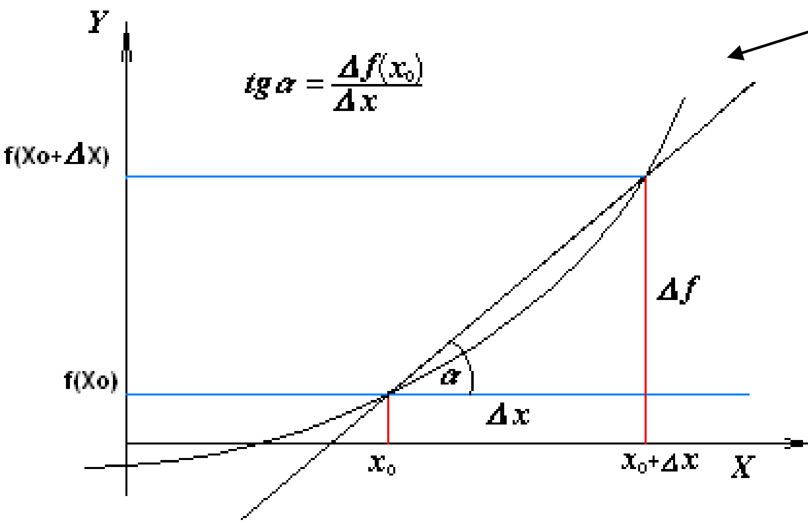
"W matematyce nie ma drogi specjalnie dla królów."
Euklides

Def.: Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu Δx nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Sieczna wykresu y=f(x) przechodząca przez punkt y $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

Wniosek:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

α – kąt nachylenia siecznej wykresu y=f(x) przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ do dodatniej półosi OX.

Def: Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta \mathrm{x}}$ dla $\Delta x \to 0$

Oznaczamy: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Np. Oblicz pochodne

1. f(x)=a

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a-a}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$ $\qquad$ $(a)'=0$

2. f(x)=x

$f'(x_0)= \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0} 1 = 1$ (x)'=1

3. f(x)=$\sqrt{x}$, $x_0 \in (0,\infty)$

$f'(x_0)= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, x>0

4. f(x)=$\frac{1}{x}$, $x_0 \neq 0$

$f'(x_0)= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x\cdot x_0(x-x_0)}=\frac{-1}{{x_0}^2}$ $(\frac{1}{x})'=\frac{-1}{x^2}$, x≠0

5. f(x)=a^x , a>0

$f'(x_0)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a$ $(a^x)'=a^x\ln a$, a>0

6. f(x)=$\sin x$

$f'(x_0)= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\frac{x_0+\Delta x+x_0}{2}\sin\frac{x_0+\Delta x-x_0}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x_0$

(sin x)' = cos x

(cosx)'= - sinx

Zadanie: Z definicji wylicz pochodne funkcji: a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, b) $f(x)=\frac{1}{x^3}$, c) $f(x)=x^4$

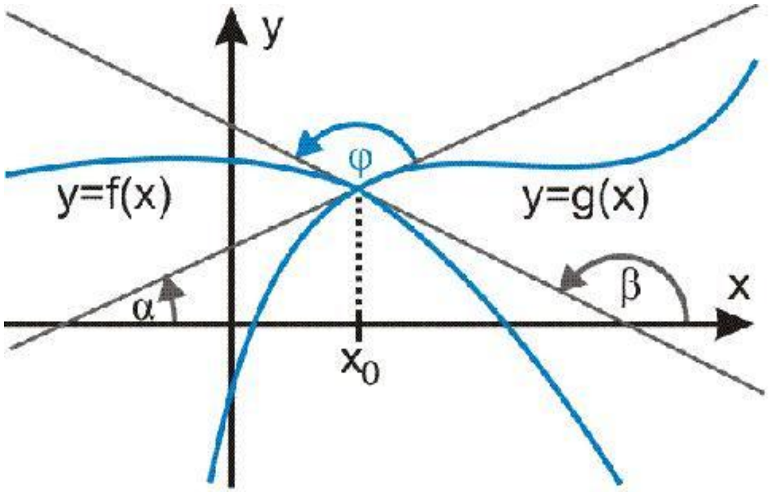
Def: Styczną do wykresu funkcji y=f(x) w punkcie x_0 nazywamy prostą o równaniu

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

Np. Wyznacz równanie stycznej do wykresu $y=\sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 4$

Odp. Styczna ma równanie $y-\sqrt{4}=\frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+1$

Def. Kątem przecięcia się dwóch wykresów funkcji, które mają pochodne w punkcie przecięcia x_0 nazywamy kąt φ, pod którym przecinają się styczne do wykresów tych funkcji w punkcie x_0.



Wniosek: $\mathrm{tg}\varphi = \left| \frac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)\,g'(x_0)} \right|$

$\mathrm{tg}\beta=f'(x_0)$
$\mathrm{tg}\alpha=g'(x_0)$
$\mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\beta-\alpha)$

Np. Znajdź kąt przecięcia się wykresów $y = 2^x, y = 4^x$

$2^x = 4^x \Leftrightarrow x = 2x \Leftrightarrow x = 0$
$(2^x)' = 2^x ln2$, $(4^x)' = 4^x ln4$
$tg\varphi = \left|\frac{\ln 2-\ln 4}{1+\ln 2 \cdot \ln 4}\right| = \frac{\ln 2}{1+2ln^2 2}$
Odp. $\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{ln2}{1+2ln^2 2})$

Zadanie: Oblicz kąt, pod jakim przecinają się styczne do wykresów funkcji:
a) f(x)=e^{-2x+1} i g(x)=e^{x+4}, b) f(x)=$x^2 - x + 1$ i g(x)= - x+4 , c) f(x)=sinx i g(x)=cosx,
d) $f(x) = \frac{1}{x}$ i g(x)=3x+2

Def. Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w $(a,b) \Leftrightarrow f$ ma pochodną w każdym punkcie $x_0 \in (a,b)$

Def. Pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Wniosek: WKW istnienia pochodnej

Funkcja f ma pochodną $f'(x_0) \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

Def. Mówimy że f jest różniczkowalna w [a,b] $\Leftrightarrow$ f jest różniczkowalna w (a,b) i istnieją $f'_+(a)$ oraz $f'_-(b)$

Np. Zbadaj różniczkowalność funkcji

1. $f(x) = |sin^3 x|$ w punkcie $x_0 = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{sin^3 \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{sin^3 \Delta x}{\Delta x^3} \Delta x^2 = 0,\ f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-sin^3 \Delta x}{\Delta x^3} \Delta x^2 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \le 1 \\ 2+\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2+\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty,\ f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

Funkcja nie jest różniczkowalna, bo nie jest różniczkowalna w 1.

Zadanie: Zbadaj różniczkowalność funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 1 \\ \sqrt{x}, x > 1 \end{cases}$, b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{\ln|x+1|}, x \ne -1 \\ 0, \quad x = -1 \end{cases}$, c) $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x^2}, x \ne 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

Tw. WK istnienia pochodnej
Jeżeli f ma pochodną w punkcie x_0 , to f jest ciągła w punkcie x_0

Uwaga: Nie jest to warunek wystarczający

$$f(x) = |x| \;-\; jest\ ciągła\ w\ x_0 = 0$$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$, $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \;\Rightarrow\; |x|$ - nie ma pochodnej w x_0

Np. Zbadaj, czy jest różniczkowalna funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{2x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

zbadamy ciągłość w punkcie $x_0 = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{2x} = \frac{1}{2} \neq f(0)$

f nie jest ciągła w $x_0 = 0 \Rightarrow$ f nie ma pochodnej w $x_0 = 0$

Tw. arytmetyka pochodnych
Jeżeli f i g mają pochodne w punkcie x_0 to:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(a \cdot f)'(x_0) = a \cdot f'(x_0), \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \qquad g(x_0) \neq 0$$

Np. Oblicz pochodną:

1. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$
2. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. Udowodnij $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

Dowód indukcyjny:

I. $n = 1 \qquad (x)' = 1 \cdot x^{1-1} \qquad ok.$

$II. \quad Z: (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

T: $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$

$D: (x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1) \cdot x^n$

Wniosek: $(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)' = a_n n x^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1 + 0$

4. $\left(\frac{3x^2+x-4}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(3x^2+x-4\right)'(x^2+1) - \left(3x^2+x-4\right)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(6x+1-0)(x^2+1) - \left(3x^2+x-4\right)(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+14x+1}{(x^2+1)^2}$

2. $\left(\frac{4x^3-2x^2+x}{x^2+2x+3}\right)' = \frac{(4x^3-2x^2+x)' \cdot (x^2+2x+3) - (4x^3-2x^2+x) \cdot (x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^2} =$

$= \frac{(12x^2-4x+1) \cdot (x^2+2x+3) - (4x^3-2x^2+x) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{4x^4+16x^3+31x^2-12x+3}{x^4+4x^3+10x^2+12x+9}$

Zadanie: Oblicz pochodne: a) $f(x) = \frac{x^3 - \frac{2}{x}}{1+\sqrt{x}}$, b) $f(x) = (arcsinx + \sqrt[5]{x})3^{2x+1}$, c) $f(x) = thx$

Tw. pochodna funkcji złożonej

Jeżeli f ma pochodną w x_0 i g ma pochodną w $y_0 = f(x_0)$ to $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Np. Oblicz pochodną:

1. $(\sin(3x^2 + 2x + e^x))' = \cos(3x^2 + 2x + e^x)\,(6x + 2 + e^x)$

2. $\sqrt{(3x^2+1)}\,' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot 6x$

3. $\left(2^{\left(x^3 + \frac{2x^2-x}{\sqrt{x}+1}\right)}\right)' = 2^{\left(x^3 + \frac{2x^2-x}{\sqrt{x}+1}\right)} ln2 \cdot \left(3x^2 + \frac{(4x-1)\left(\sqrt{x}+1\right) - \left(2x^2-x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)$

3. $\left(tg^2\left(4^{x^2+x}\right)\right)' = 2tg(4^{x^2+x})\frac{1}{cos^2\left(4^{x^2+x}\right)}4^{x^2+x}\ln 4\,(2x+1)$

4. $(3^{cos\frac{x^3-2x}{x^2+1}})' = 3^{cos\frac{x^3-2x}{x^2+1}} \cdot \ln 3 \cdot (-\sin\frac{x^3-2x}{x^2+1}) \cdot \frac{(3x^2-2)(x^2+1)-2x(x^3-2x)}{(x^2+1)^2}$

5. $\left(\frac{4sin^3x-3^{tgx}}{\cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)}\right)' = \frac{\left(4sin^3x-3^{tgx}\right)'\cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)-(4sin^3x-3^{tgx})cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)'}{cos^2\left(\frac{2x}{x+1}\right)} =$

$= \frac{\left(12sin^2xcosx-3^{tgx}\ln 3\frac{1}{cos^2x}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\left(4sin^3x-3^{tgx}\right)(-sin\frac{2x}{x+1})\frac{2(x+1)-2x\cdot 1}{(x+1)^2}}{cos^2(\frac{2x}{x+1})}$

Zadanie:

1. Oblicz pochodne:

a) $f(x) = \sqrt[3]{arctgx^3+3x}$, b) $f(x) = sin^4(log_2(x^2+4))$, c) $f(x) = 3^{ln^2(arcctgx)}$

2. Napisz równania stycznych do wykresów:

a) f(x)=$\sqrt{2^{x-1}+3}$ w $x_0 = 1$, b) f(x)=$\frac{2x}{1+x^2}$ $w\ x_0 = \sqrt{2}$, c) f(x)=arctg$\frac{1-x}{1+x}$ $w\ x_0 = 1$

Tw. pochodna funkcji odwrotnej

Jeżeli f ma pochodną w x_0, f jest ciągła i różnowartościowa w otoczeniu (x_0-δ, x_0+δ) punktu x_0 oraz f'(x_0)≠0, to $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$, gdzie $y_0=f(x_0)$

Np. oblicz pochodne

1. $(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$ a > 0, a≠1

$y = a^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, x>0

2. $\left(\sqrt[n]{y}\right)' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$

y=x^n ⇔ x=$\sqrt[n]{y}$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $x \in D_{\sqrt[n]{x}}$

3. (arcsin y)' = $\frac{1}{(\sin x)'}$ = $\frac{1}{\cos x}$= $\frac{1}{\sqrt{1-sin^2\,(arc\,\sin y)}}$= $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

y = $\sin x$ ⇔ x = arcsin y

(arcsin x)' =$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, x∈(-1,1)

4. (arctg y)' = $\frac{1}{(\tan x)'}$ = cos^{2}x = $\frac{1}{1+tg^2 x}$= $\frac{1}{1+y^2}$

y = tg x ⇔ x = arctg y

(arctg x)' = $\frac{1}{1+x^2}$, x ∈ ℝ

Zadanie: Z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz pochodne:

a) f(x)=arccosx , b) f(x)=arcctgx ,

c) $(f^{-1})'(3)$, dla $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}$, d)$(f^{-1})'(\mathrm{e}+1)$, dla $f(x) = x + lnx$

Wniosek: Pochodna logarytmiczna

Jeżeli f ma pochodną w x_0 i $f(x_0) > 0$, to $f'(x_0) = f(x_0) \cdot (\ln f)'(x_0)$

Np. Oblicz pochodne

1. $(x^a)' = x^a (\ln x^a)' = x^a \cdot (a \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$, $a \in \mathbb{R}$

2. $(x^x)' = x^x \cdot (\ln x^x)' = x^x \cdot (x \ln x)' = x^x(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$, x>0

$2.\quad (arctgx^{\sqrt[3]{x}})' = arctgx^{\sqrt[3]{x}}(ln(arctgx^{\sqrt[3]{x}}))' = arctgx^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} \cdot lnarctgx)' =$

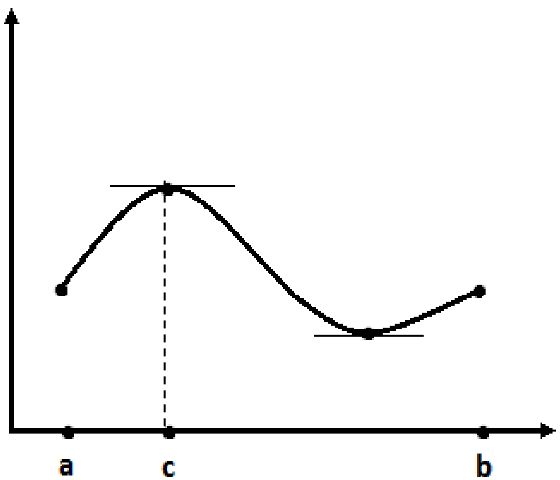
$= arctgx^{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} lnarctgx + \sqrt[3]{x}\frac{1}{arctgx} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)$

Zadanie: Oblicz pochodne:

a) $f(x) = (sinx + cosx)^{tgx}$, b) $f(x) = (x^2 + \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$, c) $f(x) = (arcsin\sqrt{x})^{arctgx}$

Tw. Rolle'a

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w (a,b) i ciągła w [a,b] oraz f(a)=f(b), to $\exists$c $\in$(a,b): f'(c)=0



Uwaga: w punkcie c styczna do y=f(x) jest równoległa do osi Ox

Np. Zbadaj, czy funkcja spełnia założenia i tezę tw. Rolle'a

1. $f(x) = \frac{1-x^2}{x+2}$ dla $x \in [-1,1]$ $\quad D_f$=ℝ\{-2}

$f'(x) = \frac{-2x(x+2)-(1-x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-1}{(x+2)^2}$, $\quad D_{f'}$=ℝ\{-2}

f jest ciągła w [-1,1] i różniczkowalna w (-1,1) oraz f(-1)=f(1)=0

f'(c)=0 $\Leftrightarrow c^2 + 4c + 1 = 0 \Leftrightarrow c = -2 - \sqrt{3} \notin (-1,1) \vee c = -2 + \sqrt{3} \in (-1,1)$

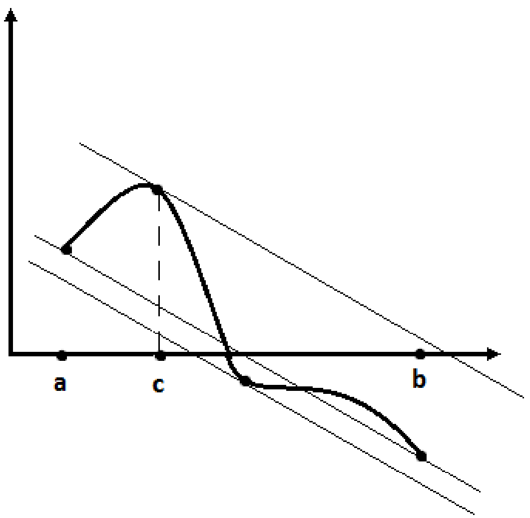
2. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}^2$ dla $x \in [-1,1]$ $\quad D_f$=ℝ

$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ $\quad D_{f'}$=ℝ\{0}

f jest ciągła w [-1,1] i nie jest różniczkowalna w $x_0 = 0$ oraz f(-1)=f(1)=0, a nie istnieje c tże f'(c)=0

Tw. Lagrange'a

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w (a,b) i ciągła w [a,b], to $\exists c \in (a,b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$= tg$\alpha$

α - kąt nachylenia siecznej y=f(x) przechodzącej przez punkty (a,f(a)) i (b,f(b)) do dodatniej półosi Ox

Uwaga: styczna w punkcie x=c do y=f(x) jest równoległa do siecznej y=f(x) przechodzącej przez punkty (a,f(a)) i (b,f(b))

Np. Udowodnij nierówności

1. $e^x \geq 1+x$, $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $e^x - 1 \geq x$

1° x >0

Funkcja f(x) = e^x jest ciągła i różniczkowalna w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

niech a=0 , b=x $\Rightarrow$ $\exists c \in (0,x)$: f'(c) =$e^c = \frac{e^x - e^0}{x-0}$

$0 < c < x \Rightarrow e^c > e^0 \Rightarrow \frac{e^x - e^0}{x-0} > 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq x$

2° x=0 $\Rightarrow e^0 - 1 \geq 0$

3° x< 0

niech a=x, b=0 $\Rightarrow$ $\exists c \in (x,0)$: $e^c = \frac{e^x - e^0}{x-0} \wedge e^c < e^0 \Rightarrow \frac{e^x - e^0}{x-0} < 1 \Rightarrow e^x - 1 \geq x$

2. $|\arcsin x - \arcsin y| \geq |x - y|$, $x, y \in [-1, 1]$

1° x> y $\Rightarrow$ $\arcsin x > \arcsin y$

pytamy, czy $\frac{\arcsin x - \arcsin y}{x-y} \geq 1$

f(x) = $\arcsin x$ $-$ funkcja ciągła w$[-1, 1]$ i różniczkowalna w $(-1,1)$

niech a=y , b=x $\Rightarrow$ $\exists c \in (y,x)$: $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\arcsin x - \arcsin y}{x-y}$

-1$\leq y < c < x \leq 1 \Rightarrow c^2 < 1 \Rightarrow 1-c^2 \geq 0 \wedge \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \geq 1 \Rightarrow \frac{\arcsin x - \arcsin y}{x-y} \geq 1$

2° y > x $\Rightarrow \arcsin y > \arcsin x$

pytamy, czy $\frac{\arcsin y - \arcsin x}{y-x} \geq 1$

niech a= x ; b= y$\Rightarrow$ $\exists c \in (x,y)$: $f'(c) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\arcsin y - \arcsin x}{y-x}$ $\wedge$ c <1 $\wedge$ $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} \geq 1$

3° y = x $\Rightarrow$ 0= $|\arcsin x - \arcsin y| \geq$ |x - y| $= 0$

3. $\frac{x}{1+x} < ln(1+x) < x$, x>0

pytamy czy $\frac{1}{1+x} < \frac{ln(1+x)}{x} < 1$

f(x)= $\ln(1+x)$ - jest różniczkowalna dla x>-1 i ciągła dla x>-1

niech a=0,   b=x $\Rightarrow$ $\exists$c$\in$(0,x): f'(c)=$\frac{ln(1+x)-ln(1)}{x-0} = \frac{ln(1+x)}{x}$

f'(x)=$\frac{1}{1+x}$ $\Rightarrow$ f'(c)=$\frac{1}{1+c}$ $\wedge$ 0 < c < x

1< c+1<x+1 $\Rightarrow$ 1> $\frac{1}{1+c} > \frac{1}{1+x}$ $\Rightarrow$ 1> $\frac{ln(1+x)-ln(1)}{x-0} > \frac{1}{1+x}$

Zadanie: Z tw. Lagrange'a udowodnij nierówności:

a) $e^x > ex$ dla $x > 1$, b) $x \leq arcsinx \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla 0≤x<1 , c) $ln\frac{x}{y} < x - y$ dla 1≤y<x

Tw.

Jeżeli f jest różniczkowalna w przedziale (a, b) , to :

1. $\forall x \in (a, b)$: f'(x) = 0 $\Leftrightarrow$ f(x)= const w (a,b)
2. $\forall x \in (a, b)$: f'(x)>0 (f'(x)<0) $\Rightarrow$ f jest rosnąca (malejąca) w (a,b)
3. f jest rosnąca (malejąca) *w (a,b)* $\Rightarrow$ $\forall x \in (a, b)$: f'(x)$\geq$0 (f'(x)$\leq$0)

Np. Zbadaj monotoniczność

1. $f(x) = e^x cosx$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

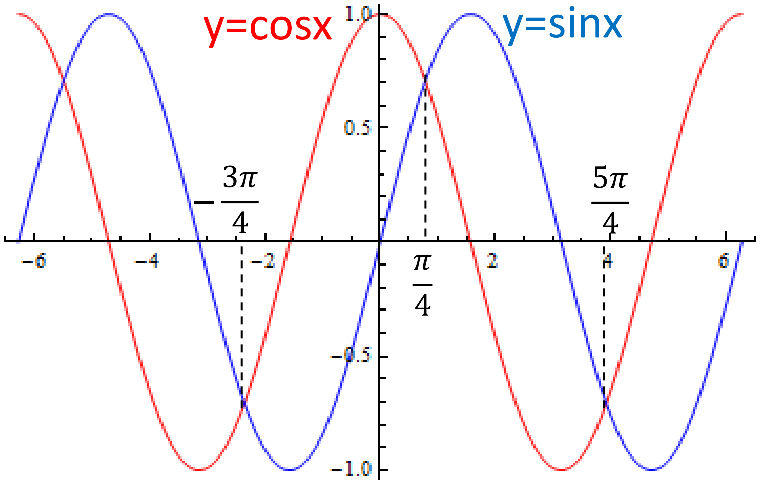
$$f'(x) = e^x cosx - e^x sinx > 0 \Leftrightarrow cosx > sinx \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

f jest rosnąca w każdym z przedziałów

$$\left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

f jest malejąca w każdym z przedziałów

$$\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$$



2. $f(x) = \sqrt{9x - x^3}$ $\qquad D_f: 9x - x^3 \geq 0$

$$x(3 - x)(3 + x) \geq 0$$
$$x \in (-\infty, -3] \cup [0,3]$$

$$f'(x) = \frac{9 - 3x^2}{2\sqrt{9x - x^3}} > 0 \Leftrightarrow 9 - 3x^2 > 0 \wedge x \in D_{f'} = (-\infty, -3) \cup (0,3)$$

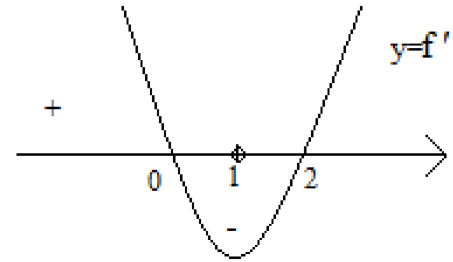
$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) > 0 \wedge x \in D_{f'} \Leftrightarrow x \in (0, \sqrt{3})$$

f jest rosnąca w $(0, \sqrt{3})$

f jest malejąca w przedziałach $(-\infty, -3)$ oraz $(\sqrt{3}, 3)$

3. f(x)=$\frac{x^2}{x-1}$ $\qquad$ $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

f ′(x)=$\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$



Odp. f rosnąca dla x∈(-∞,0) oraz x∈(2,+∞)

f malejące dla x∈(0,1) oraz x∈(1,2)

4. f(x)= $2\,\mathrm{arc}\,tgx + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

D_f: $-1 \le \frac{2x}{1+x^2} \le 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \le 2x \le 1+x^2 \Leftrightarrow -x^2-2x-1 \le 0 \le x^2-2x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -(x+1)^2 \le 0 \le (x-1)^2 \Leftrightarrow$ x∈$\mathbb{R}$

$$f'(x)= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^4-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2}\left[1+\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\right] = \frac{2}{1+x^2}\left[1+\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right]$$

$$f'(x)= \begin{cases} \frac{4}{1+x^2}, & 1-x^2>0 \\ 0 & ,1-x^2<0 \end{cases}$$

Odp. f rosnąca dla x∈(-1,1)

f=const dla x∈(-∞,-1) oraz dla x∈(1,+ ∞)

Zadanie: Zbadaj monotoniczność: a) $f(x) = xe^{-2x}$, b) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$, c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{ln\sqrt{x}}$

Wniosek:

Jeżeli f i g są różniczkowalne w (a , b), to

1. $[\forall x\in(a,b): f'(x)=g'(x) \ \wedge \ \exists x_0\in(a,b): f(x_o)=g(x_o)] \Rightarrow \forall x\in(a,b): f(x)=g(x)$
2. $[\forall x\in(a,b): f'(x)\leq g'(x) \ \wedge \ f(a)\leq g(a)] \ \Rightarrow \ \forall x\in(a,b): \ f(x)\leq g(x)$

Np.

1. Udowodnij tożsamość: arcsin x + arccos x $=\frac{\pi}{2}$, $x\in(-1,1)$

1° Niech f(x)= arcsin x + arccos x , g(x)= $\frac{\pi}{2}$

$f'(x)= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ dla $x\in(-1,1)$, $g'(x)= 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=g'(x)$

weźmy $x_0 = 0 \Rightarrow f(0)= 0 + \frac{\pi}{2}$, $g(0)=\frac{\pi}{2}$,

czyli $f(x) = g(x)$ dla $x \in (-1,1)$

2° dla x= -1 mamy $-\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = g(x)$ dla $x=-1$

3° dla x= 1 mamy $\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = g(x)$ dla $x=1$

2. Udowodnij nierówność $1+2\ln x < x^2$, dla $x > 1$

$f(x) = 1 + 2lnx$ $\qquad$ $g(x)=x^2$

$f'(x)= \frac{2}{x}$ $\qquad$ $g'(x)= 2x$

pytamy, czy $\frac{2}{x} < 2x$ dla $x>1$

$\frac{2}{x} < 2x \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x)<0 \Leftrightarrow x\in(-1,0) \cup (1,\infty)$ O.K.

$f(1)=1\leq g(1) = 1$ O.K.

2. Udowodnij nierówność: tg x > x + $\frac{x^3}{3}$, x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$

f(x)= tg x , g(x)= x + $\frac{x^3}{3}$

f'(x)= $\frac{1}{cos^2x}$; g'(x)= 1+ x^2

Pytamy, czy : $\frac{1}{cos^2x} >$ 1+ x^2

$$\frac{1}{cos^2x} > 1+x^2 \Leftrightarrow cos^2x < \frac{1}{1+x^2} \xLeftrightarrow{\cos x\ jest\ dodatni} cosx < \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow x > \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Weźmy $f_1(x)= x$; $g_1(x)= \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ - obie funkcje są różniczkowalne w $(0,\frac{\pi}{2})$

$$f_1'(x)= 1\ ;\ g_1'(x)= \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^3}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Pytamy, czy 1> $\frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow 1+x^2 > 1$ prawda dla $x \in (0,\frac{\pi}{2})$

⇒ $f_1'(x) > g_1'(x)$ i $f_1(0)=0 \geq g_1(0)=0 \Rightarrow f_1(x) > g_1(x)$, dla x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$

⇒ f'(x)>g'(x), dla x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$ i $f(0)=0 \geq g(0) = 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$, dla x∈ $(0,\frac{\pi}{2})$

Zadanie:

1. Uzasadnij tożsamości: a) $arcsinx = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $x \in (-1,1)$,

b) $arctgx = \frac{\pi}{4} - arctg\frac{1-x}{1+x}$ dla $x > -1$, c) $arcsinhx = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

2. Uzasadnij nierówności: a) $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$ dla x > -1, b) $cos^2x \geq 1 - x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$,

c) coshx ≥ 1+ $\frac{x^2}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$