"Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki."
Immanuel Kant

Def. Pochodną rzędu $n \in \mathbb{N}$ funkcji f w punkcie x_0 nazywamy pochodną z pochodnej rzędu (n-1) funkcji f w punkcie x_0. Oznaczenie $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$

Np. Oblicz:

1. $f^{(3)}(x)$ dla $f(x)=e^{x^2+1}$

$f'(x)=e^{x^2+1} \cdot 2x$, $f''(x)= (e^{x^2+1} \cdot 2x) \cdot 2x + e^{x^2+1} \cdot 2 = e^{x^2+1}(4x^2+2)$

$f^{(3)}(x)=(e^{x^2+1} \cdot 2x)\cdot(4x^2+2)+ e^{x^2+1} \cdot 8x= e^{x^2+1}(8x^3+12x)$

2. $f''(0)$ dla $f(x)=\begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x} + x^3\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$ dla $x \neq 0$

0 ograniczona

↑ ↑

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0$

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ – nie istnieje w pkt 0

↓ ↓

0 ograniczona

Zadanie:

1. Oblicz pochodną $f^{(3)}(x)$: a) $f(x) = x^3 lnx$, b) $f(x) = arctgx$, c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$
2. Zbadaj, czy istnieją pochodne: a) $f^{(3)}(0)$ dla $f(x) = x^3|x|$,

   b) $f''(0)$ dla $f(x) = \begin{cases} -(e^x - 1)^2, x \le 0 \\ x^2, \quad x > 0 \end{cases}$, c) $f^{(3)}(0)$ dla $f(x) = \begin{cases} x^4 arctg\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$

Tw. Taylora

Jeżeli f ma pochodną rzędu (n+1) w otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, to:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \exists \Theta \in (0,1):$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0),$$

gdzie $R_n(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$

Np.

1. Oblicz przybliżoną wartość cos0,2 z dokładnością 10^{-4}.

f(x)=cosx, x=0,2 , x_0=0

Rozwijamy funkcję cosinus ze wzoru Taylora:

$$cos0{,}2 = \cos 0 + \frac{-sin0}{1!}(0{,}2 - 0) + \frac{-\cos 0}{2!}(0{,}2)^2 + \frac{sin0}{3!}(0{,}2)^3 + \frac{cos0}{4!}(0{,}2)^4$$

$$\left|\frac{cos0}{4!}(0{,}2)^4\right| < 10^{-4}$$

$$cos0{,}2 = 1 - \frac{1}{2!}(0{,}2)^2 + \frac{1}{4!}(0{,}2)^4 \approx 0{,}98006667$$

2. Oblicz przybliżoną wartość $\sqrt[5]{0{,}98}$ z dokładnością 10^{-3}

f(x) = $\sqrt[5]{x}$, x = 0,98 , x_0 = 1 f'(x) = $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$ f''(x) = $\frac{1}{5}\cdot(-\frac{4}{5})x^{-\frac{9}{5}}$

$\sqrt[5]{0{,}98} \approx \sqrt[5]{1} + \frac{\frac{1}{5}}{1!}\cdot(-0{,}02) + \frac{\frac{4}{25}}{2!}\cdot(-0{,}02)^2$ $\left|\frac{\frac{4}{25}}{2!}\cdot(-0{,}02)^2\right| < 10^{-3}$

3. Oszacuj dokładność przybliżenia coshx $\approx 1 + \frac{x^2}{2},\ |x| < \frac{1}{10}$

$x_0 = 0, \qquad f(x) = coshx$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sinhx, \qquad f''(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = coshhx,$$

$f^{(3)}(x) = sinhx$

$$coshx = cosh0 + \frac{sinh0}{1!}x + \frac{cosh0}{2!}x^2 + \frac{sinhc}{3!}x^3$$

Trzeba oszacować $R_3 = \frac{sinhc}{3!}x^3$: $\left|\frac{sinhc}{3!}x^3\right| = \left|\frac{e^c - e^{-c}}{12}\cdot x^3\right| < \frac{2{,}21034\cdot\frac{1}{10^3}}{12} = 0{,}000184195$

$$c \in (0, x) \text{ dla } x > 0 \ \vee \ c \in (x, 0) \text{ dla } x < 0 => c \in (-0{,}1; 0{,}1)$$

$$|e^c - e^{-c}| < |e^c| + |e^{-c}| < 2e^{0{,}1} = 2{,}21034$$

4. Oszacuj dokładność przybliżenia $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2},\ |x| < \frac{1}{10}$.

$x_0 = 0$, f(x)=ln(1+x)

$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$$\ln(1+x) = \ln(1+0) + \frac{\frac{1}{1+0}}{1!}x + \frac{\frac{-1}{(1+0)^2}}{2!}x^2 + \frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!}x^3$$

Trzeba oszacować $R_3 = \frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!}x^3$: $\left|\frac{\frac{2}{(1+c)^3}}{3!}x^3\right| < \frac{\frac{1}{10^3}}{3\cdot(1-0{,}1)^3} = \frac{1}{3}\cdot 9^{-3}$

$$c \in (0, x) \text{ dla } x > 0 \ \vee \ c \in (x, 0) \text{ dla } x < 0 => c \in (-0{,}1; 0{,}1)$$

Zadanie:

1. Wylicz wartość wyrażenia z dokładnością d:

a) ln(1,1), d=10^{-4} , b) $\sqrt[3]{0,996}$, d=10^{-3}, c) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$, d=10^{-3}

2. Oszacuj błąd przybliżenia: a) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, |x|≤ $\frac{1}{4}$, b) $sinx \approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$, |x|≤ 1,

c) $\ln(1-x) \approx -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, |x|≤ $\frac{1}{10}$

Tw. reguła de l'Hospitala

Jeżeli f i g są różniczkowalne w (x_0-δ,x_0+δ) oraz g'(x)≠0 dla x ∈ (x_0-δ,x_0+δ)\{x_0} i

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ lub $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = a \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = a$$

Np. Oblicz granice

$\left[\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{lncosx}{lncos2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-sinx}{cosx}}{\frac{-2sin2x}{cos2x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{sinx}{xcosx}}{\frac{4sin2x}{2xcos2x}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(sinx)}{\ln(tgx)} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{sinx}\cdot cosx}{\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{cos^2x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{cos^3x\cdot tgx}{sinx} = \lim_{x\to 0^+}\frac{cos^3x\cdot\frac{sinx}{cosx}}{sinx} = \lim_{x\to 0^+} cos^2x = 1$$

$$[0\cdot\infty]: \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x \cdot 2^{\frac{1}{x-1}} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 1^+} \frac{2^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2^{\frac{1}{x-1}} \cdot \frac{-\ln 2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{1}{x-1}} \cdot x\ln 2 \cdot \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^2 =$$

$$= [2^\infty] = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$[\infty-\infty]: \quad \lim_{x\to\infty}(e^x - x) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{-x}} - \frac{1}{x^{-1}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}-e^{-x}}{e^{-x}x^{-1}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^{-2}+e^{-x}}{-e^{-x}x^{-1} - e^{-x}x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^{-2}(1-x^2e^{-x})}{-x^{-2}(xe^{-x}+e^{-x})} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)(\ln x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x + \frac{(x-1)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$[1^\infty; 0^0; \infty^0]$: $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{\pi}arctgx)^x = [1^\infty] = \lim\limits_{x\to\infty} e^{ln(\frac{2}{\pi}arctgx)^x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} xln(\frac{2}{\pi}arctgx)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$

$$\lim_{x\to\infty} xln\left(\frac{2}{\pi}arctgx\right) = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\infty}\frac{ln(\frac{2}{\pi}arctgx)}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{2}{\pi}arctgx}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{arctgx}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2} = -\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 0} sinx^{tgx} = [0^0] = e^{\lim\limits_{x\to 0} tgxlnsinx} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} tgxlnsinx = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{lnsinx}{ctgx} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{cosx}{sinx}}{\frac{-1}{sin^2x}} = \lim_{x\to 0}(-sinxcosx) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x^2-1} = [\infty^0] = e^{\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)ln\frac{1}{x-1}} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)ln\frac{1}{x-1} = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 1^+}\frac{ln\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-1}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)^2}{2x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)^2}{2x} = 0$$

Zadanie:

1. Wylicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{shx}{x+e^x}$, c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx-sinx+1}{sin2x-cosx}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$
2. Wylicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} xarcctgx$, c) $\lim\limits_{x\to 1^-} lnxln(1-x)$, d) $\lim\limits_{x\to 2} tg(x^2-4)\, tg\frac{\pi}{x}$
3. Wylicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-2}-sin^{-2}x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}-lnx)$, c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\right)$
4. Wylicz granice: a) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{arctgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{lnx}}{(\ln x)^x}$

Np. znajdź asymptoty funkcji: $f(x) = x\ln(e+\frac{1}{x})$

$D_f: e+\frac{1}{x} > 0$

$(ex+1)x > 0$

$x \in (-\infty, -\frac{1}{e}) \cup (0, +\infty)$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{e}^-} x\ln(e+\frac{1}{x}) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(e+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

prosta x=$-\frac{1}{e}$ jest asymptotą pionową lewostronną, prosta x=0 nie jest asymptotą

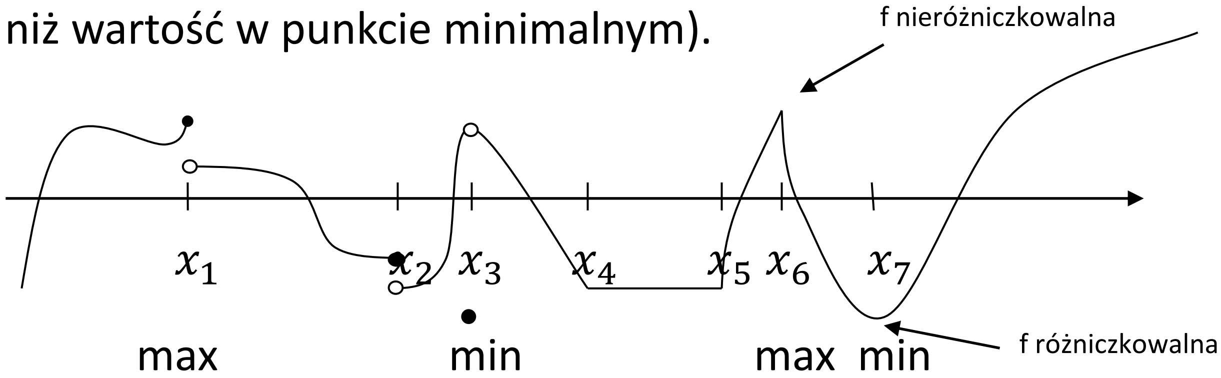
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x\ln(e+\frac{1}{x}) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(\ln(e+\frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(e+\frac{1}{x}) - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{e+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e}$$

prosta y=x+$\frac{1}{e}$ jest asymptotą ukośną obustronną

Def. Mówimy, że $x_0 \in D_f$ jest punktem maksimum lokalnego funkcji f $\Leftrightarrow$
$\exists\delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$: $f(x) < f(x_0)$ (w pewnym otoczeniu x_0 wszystkie wartości f są mniejsze niż wartość w punkcie maksymalnym).

Mówimy, że $x_0 \in D_f$ jest punktem minimum lokalnego funkcji f $\Leftrightarrow$
$\exists\delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$: $f(x) > f(x_0)$ (w pewnym otoczeniu x_0 wszystkie wartości f są większe niż wartość w punkcie minimalnym).



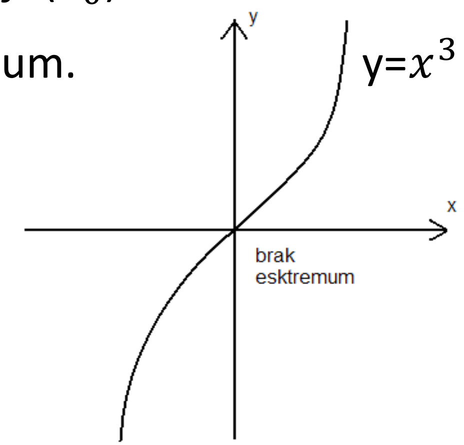
Uwaga: Nie wymagamy różniczkowalności, aby określić maksimum lub minimum lokalne.
Oznaczenie: Punkt, w którym *f* może przyjąć wartość ekstremalną nazywamy stacjonarnym.

Tw. Fermata (WK istnienia ekstremum)
Jeżeli ma pochodną w x_0 i x_0 jest punktem ekstremum funkcji *f* , to $f'(x_0)=0$

Uwaga: Tw. Fermata nie jest warunkiem wystarczającym na ekstremum.

Np. $f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ale $x_0 = 0$ nie jest punktem ekstremum *f*



Wniosek: Funkcja może przyjmować wartości ekstremalne w punktach zerowania się pierwszej pochodnej lub w punktach, w których pochodna nie istnieje.

Tw. I-szy warunek wystarczający na ekstremum
Jeżeli jest ciągłą w x_0 i rosnąca (malejąca) w $(x_0 - \delta, x_0)$ oraz malejąca (rosnąca) w $(x_0, x_0 + \delta)$ to w x_0 przyjmuje swoje maksimum (minimum).

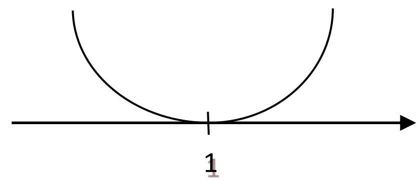
Wniosek: Funkcja różniczkowalna w otoczeniu x_0 przyjmuje w tym punkcie wartość maksymalną (minimalną) $\Leftrightarrow f'(x_0)=0$ i f' zmienia znak przy przejściu przez x_0 z „+” na „-” (z „-” na „+”).

Np. Wyznacz ekstrema

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$

$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

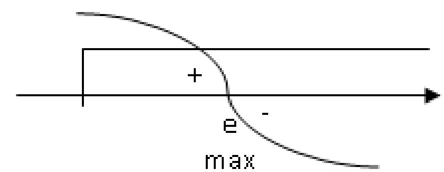
funkcja nie ma ekstremów



2. $f(x) = \frac{lnx}{x}$, $x>0$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot lnx}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f_{max}(e) = \frac{1}{e}$

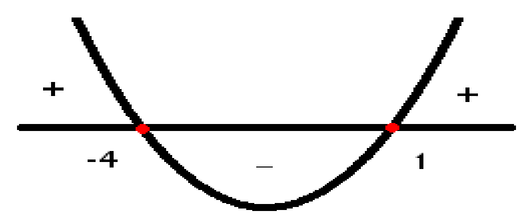


3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

D_f: $x^2 + 3x - 4 \geq 0$

$(x-1)(x+4) \geq 0$

$x \in (-\infty, -4\rangle \cup \langle 1, +\infty)$



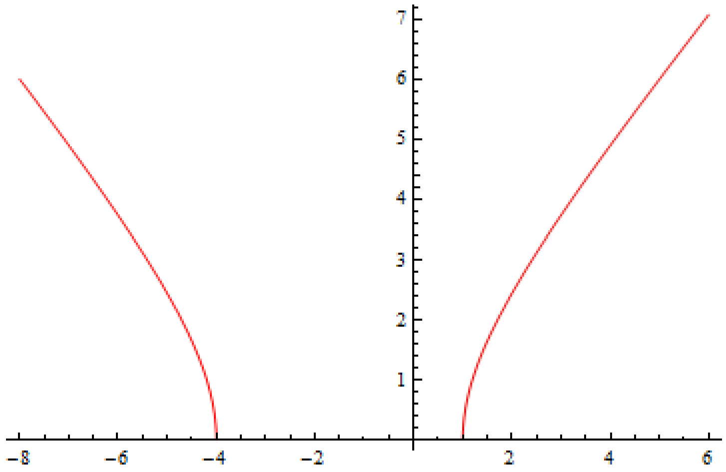
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x-4}} \cdot (2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2} \notin D_{f'} = (-\infty, -4) \cup (1, \infty)$$

Punkty stacjonarne: x=-4, x=1 ∈ $D_f \backslash D_{f'}$

$f_{min}(-4) = 0$, bo $\forall x \in (-\infty, -4]: f'(x) < 0$

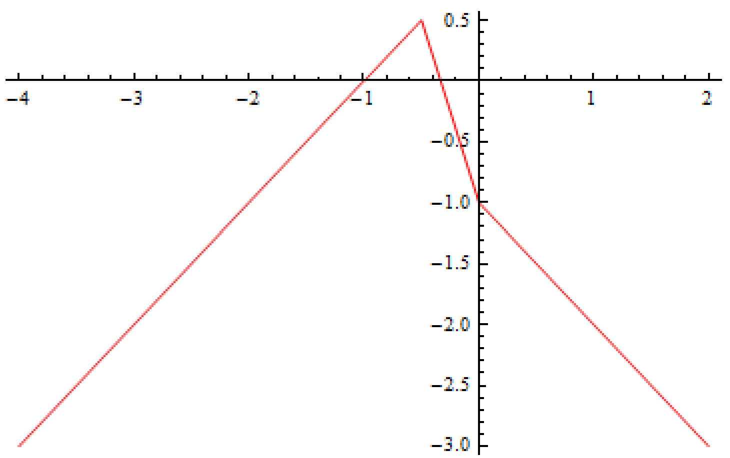
$f_{min}(1) = 0$, bo $\forall x \in [1, \infty): f'(x) > 0$



4. $f(x) = |x| - |2x+1|$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < -\frac{1}{2} \\ -3x-1, & -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -x-1, & 0 \leq x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < -\frac{1}{2} \\ -3, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ -1, & 0 < x \end{cases}$$



Nie ma punktu, w którym f'(x)=0

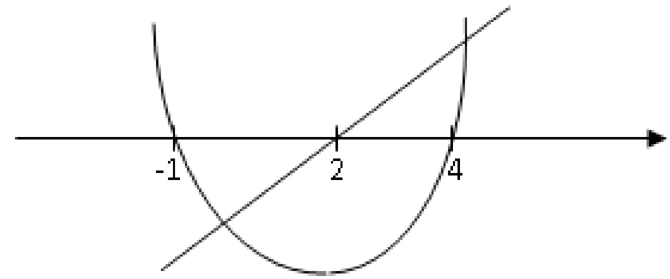
Punkty stacjonarne: $x = -\frac{1}{2}, x = 0$

$$f_{max}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

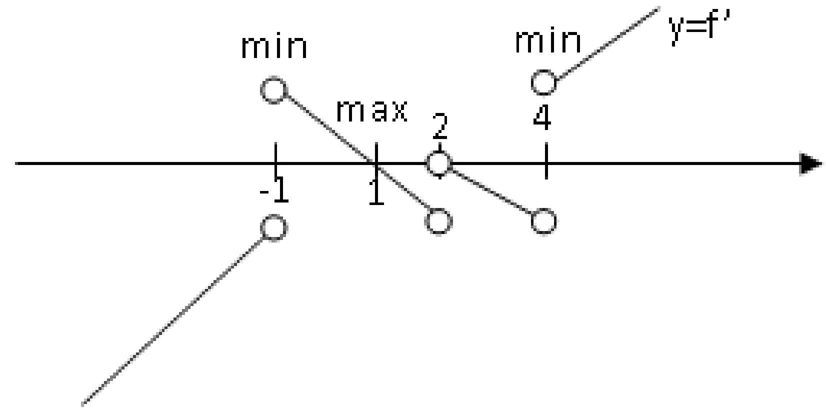
W x=0 nie ma ekstremum.

5. $f(x) = |x-2| + |x^2-3x-4|$

$$f(x) = \begin{cases} -x+2+x^2-3x-4, & x\epsilon(-\infty,-1) \\ -x+2-x^2+3x+4, & x\epsilon[-1,2) \\ x-2-x^2+3x+4, & x\epsilon[2,4) \\ x-2+x^2-3x-4, & x\epsilon[4,\infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2-4x-2, & x\epsilon(-\infty,-1) \\ -x^2+2x+6, & x\epsilon[-1,2) \\ -x^2+4x+2, & x\epsilon[2,4) \\ x^2-2x-6, & x\epsilon[4,\infty) \end{cases}$$

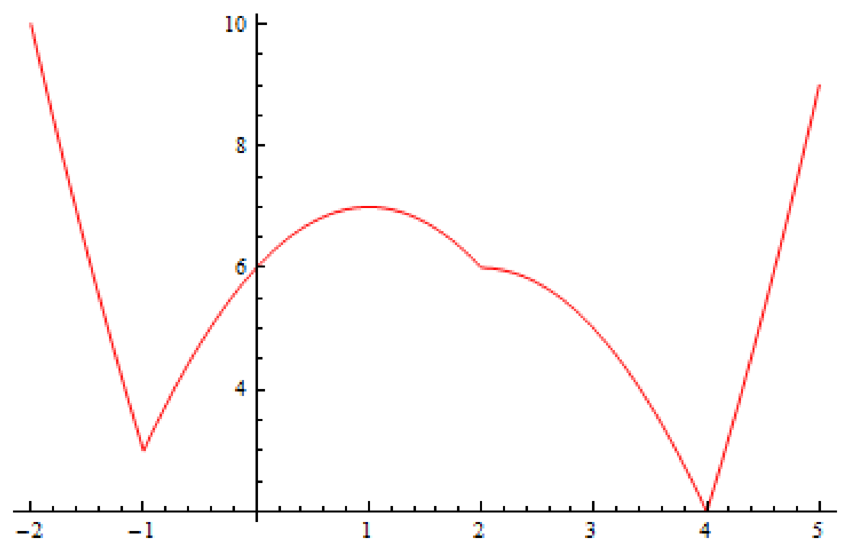


$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4, & x\epsilon(-\infty,-1) \\ -2x+2, & x\epsilon(-1,2) \\ -2x+4, & x\epsilon(2,4) \\ 2x-2, & x\epsilon(4,\infty) \end{cases}$$

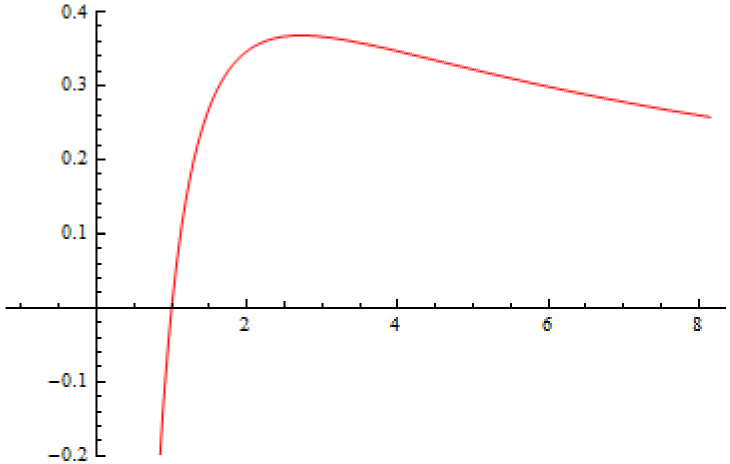
$f'(x) = 0$ dla $x = 1$

punkty stacjonarne : -1, 2, 4, 1

$f_{\min}(-1) = 3$
$f_{max}(1) = 7$
$f_{min}(4) = 2$



Tw. II-gi warunek wystarczający istnienia ekstremum
Jeżeli istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że f ma ciągłą pochodną rzędu $(2n)$ w punkcie x_0 oraz
$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{(2n)}(x_0) < 0$ $(f^{(2n)}(x_0) > 0)$,
to f ma w punkcie x_0 maksimum (minimum) lokalne.



Np. Wyznacz ekstrema

1. $f(x) = \frac{lnx}{x}$, D_f: x>0

$f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2} = 0 <=> x = e$

$f''(x) = \frac{-x-(1-lnx)2x}{x^4} = \frac{-3+2lnx}{x^3}$

$f''(e) = \frac{-3+2}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$ $\qquad fmax(e) = \frac{1}{e}$

2. $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$ $\qquad D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee \sqrt[3]{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

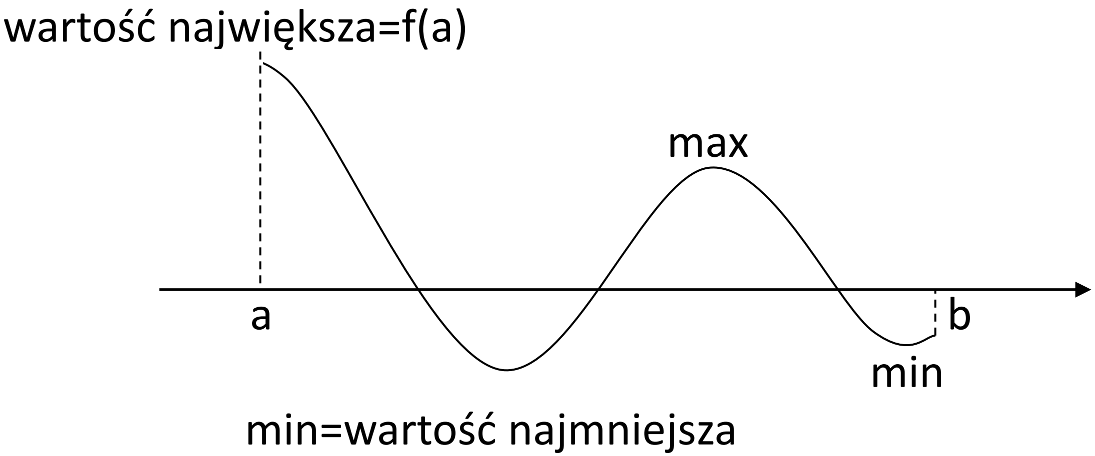
$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x}^5}$

$f''\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}^9}, f''\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}^9}$

$f_{max}(-\frac{1}{3\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$f_{min}(\frac{1}{3\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Wniosek: Funkcja ciągła w przedziale [a,b] może przyjąć swoją wartość największą i najmniejszą w punkcie stacjonarnym leżącym w [a,b] oraz na końcach przedziału.



Uwaga: Dla przedziału otwartego wyliczamy granice jednostronne zamiast wartości na końcach przedziału.

Np. Znajdź wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x) = cosx + \sqrt{3}sinx,\ \ x \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = -sinx + \sqrt{3}cosx = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\sqrt{3}}{2}cosx - \frac{1}{2}sinx = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{6} + x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

f(x) może przyjąć wartość największą (najmniejszą) w punktach: $\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\ wartość\ największa$$

$$f(0) = 1\ wartość\ najmniejsza$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Zadanie:

1. Wyznacz ekstrema: a) $f(x) = \frac{x}{1+x^4}$, b) $f(x) = e^{cosx} - cosx$, c) $f(x) = ln^2x - lnx^2$
2. Znajdź wartość największą i najmniejszą: a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2-1}$, $x \in [-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}]$

b) $f(x) = 2|1 - |1 - x^2||$-1, x ∈[-2,1] , c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$, x ∈[-2,2]