \times D$$

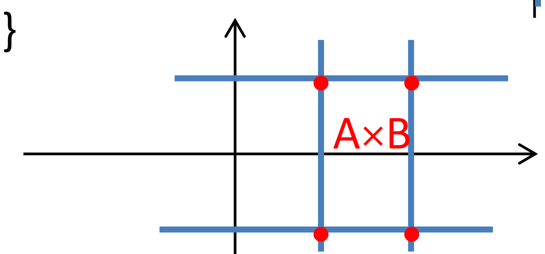
Np. Narysuj zbiory A×B i B×A

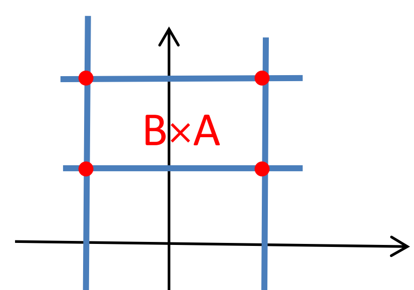
1. A=[-1,1)∪{2}, B=(0,1]





1. A={1,2}, B={-1,1}



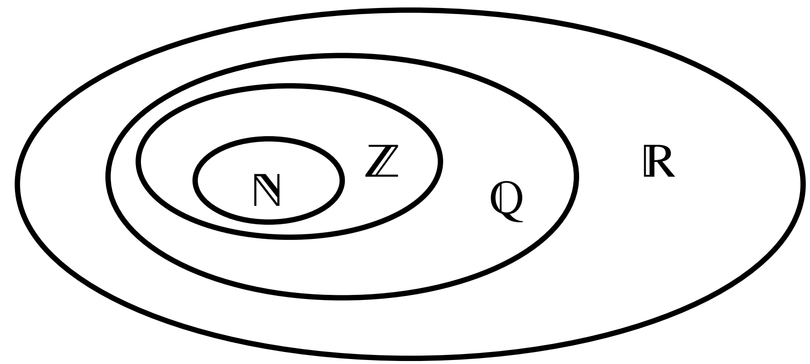


Zadanie: 1. Narysuj zbiory A×B i B×A: a) A=(-∞,2)∪[3,4), B=(-1,3]∪{5},
b) A=ℤ∩[-2,2), B=(-3,5]\[-1,4) , c) A={$n \in \mathbb{N}$: $n^2 - 3n - 4 \leq 0$ }, B={$x \in \mathbb{R}$: $\frac{2x+1}{2-x} \geq 0$}

2. Zbadaj, czy: a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, b) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,
c) $A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$

Zbiory liczbowe:

ℕ - zbiór liczb naturalnych
ℤ - zbiór liczb całkowitych
ℚ - zbiór liczb wymiernych
ℚ' - zbiór liczb niewymiernych
ℝ - zbiór liczb rzeczywistych



Działania w zbiorze liczb rzeczywistych:

dodawanie: x+y
x+y=y+x przemienność
x+(y+z)=(x+y)+z łączność
x+0=x element neutralny 0
istnieje liczba przeciwna do x oznaczana –x taka, że: x + (-x)=0
definiujemy odejmowanie: x+(-y)=x-y

mnożenie: x·y

x·y= y·x   przemienność

x·(y·z)=(x·y)·z   łączność

x·1=x,x≠0   element neutralny 1

istnieje liczba odwrotna do x≠0 oznaczana $\frac{1}{x}$ taka, że: x·$\frac{1}{x}$=1

definiujemy dzielenie dla y≠0: x:y =x·$\frac{1}{y}$

Potęgowanie:

dla a∈ℝ i n∈ℕ definiujemy $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \cdot a}_{\text{n razy}}; a^0 = 1, a \neq 0$

własności:

$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}, \qquad a \neq 0$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$

$(a^n)^m$ = $a^{n \cdot m}$

Wzory skróconego mnożenia:

kwadrat sumy $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

kwadrat różnicy $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

sześcian sumy $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

sześcian różnicy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

różnica kwadratów $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

suma sześcianów $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

różnica sześcianów $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Pierwiastkowanie:

dla a≥0 i n∈ℕ definiujemy $\sqrt[n]{a} = b \quad b^n = a$

dla a<0 i n – nieparzystego definiujemy $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

Uwaga: nie istnieją pierwiastki stopnia parzystego z liczb ujemnych

własności:

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$ oraz $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n - parzyste \\ a, & n - nieparzyste \end{cases}$

Zadanie: 1. Uprość wyrażenia: a) $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}$,

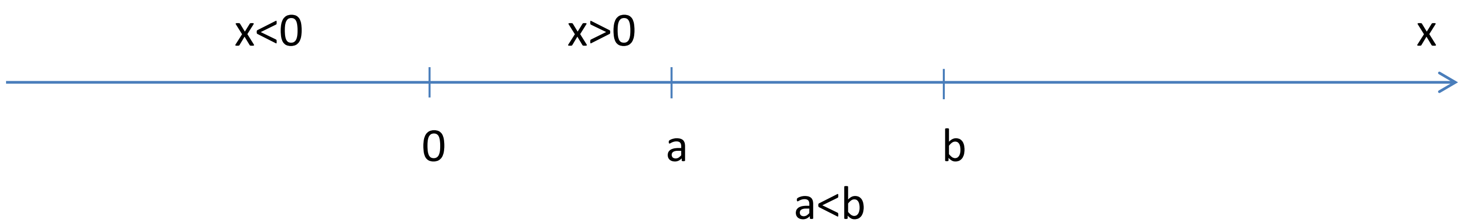
b) $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right)$, c) $\frac{b}{a-b}\sqrt[3]{(a^2-2ab+b^2)(a^2-b^2)(a+b)}\frac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

2. Oblicz wartość wyrażenia: a) $\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}}+\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}$, dla $x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, dla $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, a,b>0 , c) $\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1}}+\sqrt{\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}}$ dla $x=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, k>0

3. Usuń niewymierność z mianownika: a) $\frac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}}$, b) $\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}+1}}$, c) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

Graficzna interpretacja zbioru liczb rzeczywistych



Podstawowe równania:

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$

$\frac{x}{y} = 0 \Rightarrow x=0 \wedge y \neq 0$

Podstawowe nierówności:

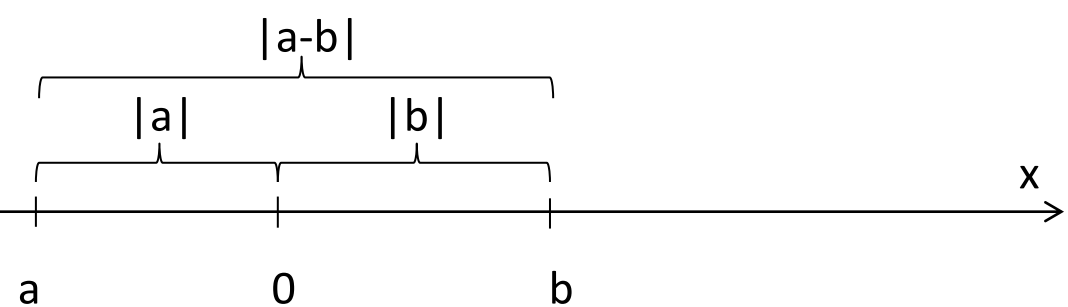
$x \cdot y > 0 \Leftrightarrow (x>0 \wedge y>0) \vee (x<0 \wedge y<0)$

$x \cdot y < 0 \Leftrightarrow (x>0 \wedge y<0) \vee (x<0 \wedge y>0)$

$\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \wedge y \neq 0$

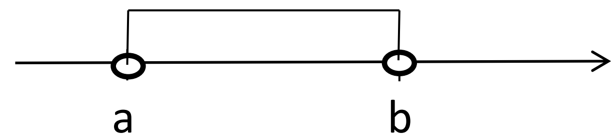
Moduł (wartość bezwzględna):

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

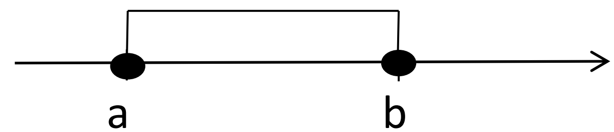


Przedziały:

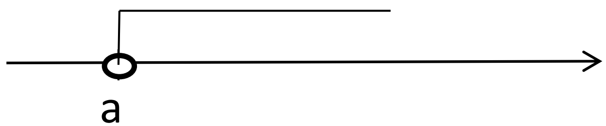
otwarty (a,b): $x \in (a,b) \Leftrightarrow a<x \wedge x<b$ w skrócie $a<x<b$

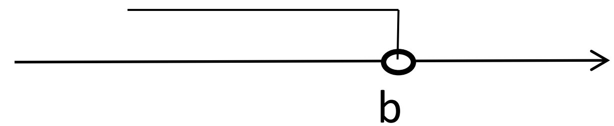


domknięty $\langle a,b \rangle$ (lub $[a,b]$) : $x \in \langle a,b \rangle \Leftrightarrow a \le x \wedge x \le b$ w skrócie $a \le x \le b$



nieograniczony $(a,+\infty)$ lub $(-\infty,b)$: $x \in (a,+\infty) \Leftrightarrow a<x$ lub $x \in (-\infty,b) \Leftrightarrow x<b$





Zadanie:

1. Rozwiąż:

a) $2|x+6|+|x-6| - |x| = 18$

b) $||x+1|-2| = x - 1$

c) $|x^2 - 1| + |x^2 - x| = x$

d) $|x + 2| - |x - 1| \le x - \frac{3}{2}$

e) $|x - 6| > |x^2 - 5x - 9|$

f) $|x - 2| - |x - 1| \ge |x + 1| - 5$

2. Rozwiąż:

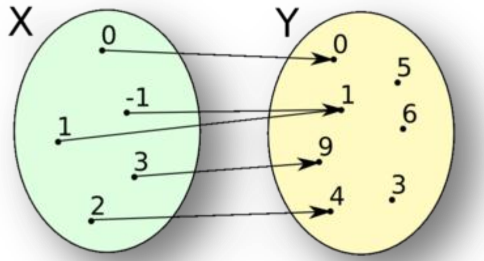
a) $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$

b) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{4x + 13} = \sqrt{3x + 12}$

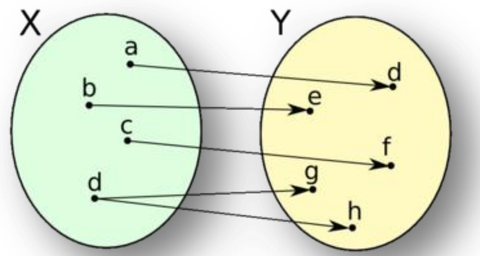
c) $\sqrt{x - 6} - \sqrt{10 - x} \ge 1$

d) $\sqrt{3x^2 + 5x + 7} - \sqrt{3x^2 + 5x + 2} > 1$

Def. Funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie f:X→Y, które każdemu elementowi zbioru X przyporządkowuje dokładnie jeden element zbioru Y.
Oznaczamy y=f(x), gdzie y to wartość funkcji a x to argument funkcji.
X nazywamy dziedziną funkcji f: D_f
Y nazywamy zapasem funkcji f



funkcja

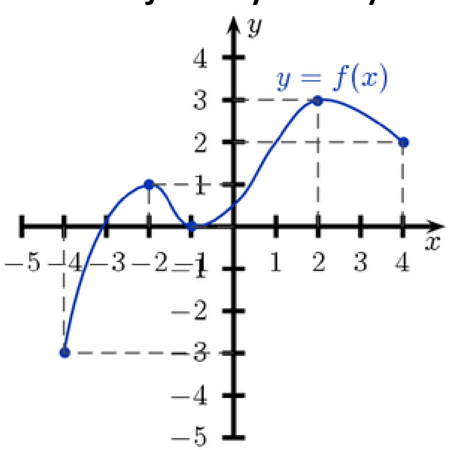


nie funkcja

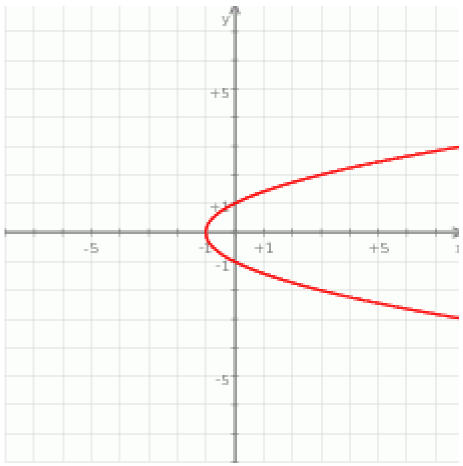
Np.

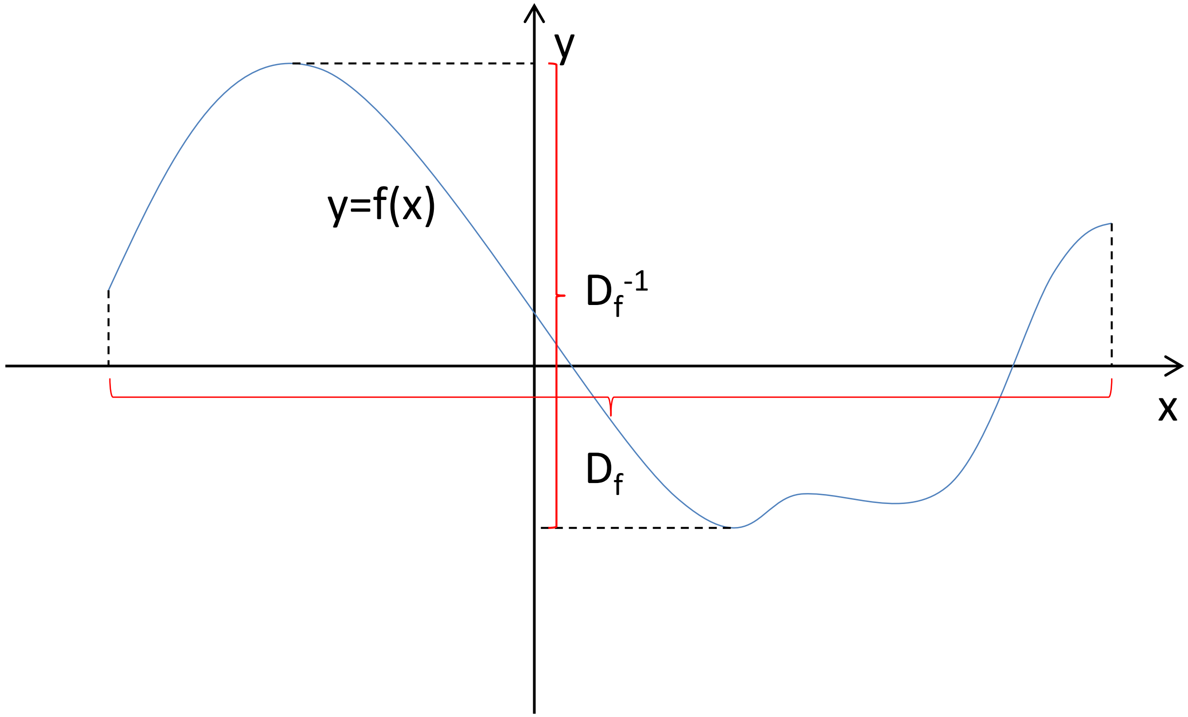
y=$f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad D_f\colon \begin{cases} x \neq 1 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$

Przeciwdziedziną, zbiorem wartości f nazywamy zbiór D_f^{-1}={y∈Y: ∃x∈X: y=f(x)}
Wykresem funkcji nazywamy zbiór $W_f = \{(x, y)\colon\ y = f(x)\}$



wykres funkcji


krzywa nie jest wykresem funkcji



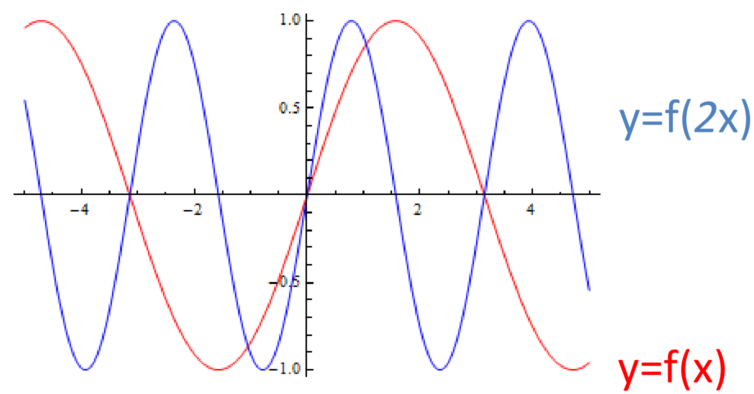
Wzór funkcji y=f(x) mówi jak policzyć wartość y jeżeli znamy argument x.

Wykres funkcji jest graficzną reprezentacją funkcji w układzie współrzędnych Oxy.
Z wykresu funkcji można odczytać dziedzinę, zbiór wartości oraz własności funkcji.

Przekształcenia wykresów:

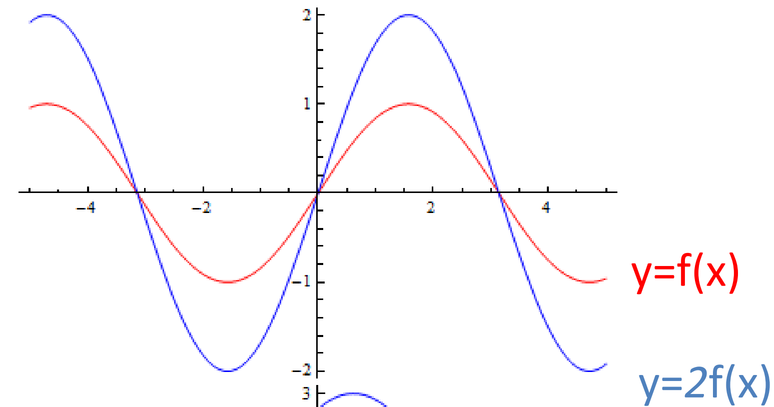
1. $y=f(x) \xrightarrow[P_{\perp OY}^{\frac{1}{a}}]{} y=f(ax)$

powinowactwo prostokątne względem osi OY o skali $\frac{1}{a}$



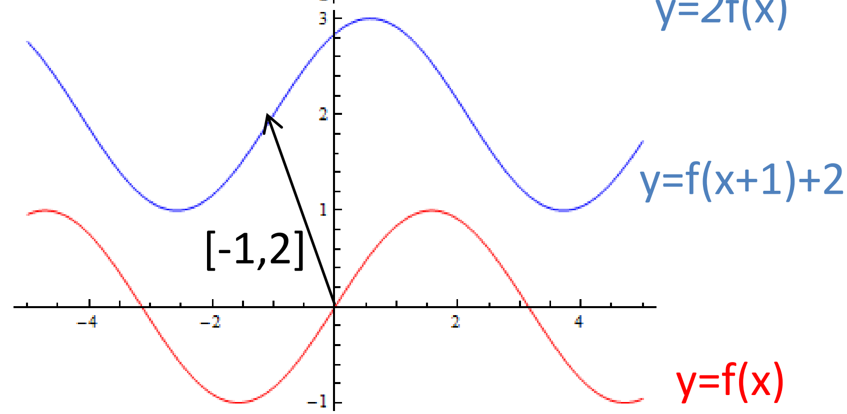
2. $y=f(x) \xrightarrow[P_{\perp OX}^{a}]{} y=af(x)$

powinowactwo prostokątne względem osi OX o skali a



3. $y=f(x) \xrightarrow[T_{[a,b]}]{} y=f(x-a)+b$

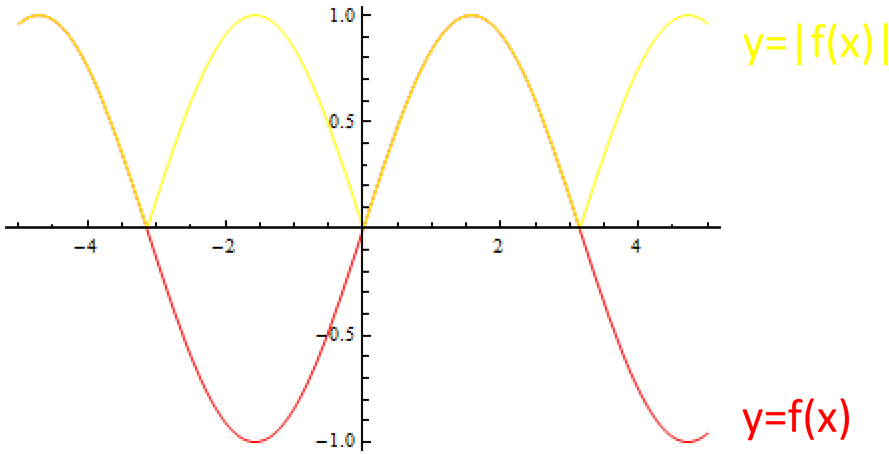
translacja o wektor [*a*,*b*]



4. y=f(x) $\longrightarrow$ y=|f(x)|

S_{OX} {y<0}

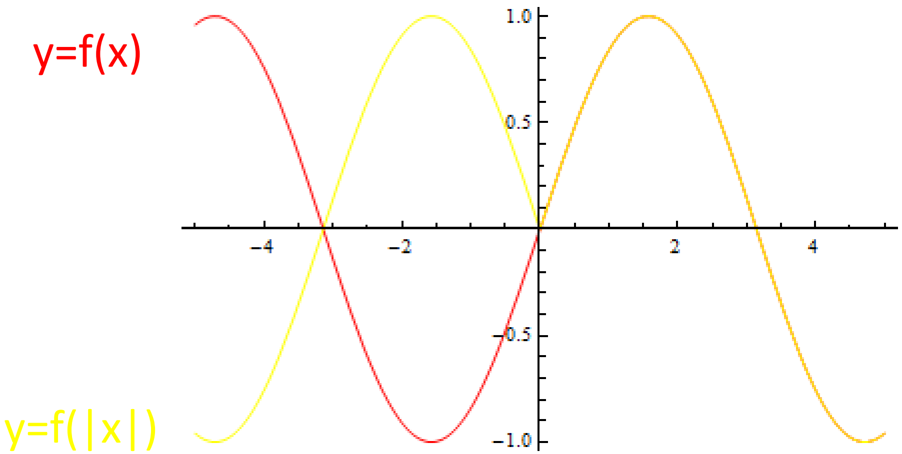
symetria osiowa względem osi OX części wykresu dla y<0



5. y=f(x) $\longrightarrow$ y=f(|x|)

S_{OY} {x≥0}

symetria osiowa względem osi OY części wykresu dla x≥0



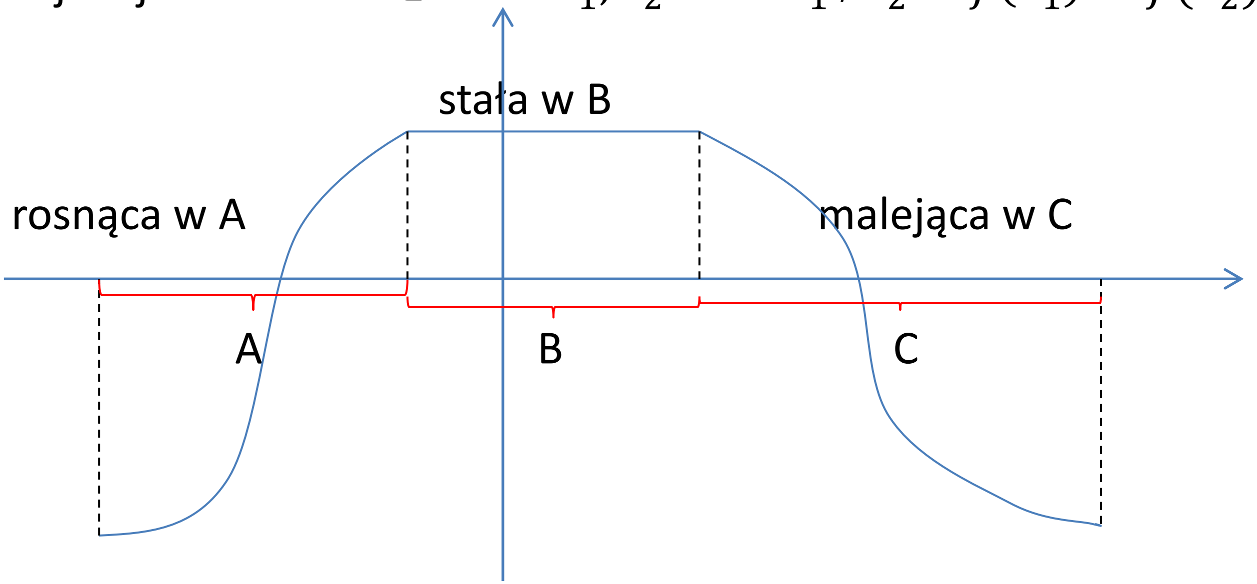
Zadanie: Opisz przekształcenia prowadzące od wykresu: a) $f(x) = \sqrt{x}$ do $f(x) = \sqrt{1 - |3x + 2|}$
b) $f(x) = x$ do $f(x) = 3 + |4 - |2x + 1||$, c) $f(x) = x^2$ do $f(x) = |x^2 - 2x| - 2$

Własności funkcji f:X⟶Y

Def. Mówimy, że funkcja f jest rosnąca w A⊂X ⟺ $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Def. Mówimy, że funkcja f jest malejąca w A⊂X ⟺ $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Def. Mówimy, że funkcja f jest stała w A⊂X ⟺ $\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$



Badanie monotoniczności

1. f(x)= 3x+2 , $D_f = \mathbb{R}$

weźmy $x_1 < x_2$

$f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 + 2 - 3x_1 - 2 = 3(x_2 - x_1) > 0$

Odp. Funkcja jest rosnąca w całej dziedzinie

2. $f(x)=\frac{x}{x+1}$ $\quad D_f=R\setminus\{-1\}$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2+1}-\frac{x_1}{x_1+1}=\frac{x_2(x_1+1)-x_1(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$dla \quad x_1<x_2\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)>0\Rightarrow$

$(x_1+1)(x_2+1)>0$

$$\begin{cases}x_2+1>0\\x_1+1>0\end{cases}\vee\begin{cases}x_2+1<0\\x_1+1<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2>-1\\x_1>-1\end{cases}\vee\begin{cases}x_2<-1\\x_1<-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x_1,x_2\in(-1;+\infty)\vee(-\infty;-1)$

Odp. Badana funkcja jest rosnąca dla $x_1, x_2\in(-\infty,-1)$ i dla $x_1, x_2\in(-1,\infty)$

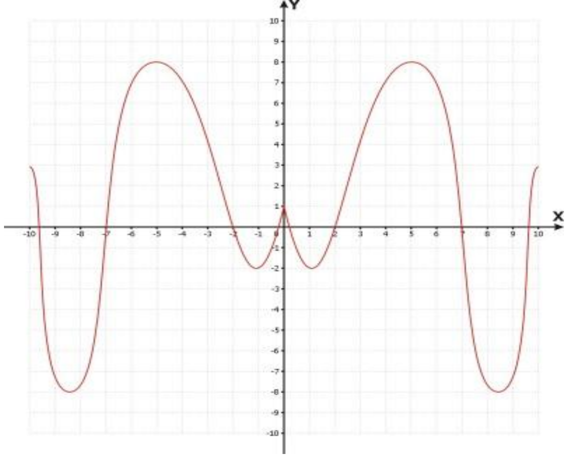
Zadanie: Zbadaj monotoniczność funkcji:

a) $f(x)=\sqrt{2x^2+x-1}\,, dla\ x\in(-\infty,-1)$

b) $f(x)=\frac{1-3x}{2x+4}$, dla $x\in$(-2, ∞),

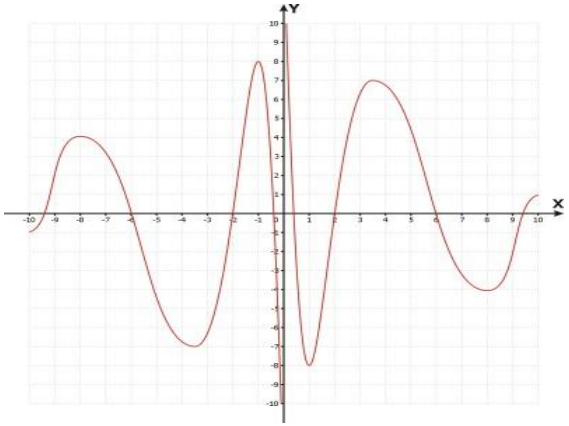
c) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ dla $x\in\mathbb{R}$

Def. Mówimy, że funkcja f jest parzysta w $A \subset X \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in A: -x \in A \wedge f(-x)=f(x)$



Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY

Def. Mówimy, że funkcja f jest nieparzysta w $A \subset X \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in A: -x \in A \wedge f(-x)=-f(x)$



Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu (0,0)

Badanie parzystości

1. $f(x)=\frac{IxI+x^4}{\sqrt[3]{x-x^3}}$ $\quad D_f$: $\sqrt[3]{x-x^3} \neq 0$

$x-x^3 \neq 0$

$x(1-x^2) \neq 0$

$x \neq 0 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$

$D_f = R\backslash\{-1,0,1\}$

$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$f(-x)=\frac{|-x|+(-x)^4}{\sqrt[3]{(-x)-(-x)^3}} = \frac{|x|+x^4}{\sqrt[3]{-x+x^3}} = \frac{|x|+x^4}{-\sqrt[3]{x-x^3}}$

funkcja nieparzysta

2. $f(x)=\frac{\sqrt{2-|3x|}}{\sqrt{x^2}(x^2-4)}$ D_f: 2-|3x| ≥ 0

$x \leq \frac{2}{3} \wedge x \geq -\frac{2}{3}$ $D_f = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \setminus \{0\}$

$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

$f(-x)=\frac{\sqrt{2-|3(-x)|}}{\sqrt{(-x)^2}((-x)^2-4)} = \frac{\sqrt{2-|3x|}}{\sqrt{x^2}\,(x^2-4)}$ funkcja parzysta

3. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 3|x| - 1}$ D_f: $4x^2 - 3|x| - 1 \geq 0$, $t=|x|$

$4t^2 - 3t - 1 \geq 0$

$\Delta=25 \Rightarrow t \in (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [1, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)=D_f$

$x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

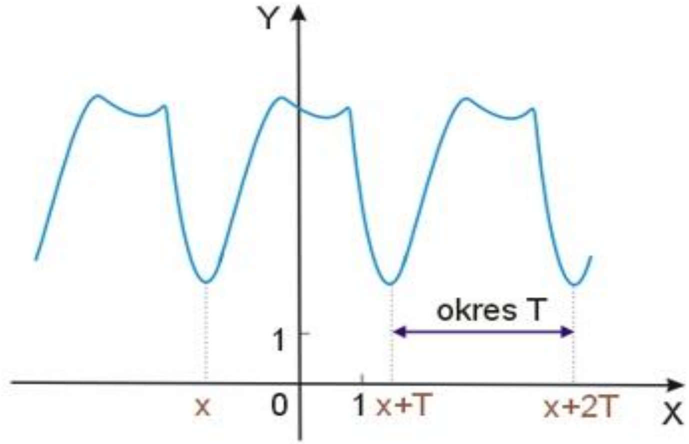
$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2 - 3|-x| - 1} = \sqrt{4x^2 - 3|x| - 1} = f(x)$ funkcja parzysta

Zadanie: Zbadaj parzystość funkcji:

a) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$,

b) $f(x) = \big||x-2| - 1\big| + \big||x+2| - 1\big|$

Def. Mówimy, że funkcja f jest okresowa w $A\subset X$ (o okresie $T>0$) $\Leftrightarrow \forall x\in A: x\pm T\in A \wedge f(x\pm T)=f(x)$



Badanie okresowości

$f(x)=\sin 3x+2\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})$

$\sin 3x=\sin(3x+2\pi) \Rightarrow \sin 3x=\sin 3(x+\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow$ okresem funkcji $\sin 3x$ jest $T_1=\frac{2\pi}{3}$

$\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi) \Rightarrow \cos(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x+6\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ okresem funkcji $\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ jest $T_2=6\pi$

muszą istnieć liczby naturalne k,l takie, że $T=k\cdot T_1$ oraz $T=l\cdot T_2$

Odp. Okresem funkcji f jest $T=6\pi$

Zadanie: Zbadaj okresowość funkcji:

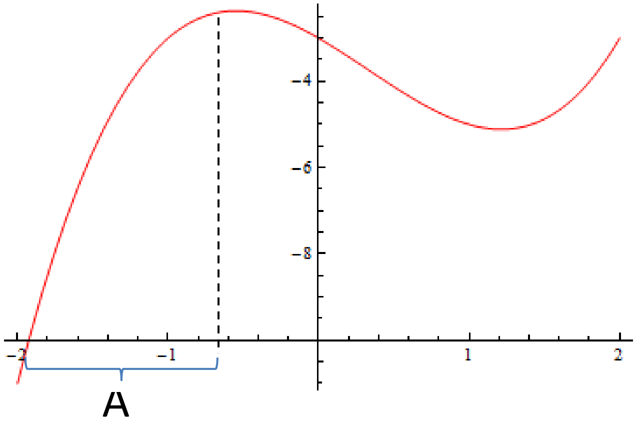
a) $f(x)=\frac{sin\frac{5}{7}x}{tg\frac{4}{3}x}$,

b) $f(x)=2cos4x-ctg(3x-\frac{\pi}{2})$,

c) $f(x)=sin^2\frac{5}{6}x-|cos\frac{7}{2}x|$

Def. Mówimy, że funkcja jest różnowartościowa (iniektywna) w $A \subset X \Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$$
$$\forall x_1, x_2 \in A\colon\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



f jest różnowartościowa w A

Badanie różnowartościowości:

1. $f(x) = \sqrt{x^3 + x + 2}$ w $A = [0, \infty)$, $D_f = [-1, \infty) \Rightarrow A \subset D_f$

$f(x_1)=f(x_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1)^3 + x_1 + 2 = (x_2)^3 + x_2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1)^3 - (x_2)^3 + x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow$

$(x_1 - x_2)[(x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2 + 1] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 = x_2) \vee [(x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2 + 1] = 0$

ponieważ $(x_1)^2 + x_1 x_2 + (x_2)^2 + 1 > 0$ dla $x_1 > 0\ i\ \ x_2 > 0$, więc $x_1 = x_2$

Odp. Badana funkcja jest różnowartościowa w $[0,\infty)$

2. $f(x)=\frac{3-x}{x+2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x_1) = f(x_2) \iff \frac{3-x_1}{x_1+2} = \frac{3-x_2}{x_2+2} \iff (3-x_1)(x_2+2) = (x_1+2)(3-x_2) \iff$

$3x_2+6-x_1x_2-2x_1 = 3x_1-x_1x_2+6-2x_2 \iff 5x_2 = 5x_1 \ / : 5 \iff x_1 = x_2$

Odp. Funkcja jest różnowartościowa w D_f

3. $f(x)= 2x^2- x+1$ $D_f = \mathbb{R}$

$f(x_1)=f(x_2) \iff 2(x_1)^2 - (x_1)+1= 2(x_2)^2 -(x_2)+1 \iff 2(x_1)^2 - 2(x_2)^2 - x_1 + x_2 = 0 \iff$

$2(x_1^2-x_2^2) - (x_1-x_2) =0 \iff 2(x_1-x_2)(x_1+x_2) - (x_1- x_2) =0 \iff (x_1-x_2)[2(x_1+x_2)-1] = 0 \iff$

$x_1-x_2 = 0 \vee 2(x_1 + x_2) =1 \iff x_1=x_2 \vee x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$

Odp. Funkcja nie jest różnowartościowa w $\mathbb{R}$ ale jest różnowartościowa w $(-\infty,\frac{1}{4})$ oraz $(\frac{1}{4},\infty)$

Zadanie: Zbadaj różnowartościowość funkcji:

a) $f(x) = -2x^3 + 3$,

b) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$,

c) $f(x) = \sqrt{3-6x}$