"W każdej wiedzy jest tyle prawdy, ile jest w niej matematyki."
Immanuel Kant

Def. Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$, to kresem górnym zbioru A nazywamy liczbę supA taką, że
1. $\forall x \in A$: supA $\geq$ x ,
2. $\forall y$: (y < supA $\Rightarrow$ $\exists x \in A$: y < x $\leq$ supA)

Def. Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$, to kresem dolnym zbioru A nazywamy liczbę infA taką, że
1. $\forall x \in A$: infA $\leq$ x ,
2. $\forall y$: (y > infA $\Rightarrow$ $\exists x \in A$: y > x $\geq$ infA)

Np. sup(a,b]=b; inf(a,b]=a
sup$(-\infty,0] \cup \{1\}$=1; inf$(-\infty,0] \cup \{1\}$ nie istnieje
sup$\{1/n: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$=1; inf$\{1/n: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$=0

Def. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od góry $\Leftrightarrow$ istnieje supA $\in \mathbb{R}$.
Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony od dołu $\Leftrightarrow$ istnieje infA $\in \mathbb{R}$.
Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony $\Leftrightarrow$ A jest ograniczony od góry i od dołu.

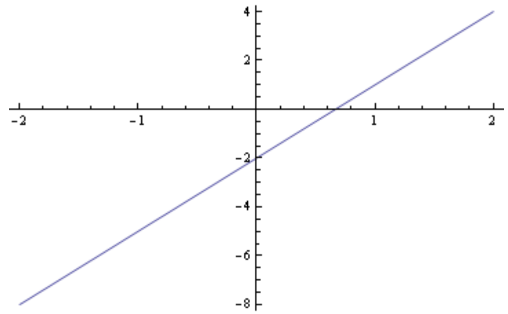
Np. Zbiory $(-1,4] \cup [5,6)$, $\{1,2,5,8\}$ są ograniczone
Zbiory $(-\infty,3)$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ sa ograniczone od góry
Zbiory $[-3,\infty)$, $\mathbb{N}$ są ograniczone od dołu

Zadanie: Znajdź kresy (o ile istnieją) zbiorów:
a) $\{\frac{2n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, b) $\{\frac{1+(-1)^n}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$, c) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{121-4x^2} \cdot (x^2 - 11|x| + 30) < 0\}$

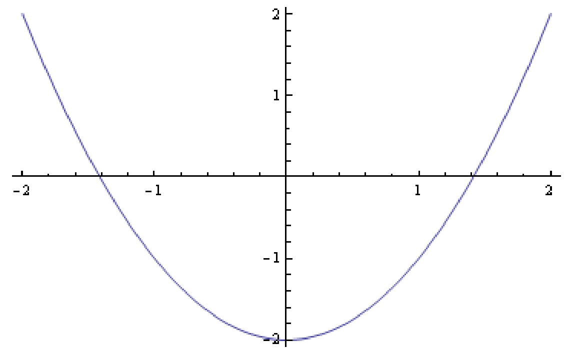
Def. Mówimy, że funkcja f:X→ $\mathbb{R}$ jest ograniczona od dołu (od góry) ⇔ zbiór wartości f jest ograniczony od dołu (od góry).

Mówimy, że funkcja f:X→ $\mathbb{R}$ jest ograniczona ⇔ zbiór wartości f jest ograniczony.

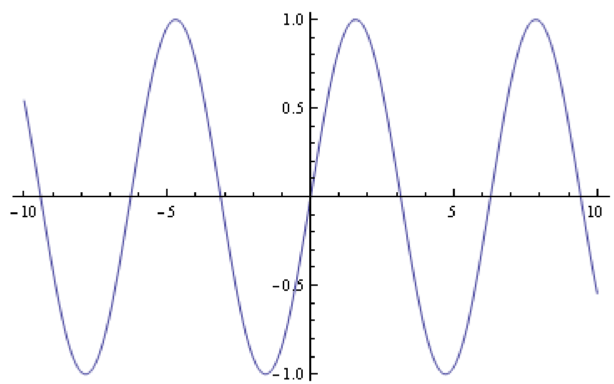
Np. f(x)=3x-2 jest nieograniczona



f(x)= x^2-2 jest ograniczona od dołu



f(x)=sinx jest ograniczona



Zadanie: Zbadaj ograniczoność funkcji:

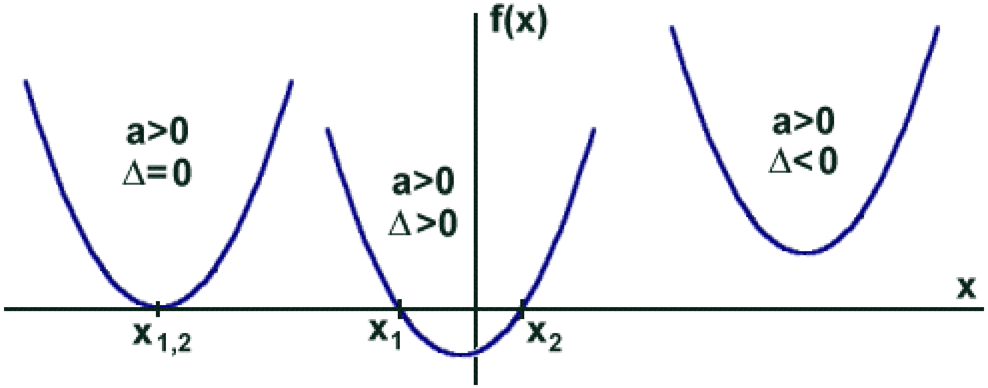
a) $f(x)=\frac{1-3|x|}{2+|x|}$, b) $f(x)=\sqrt{4-3x-x^2}$, c) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^4-4}$

FUNKCJE ELEMENTARNE

I. Wielomiany

Def. Funkcję postaci $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0$, gdzie $a_n\neq 0$ nazywamy funkcją wielomianową (wielomianem) stopnia n zmiennej x.
Stopień wielomianu oznaczamy degf.

Np. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a\neq 0$
Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola.



$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q$ - postać kanoniczna funkcji kwadratowej

p, q są współrzędnymi wierzchołka paraboli $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta \geq 0$ $f(x)= a(x-x_1)(x-x_2)$ - postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ są pierwiastkami funkcji kwadratowej

Wzory Viete'a: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Tw. o dzieleniu wielomianów

Jeżeli wielomian W ma stopień nie mniejszy od stopnia wielomianu P, to istnieją wielomiany Q oraz R takie, że $W(x)=P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, przy czym $\deg R < \deg P$.

Np.

Wielomian $W(x)= 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - x + 6$ podziel przez $P(x)= x^2 - 3x + 2$

$$
\begin{array}{l}
\underline{\quad 3x^3+ 9x^2 + 19x + 43} \\
\quad 3x^5 - 2x^3 + 4x^2 - x + 6 : x^2 - 3x + 2 \\
- \ \underline{3x^5 - 9x^4 + 6x^3} \\
\quad = \quad 9x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x + 6 \\
\quad - \quad \underline{9x^4 - 27x^3 + 18x^2} \\
\qquad = \quad 19x^3 - 14x^2 - x + 6 \\
\qquad - \quad \underline{19x^3 - 57x^2 + 38x} \\
\qquad\quad = \quad 43x^2 - 39x + 6 \\
\qquad\quad - \quad \underline{43x^2 - 129x + 86} \\
\qquad\qquad = \quad 90x - 80
\end{array}
$$

$W(x) = (3x^3 +9x^2 +19x +43) (x^2 -3x +2) + 90x - 80$

Wielomian $W(x)= 3x^5 - 2x^3 + x + 4$ podziel przez $P(x)= x^3 - 2x^2 + x + 1$

$$
\begin{array}{l}
\underline{3x^2 + 6x + 7} \\
3x^5 - 2x^3 + x + 4 \quad : \quad (x^3 - 2x^2 + x + 1) \\
\underline{-3x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 3x^2} \\
\quad = \quad 6x^4 - 5x^3 - 3x^2 + x+4 \\
\qquad \underline{-6x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 6x} \\
\qquad = \quad 7x^3 - 9x^2 - 5x + 4 \\
\qquad\quad \underline{-7x^3 + 14x^2 - 7x - 7} \\
\qquad\quad = \quad 5x^2 - 12x - 3
\end{array}
$$

$W(x) = (x^3 - 2x^2 + x + 1) (3x^2 + 6x + 7) + 5x^2 - 12x - 3$

Def. Mówimy, że wielomiany W(x) i U(x) są równe $\Leftrightarrow$ degW=degU oraz współczynniki przy takich samych potęgach x są równe.

Def. Mówimy, że x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W(x) $\Leftrightarrow$ $W(x_0)=0$

Tw. Bezouta
x_o jest pierwiastkiem wielomianu W(x) $\Leftrightarrow$ W(x) jest podzielny przez $(x-x_o)$ bez reszty

Np.
$x^5 - 4x^3 + x^2 - 4 : x + 1 = x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x - 4$

Schemat Hornera: pozwala schematycznie wykonać dzielenie wielomianu W(x) przez $(x-x_0)$

x_o	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	reszta
	1	0	-4	1	0	-4	
-1	0	1	-1	-3	4	-4	0

Tw. o pierwiastkach wymiernych
Jeżeli współczynniki wielomianu są liczbami całkowitymi to x_0 jest pierwiastkiem wymiernym wielomianu W(x) <=> $x_0 \in$ {p/q : p jest podzielnikiem wyrazu wolnego - a_0 i q jest podzielnikiem wyrazu przy najwyższej potędze - a_n}

Np.
1. Pierwiastki wymierne wielomianu $W(x)=9x^4 -30 x^3 +37x^2 - 20x + 4$ należą do zbioru $\{\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 1/3,\pm 2/3,\pm 4/3,\pm 1/9,\pm 2/9,\pm 4/9\}$

2. Pierwiastki wymierne wielomianu $W(x) = x^3 - x - 6$ należą do zbioru $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Zadanie:

1. Wykonaj dzielenie wielomianów:

a) $-4x^5 + 5x^2 + 8 : 2x^2 + x$, b) $3x^4 + x^3 + 2x : x^3 - 2x^2 + 1$,

c) $5x^6 - 4x^2 + x - 1 : 3x^3 - 2x - 4$

2. Dla jakich wartości k, m:

a) wielomian $x^3 - (2k+1)x^2 + 3{,}5x + k^2 - 4$ dzieli się przez x-2

b) reszta z dzielenia $x^4 - (k^2-1)x^3 + (k+1)^2 x^2 - 3(m+1)x - 5 : x^2$-1 wynosi 2x+1

Def. Mówimy, że x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W(x) $\Leftrightarrow$

W(x) dzieli się przez $(x-x_0)^k$ i nie dzieli się przez $(x-x_0)^{k+1}$

Tw. o rozkładzie wielomianu na czynniki

Każdy wielomian W(x) daje się przedstawić w postaci iloczynu czynników typu $(x-x_0)^k$, gdzie x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W(x) oraz typu $(ax^2+bx+c)^m$, gdzie $\Delta=b^2-4ac<0$.

Np. Napisz postać iloczynową dla wielomianu

1. $W(x) = x^4 - 9$

$W(x)=(x^2)^2 - 3^2$

$W(x)= (x^2 - 3)(x^2 + 3)$

$W(x)= (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$

2. $W(x) = x^9 - x$

$W(x) = x(x^8 - 1)$

$W(x) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1)$

$W(x) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) (x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2)$

$W(x) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) [(x^2 + 1)^2 -(\sqrt{2}\, x)^2]$

$W(x) = x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

3. $W(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 - 4$
$W(x) = x^3(x^2-4) + (x^2-4)$
$W(x) = (x-2)(x+2)(x^3+1)$
$W(x) = (x-2)(x+2)(x+1)(x^2-x+1)$

Rozwiąż
1. $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$

	1	4	4	-1	-2	
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~5~~	~~9~~	~~8~~	~~6~~
~~-1~~	~~0~~	~~1~~	~~3~~	~~1~~	~~-2~~	~~0~~
-1		0	1	2	-1	-1
~~2~~		~~0~~	~~1~~	~~5~~	~~11~~	~~20~~
-2		0	1	1	-1	0

$(x+1)(x^3+3x^2+x-2) = 0$

$(x+1)(x+2)(x^2+x-1) = 0$
$\Delta = 5$
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Odp. $x \in \{-1, -2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$

2. $x^5-7x^3-8x^2+2x+12=0$

	1	0	-7	-8	2	12	
1	0	1	1	-6	-14	-12	0
-2		0	1	-1	-4	-6	0
3			0	1	2	2	0

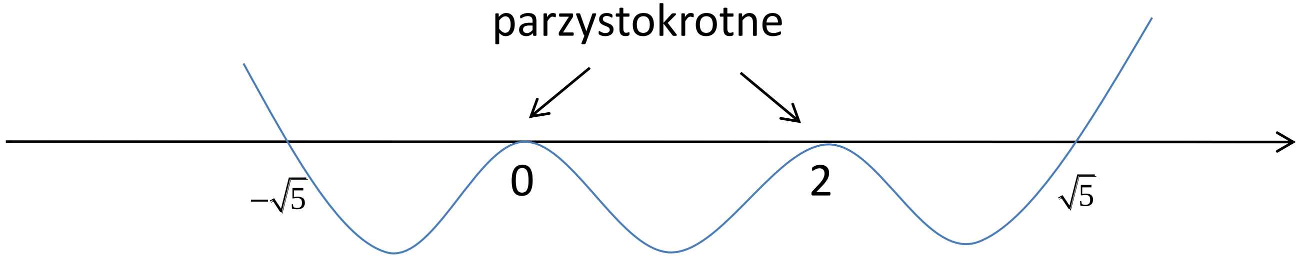
$(x-1)(x+2)(x-3)(x^2+2x+2)=0$
$\Delta<0$
Odp. $x\in\{-2,1,3\}$

3. $x^6-4x^5-x^4+20x^3-20x^2 \geq 0$

$x^2(x^4-4x^3-x^2+20x-20) \geq 0$

	1	-4	-1	20	-20	
2	0	1	-2	-5	10	0
2		0	1	0	-5	0

$x^2(x-2)^2(x^2-5) \geq 0$



Odp. $x \in (-\infty, -\sqrt{5}] \cup \{0,2\} \cup [\sqrt{5}, \infty)$

4. Rozwiąż $(2x+5)^2-(4x^2-25)^2<0$

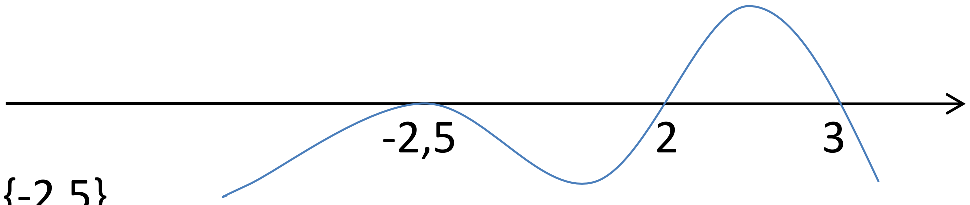
$(2x+5-4x^2+25)(2x+5+4x^2-25)<0$

$-(4x^2-2x-30)(4x^2+2x-20)<0$

$-4(2x^2-x-15)(2x^2+x-10)<0$

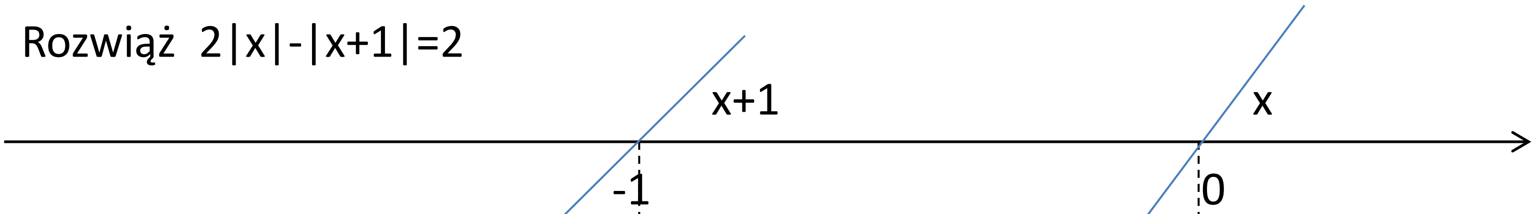
$\Delta_1=121 \qquad \Delta_2=81$

$-16(x+2,5)^2(x-3)(x-2)<0$



Odp. $x \in (-\infty,2) \cup (3,\infty) \setminus \{-2,5\}$

5. Rozwiąż 2|x|-|x+1|=2



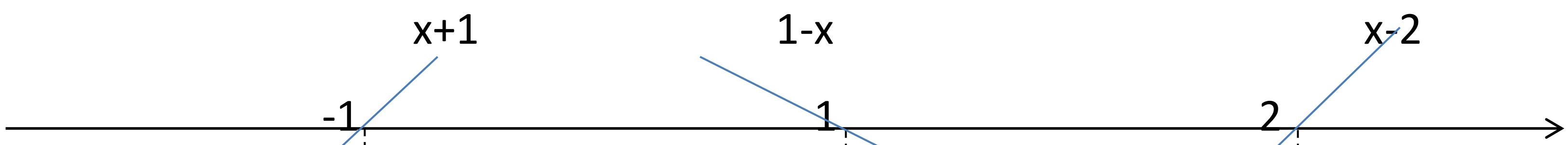
-2x+x+1=2
x=-1 $\notin$(-∞,-1)

-2x-x-1=2
x=-1 $\in$[-1,0)

2x-x-1=2
x=3 $\in$[0,∞)

Odp. x $\in$ {-1,3}

6. Rozwiąż |x-2|-|1-x|≥|x+1|-5



-x+2-1+x≥-x-1-5
x ≥-7 ∧ x∈(-∞,-1)
x∈[-7,-1)

-x+2-1+x≥x+1-5
x≤5 ∧ x∈[-1,1)
x∈[-1,1)

-x+2+1-x≥x+1-5
x≤$\frac{7}{3}$ ∧ x∈[1,2)
x∈[1,2)

x-2+1-x≥x+1-5
x≤3 ∧ x∈[2,∞)
x∈[2,3]

Odp. x∈ [-7,3]

Zadanie:

1. Rozwiąż:

a) $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$, b) $(6x^2 - x - 1)(4x^2 + 4x + 1) \geq 0$,

c) $x^8 + x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 21x^4 + 9x^3 - 22x^2 - 4x + 8 \leq 0$

2. Rozwiąż:

a) |2x-1|+x=|2-3x|, b) |1-x|-|x|+|2x+3|>2x+4 , c) |3+|x+1||≥ 4x-3

II. **Funkcja wymierna**

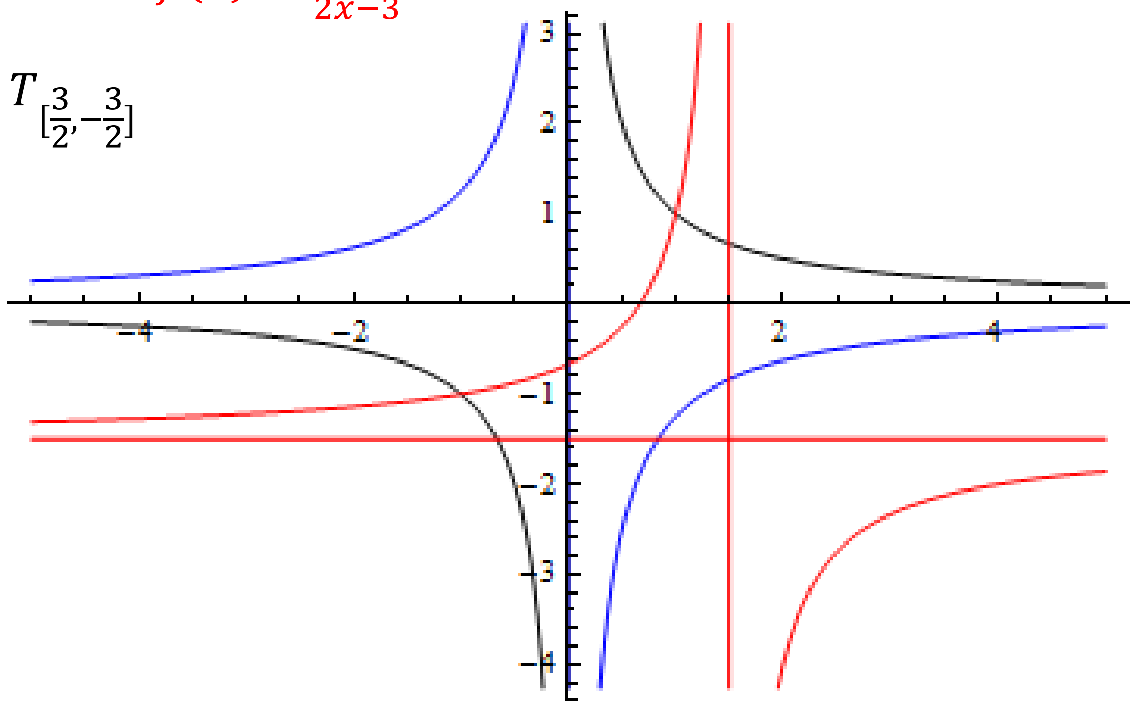
Def. Funkcją wymierną nazywamy funkcję postaci $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P(x) i Q(x) są wielomianami zmiennej x.

Np. 1. Narysuj wykres funkcji homograficznej $f(x)=\frac{2-3x}{2x-3}$

$$f(x)=\frac{2-3x}{2x-3}=\frac{-\frac{3}{2}(2x-3)-\frac{5}{2}}{2x-3}=-\frac{3}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-\frac{3}{2}}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\ \xrightarrow{P_{\perp OX}^{-\frac{5}{4}}}\ f(x)=\frac{-5}{4}\cdot\frac{1}{x}\ \xrightarrow{T_{[\frac{3}{2},-\frac{3}{2}]}}\ f(x)=\frac{2-3x}{2x-3}$$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$, $D_f^{-1}=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$



Zadanie: Wychodząc od wykresu $f(x) = \frac{1}{x}$ sporządź wykresy funkcji:

a) $f(x) = \frac{5-x}{3x-2}$, b) $f(x) = \frac{2|x|+1}{3-|x|}$, c) $f(x) = 1 - 2\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$

Np.

1. Rozwiąż $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{4}{x+2x^2+x^3} = \frac{5}{2x+2x^2}$

D: $x^2 + 2x + 1 \neq 0 \;\wedge\; x^3 + 2x^2 + x \neq 0 \wedge 2x^2 + 2x \neq 0$

x≠-1 ∧ x≠0

$$\frac{2x+8}{2x(x+1)^2} = \frac{5(x+1)}{2x(x+1)^2}$$

3x=3

x=1 ∈D

Odp. x∈{1}

2. Rozwiąż $\frac{14}{x^2-5x+6} \leq \frac{10}{2-x} - 3$

D: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \;\wedge\; x \neq 2$

x≠2 ∧ x≠3

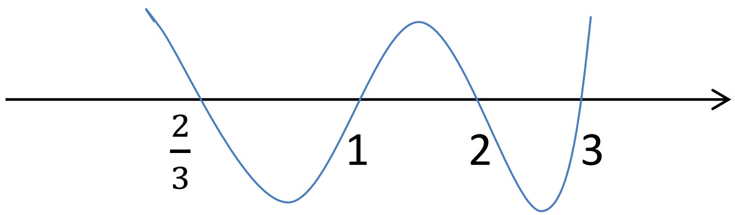
$$\frac{14}{x^2-5x+6} - \frac{10}{2-x} + 3 \leq 0$$

$$\frac{14+10(x-3)+3(x^2-5x+6)}{x^2-5x+6} \leq 0$$

$$(x^2-5x+6)(3x^2-5x+2) \leq 0$$

$\Delta=1$ $\Delta=1$

Odp. $x \in [\frac{2}{3}, 1] \cup (2,3)$



Zadanie: Rozwiąż:

a) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x^2-4x+3}$,

b) $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x+4} \leq \frac{4x}{x^2+2x-8}$,

c) $\frac{x^3-1}{x^2-1} < \frac{x^2+1}{x-1}$

Tw. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste

Jeżeli degP<degQ, to funkcja wymierna f(x) =$\frac{P(x)}{Q(x)}$ daje się przedstawić jako suma ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_1}{(x-x_i)}, \frac{A_2}{(x-x_i)^2}, \dots, \frac{A_{k_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

gdzie x_i jest pierwiastkiem wielomianu Q(x) o krotności k_i

oraz

$$\frac{B_1x+C_1}{a_jx^2+b_jx+c_j}, \frac{B_2x+C_2}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^2}, \dots, \frac{B_{l_j}x+C_{l_j}}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^{l_j}},$$

gdzie wyrażenie $(a_jx^2+b_jx+c_j)^{l_j}$ pojawia się w rozkładzie wielomianu Q(x) do postaci iloczynowej.

Np. Rozłóż na ułamki proste funkcję $f(x)=\frac{2x^3-1}{x(x-1)^2(x^2+1)^2}$

$$\frac{2x^3-1}{x(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^3-1=A(x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1)+B(x^6-x^5+2x^4-2x^3+x^2-x)+$$
$$+C(x^5+2x^3+x)+(Dx+E)(x^5-2x^4+2x^3-2x^2+x)+(Fx+G)(x^3-2x^2+x)$$

$$\begin{cases} A+B+D=0 \\ -2A-B+C-2D+E=0 \\ 3A+2B+2D-2E+F=0 \\ -4A-2B+2C-2D+2E-2F+G=2 \\ 3A+B+D-2E+F-2G=0 \\ -2A-B+C+E+G=0 \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=0{,}75 \\ C=0{,}25 \\ D=0{,}25 \\ E=-1 \\ F=-1 \\ G=-0{,}5 \end{cases}$$

2. $f(x)=\frac{4x^3-3x^2-2x+2}{x^4-x^3}$

$$\frac{4x^3-3x^2-2x+2}{x^4-x^3}=\frac{4x^3-3x^2-2x+2}{x^3(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}\,/\cdot x^3(x-1)$$

$$4x^3-3x^2-2x+2=Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)+Dx^3$$

dla x=1: 1=D

Dla x=0: 2=-C $\Rightarrow$ C=-2

Dla x=2: 32-12-4+2=4A+2B+C+8D

18=4A+2B+C+8D

18=4A+2B-2+8

12=4A+2B

6=2A+B

Dla x=-1: -3=-2A+2B-2C-D

$$\begin{cases}-3=-A+B\\ 6=2A+B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\ B=0\end{cases}$$

Zadanie: Rozłóż na ułamki proste funkcje:

a) $f(x)=\frac{2x-1}{x^4-4x^3+7x^2-8x+4}$,

b)$f(x)=\frac{x^3-x}{x^4-3x^3+x^2+4}$,

c) $f(x)=\frac{x}{x^4+4}$

III. **Funkcja niewymierna**

Def. Funkcją niewymierną nazywamy każdą funkcję, która w swoim wzorze zawiera pierwiastek (lub pierwiastki) dowolnego stopnia.

Np. 1. Rozwiąż $(x-1)\sqrt{x+4} = 2-4x$

D: $x \geq -4$

Jeżeli obydwie strony równania są tego samego znaku, to możemy równanie stronami podnieść do kwadratu

I. $x-1\geq 0 \wedge 2-4x\geq 0 \Rightarrow x\in\emptyset$

II. $x-1<0 \wedge 2-4x<0 \Rightarrow x\in(\frac{1}{2}, 1)$

$$(x-1)^2(x+4) = (2-4x)^2$$

$$x^3 - 14x^2 + 9x = 0$$

$x=0 \vee x=7-2\sqrt{10} \vee x=7+2\sqrt{10} \Rightarrow$ Odp. $x=7-2\sqrt{10}$

2. Rozwiąż $\sqrt{x^2+x-12} < 6-x$

D: $x^2+x-12\geq 0$

$x\in(-\infty,-4]\cup[3,\infty)$

I. $6-x\geq 0 \wedge x^2+x-12<x^2-12x+36 \Rightarrow x \geq 6 \wedge 13x < 48 \Rightarrow x\in(-\infty,\frac{48}{13})$

II. $6-x<0 \Rightarrow x\in\emptyset$

Czyli $x\in(-\infty,\frac{48}{13}) \wedge x\in D$

Odp. $x\in (-\infty,-4] \cup[3,\frac{48}{13})$

3. Rozwiąż $\sqrt{2+x-x^2} > x-1$

D: $2+x-x^2 \geq 0$

$x \in [-1,2]$

I. $x-1<0 \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in (-\infty,1)$

II. $x-1 \geq 0 \wedge 2+x-x^2 > x^2-2x+1 \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}, \frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) \Rightarrow x \in [1, \frac{3+\sqrt{17}}{4})$

Czyli $x \in (-\infty, \frac{3+\sqrt{17}}{4}) \wedge x \in D$

Odp. $x \in [-1, \frac{3+\sqrt{17}}{4})$

4. Rozwiąż $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

D: $x+3-4\sqrt{x-1} \geq 0 \wedge x+8-6\sqrt{x-1} \geq 0 \wedge x \geq 1$

$x+3 \geq 4\sqrt{x-1} \wedge x+8 \geq 6\sqrt{x-1} \wedge x \geq 1$

$x+3 \geq 0 \wedge (x+3)^2 \geq 4(x-1) \wedge x+8 \geq 0 \wedge (x+8)^2 \geq 6(x-1) \wedge x \geq 1$

$x \geq -3 \wedge x^2-10x+25 \geq 0 \wedge x \geq -8 \wedge x^2-20x+1000 \geq 0 \wedge x \geq 1$

$x \in [1,\infty)$

$t=\sqrt{x-1} \Rightarrow x=t^2+1$

$\sqrt{t^2+4-4t} + \sqrt{t^2+9-6t} = 1 / (\ )^2$ lub $|t-2|+|t-3|=1$

$\sqrt{t^4-10t^3+37t^2-60t+36} = -t^2+5t-6$

$-t^2+5t-6 \geq 0 \wedge t^4-10t^3+37t^2-60t+36 = t^4-10t^3+37t^2-60t+36$

$t \in [2,3] \Rightarrow 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \Rightarrow x \in [5,10] \wedge x \in D$

Odp. $x \in [5,10]$

5. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}=x+1$

$$D:\quad 3x-2\geq 0 \quad \wedge \quad 2-x\geq 0$$

$$x\geq \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x\leq 2$$

$$D=[\frac{2}{3};2]$$

zauważamy, że w dziedzinie prawa strona jest dodatnia (gdyby nie była należałoby zrobić dodatkowe założenie), więc równanie podnosimy stronami do kwadratu

$$3x-2+2\sqrt{3x-2}\sqrt{2-x}+2-x=(x+1)^2$$

$$2\sqrt{3x-2}\sqrt{2-x}=x^2+1$$

obydwie strony równania są dodatnie, więc jeszcze raz podnosimy stronami do kwadratu

$$-12x^2+32x-16=x^4+2x^2+1$$

$$x^4+14x^2-32x+17=0$$

	1	**0**	**14**	**-32**	**17**	
1	0	1	1	15	-17	0
1		0	1	2	17	0

$$(x-1)^2(x^2+2x+17)=0$$

$$x=1\in D \qquad \Delta<0$$

Zadanie: Rozwiąż:

a) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$, b) $2\sqrt[3]{x^2}-5\sqrt[3]{x}=3$

c) $\sqrt{x^2-3x-10}\geq x-2$, d) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$