RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Elementarnym pojęciem w rachunku prawdopodobieństwa jest zdarzenie elementarne ω tzn. możliwy wynik pewnego doświadczenia

np. rzut monetą: wyrzucenie orła lub reszki

narodziny człowieka: urodzenie się chłopca lub dziewczynki

rzut kostką: wyrzucenie ścianki z odpowiednią liczbą oczek itp.

Def. Przestrzenią zdarzeń elementarnych nazywamy zbiór $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ składający się z wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych w danym doświadczeniu.

Zdarzeniem nazywamy dowolny podzbiór $A \subset \Omega$.

σ-algebrą zdarzeń w przestrzeni Ω nazywamy rodzinę (zbiór) zdarzeń $\mathcal{S}$ taki, że:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$
2. $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A' \in \mathcal{S}$
3. $\forall i \in \mathbb{N}$: $A_i \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_i A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots \in \mathcal{S}$ (suma może być skończona lub nie)

Wniosek: Jeżeli $\mathcal{S}$ jest σ-algebrą zdarzeń w przestrzeni Ω, to $\Omega \in \mathcal{S}$.

Oznaczenia: zdarzenie $\emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym

zdarzenie $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy zdarzeniem przeciwnym do A

zdarzenie Ω nazywamy zdarzeniem pewnym

Wniosek: Jeżeli $\forall i$: $A_i \in \mathcal{S}$, to $\bigcap_i A_i \in \mathcal{S}$

Np.

1. Robotnik wyprodukował n elementów pewnego urządzenia. Niech zdarzenie A_i polega na tym, że i-ty element jest wadliwy (i=1,…,n). Zapisz zdarzenia:

a) A-żaden z elementów nie jest wadliwy: A = $A_1{}' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n{}'$

b) B-co najmniej jeden element jest wadliwy: B = $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

c) C-tylko jeden element jest wadliwy: C = $\bigcup_{i=1}^{n} [A_i \cap \bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} A_k{}']$

d) D-co najwyżej jeden element nie jest wadliwy:

$$D = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup \bigcup_{i=1}^{n} [A_i{}' \cap \bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} A_k]$$

2. Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie dwa razy pod rząd na tę samą stronę. Opisz przestrzeń zdarzeń elementarnych oraz zdarzenia:

a) gra skończy się przed piątym rzutem

b) będzie potrzebna parzysta liczba rzutów

c) moneta nigdy nie upadnie pod rząd na tę samą stronę

Ω = $\{ (r_1, r_2, \dots, r_n): n \geq 2 \ \wedge \ r_i \in \{O, R\} \ \wedge \ r_{n-1} = r_n \ \wedge \ r_i \neq r_{i-1}, dla\ i < n \}$

A = {(O,O),(R,R),(O,R,R),(R,O,O),(R,O,R,R),(O,R,O,O)}

B = $\{(r_1, r_2, \dots, r_n): 2|n \ \wedge \ r_i \in \{O, R\} \ \wedge \ r_{n-1} = r_n \ \wedge \ r_i \neq r_{i-1}, dla\ i < n \}$

C = $\{(r_1, r_2, \dots, r_n, \dots): r_i \in \{O, R\} \ \wedge \ r_i \neq r_{i-1}, dla\ i \in \mathbb{N} \}$

Def. Mówimy, że zdarzenia A i B wykluczają się $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

Np. W doświadczeniu polegającym na wylosowaniu jednej karty z talii, zdarzenia A-wylosowanie króla i B-wylosowanie damy wykluczają się.

Def. Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{S}$ będzie σ-algebrą zdarzeń w Ω . Prawdopodobieństwem w przestrzeni Ω nazywamy funkcję P: $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

1. $\forall A \in \mathcal{S}: 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. jeżeli $\{A_i\}$ jest zbiorem zdarzeń parami się wykluczających (tzn. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$), to $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$

Wnioski: Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to

1. $P(A') = 1 - P(A)$
2. Jeżeli $B \subset A$, to $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Def. Trójkę $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Np. Doświadczenie polega na rzucie monetą.

$\Omega = \{O,R\}$, $\mathcal{S} = \{\emptyset,\{O\},\{R\},\Omega\}$, $P(O) = P(R) = \frac{1}{2}$

Trójka $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną dla tego doświadczenia.

Def. Mówimy, że zbiór zdarzeń $\{A_i\}$ jest niezależny $\Leftrightarrow$

$$\forall i_1, i_2, \dots, i_n: P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdot \dots \cdot P\left(A_{i_n}\right)$$

Np. W doświadczeniu polegającym na rzucie trzema monetami, jeżeli wiemy, że rzuty są od siebie niezależne prawdopodobieństwo zdarzenia A-wyrzucono trzy orły wynosi

$$P(A) = P(O_1)P(O_2)P(O_3) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$$

gdzie O_i - wyrzucenie orła na i-tej monecie

ELEMENTY KOMBINATORYKI

Większość doświadczeń, dla których obliczamy prawdopodobieństwo, ma bardzo dużo wyników. Wtedy do obliczenia prawdopodobieństwa należy użyć kombinatoryki. Wyróżniamy trzy podstawowe schematy kombinatoryczne: permutacje, wariacje i kombinacje. W kombinatoryce częste zastosowanie ma tzw. reguła iloczynu

Tw. **reguła iloczynu**
Jeżeli pewne doświadczenie można wykonać w k etapach, przy czym etap 1-szy można wykonać na n_1 sposobów, etap 2-gi na n_2 sposobów, …, etap k-ty na n_k sposobów, to całe doświadczenie można wykonać na $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ sposobów.

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$$

Def. **Permutacja bez powtórzeń**
Permutacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A={a_1, a_2, …, a_n} nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, w którym każdy element zbioru A występuje dokładnie raz.
Np. Permutacjami bez powtórzeń zbioru A={1,2,3} są ciągi (1,2,3), (2,1,3), (3,1,2) itd.
Tw. Liczba P_n wszystkich permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wynosi n!

$$P_n = \mathrm{n}!$$

Przykład: Na ile sposobów można ustawić 24 osoby w szereg tak, aby dane trzy osoby stały obok siebie?

Dane trzy osoby mogą stać obok siebie na 3! sposoby. Jeżeli potraktujemy je jako jedną osobę, to w szeregu można ustawić je na 22 sposoby. Pozostałe 21 osób można ustawić w szeregu na 21! sposobów. Stosujemy regułę iloczynu otrzymując

$$N = 22 \cdot 3! \cdot 21!$$

Def. **Permutacje z powtórzeniami**

Permutacją n-elementową z powtórzeniami zbioru k-elementowego A={a_1, a_2, …, a_k}, w której element a_1 powtarza się n_1 razy, element a_2 powtarza się n_2 razy, … , element a_k powtarza się n_k razy, przy czym $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, w którym poszczególne elementy zbioru A powtarzają się wskazana liczbę razy.

Tw. Liczba ${P_n}^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ wszystkich n-wyrazowych permutacji z powtórzeniami zbioru k-elementowego wynosi $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

$${P_n}^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Przykład: Na ile sposobów można z liter A, A, A, E, K, M, M, T, T, Y ułożyć słowo, niekoniecznie mające jakiekolwiek znaczenie?

Litera A powtarza się trzy razy, a litery M oraz T po dwa razy, czyli

$$N = \frac{10!}{3!\, 2!\, 2!}$$

Def. **Wariacja bez powtórzeń**
Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego A={a_1, a_2, …, a_n}, gdzie $k \leq n$, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg różnych elementów tego zbioru.
Np. Ciąg (7,2,5,4) jest czterowyrazową wariacją bez powtórzeń ze zbioru A={0,1,2,3,…,9}
Tw. Liczba V_n^k wszystkich k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wynosi $n^{[k]} = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

$$V_n^k = n^{[k]}$$

Przykład: Na ile sposobów można sześć z dziesięciu ponumerowanych kul wrzucić do sześciu szuflad tak, aby w każdej szufladzie znalazła się tylko jedna kula?

Stosujemy 6-cio wyrazową wariancję bez powtórzeń zbioru 10-cio elementowego

$$N = 10^{[6]} = \frac{10!}{4!}$$

Def. **Wariacja z powtórzeniami**
Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego A={a_1, a_2, …, a_n}, nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg elementów tego zbioru.
Np. Ciag (4,2,4,2,2) jest pięciowyrazową wariacją z powtórzeniami ze zbioru A={2,3,4}
Tw. Liczba W_n^k wszystkich k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego wynosi n^k.

$$W_n^k = n^k$$

Przykład: Centrala telefoniczna pracuje na numerach sześciocyfrowych. Ilu abonentów może zarejestrować, jeżeli numer nie może zaczynać się od zera?

Stosujemy sześciowyrazowe wariacje z powtórzeniami ze zbioru cyfr {0,1,…,9}, od których odejmujemy wariacje zaczynające się od cyfry 0

$$N = W_{10}^{6} - W_{10}^{5} = 10^6 - 10^5$$

Def. **Kombinacja bez powtórzeń**

Kombinację k-elementową bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego A={$a_1, a_2, \ldots, a_n$}, $k \leq n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

Np. Zbiór {2,4,6} jest trzyelementowa kombinacją ze zbioru A={0,1,2,…,9}

Tw. Liczba C_n^k wszystkich k-elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$C_n^k = \binom{n}{k}$$

Przykład: Na ile sposobów można wybrać 9 par szachowych spośród 20 szachistów z kraju A i 15 szachistów z kraju B, jeżeli w każdej parze mają być szachiści z różnych krajów?

Wybieramy po 9 szachistów z każdego kraju, ustawiamy szachistów z kraju A w szeregu i dobieramy dla nich partnerów z kraju B.

$$N = C_{20}^{9} \cdot C_{15}^{9} \cdot 9!$$

Def. **Kombinacja z powtórzeniami**

Rozważamy elementy n różnych rodzajów, przy czym elementy tego samego rodzaju traktujemy jako identyczne. Kombinacją k-elementową z powtórzeniami z n rodzajów elementów, nazywamy każdy k-elementowy zbiór, którego każdy element jest jednego z tych n rodzajów.

Kombinacja z powtórzeniami jest w pełni określona przez podanie liczby elementów poszczególnych rodzajów wchodzących w jej skład.

Tw. Liczba K_n^k wszystkich k-elementowych kombinacji z powtórzeniami z n rodzajów elementów wynosi $\binom{n+k-1}{k}$.

$$K_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Przykład: Na ile sposobów można ułożyć bukiet z pięciu kwiatów, mając 10 róż, 9 tulipanów i 7 żonkili?

Stosujemy pięcioelementową kombinację z powtórzeniami z 3 rodzajów elementów

$$N = K_3^5 = \binom{7}{3}$$

PRZYKŁADY OKREŚLANIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

I. Prawdopodobieństwo klasyczne

Niech $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, gdzie $A_i \in \mathcal{S}$, zbiór $\{A_i\}$ jest zbiorem zdarzeń parami wykluczających się o jednakowych prawdopodobieństwach $P(A_i) = \frac{1}{n}$.

Jeżeli $A = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}$, to prawdopodobieństwo A określamy jako $P(A) = \frac{k}{n}$.

Zdarzenia $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ nazywamy zdarzeniami sprzyjającymi zdarzeniu A.

Np.

1. Rzucamy kością do gry. Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia liczby oczek podzielnej przez 3

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest 6, zdarzeń sprzyjających A jest 2 $\Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Z urny, w której jest $m \geq 3$ kul białych i $n \geq 3$ kul czarnych, losujemy ze zwracaniem 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania 3 kul czarnych.

I wariant rozwiązania: Zdarzenia wylosowania kuli czarnej za kolejnym razem są niezależne.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej za jednym razem wynosi $\frac{n}{n+m}$. P(A) = $(\frac{n}{n+m})^3$.

II wariant: Ω = $\{(k_1, k_2, k_3)$: $k_i \in \{1, \dots, n+m\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = (n+m)^3$

A = $\{(k_1, k_2, k_3)$: $k_i \in \{1, \dots, n\}\}$, $\overline{\overline{A}} = n^3$

P(A) = $(\frac{n}{n+m})^3$.

3. Z urny, w której jest m≥3 kul białych i n≥3 kul czarnych, losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania 3 kul czarnych.

Ω = $\{\{k_1, k_2, k_3\}$: $k_i \in \{1, \dots, n+m\}\}$, $\overline{\overline{\Omega}} = \binom{n+m}{3}$

A = $\{\{k_1, k_2, k_3\}$: $k_i \in \{1, \dots, n\}\}$, $\overline{\overline{A}} = \binom{n}{3}$

P(A) =$\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+m)(n+m-1)(n+m-2)}$.

4. Losowo rozmieszczono n kul w n komórkach. Oblicz prawdopodobieństwo, że dokładnie jedna komórka jest pusta.

$$\overline{\overline{\Omega}} = n^n$$

dokładnie jedna komórka jest pusta jeżeli w jednej komórce są 2 kule, a w (n-2) komórkach po jednej kuli $\Rightarrow$ $\overline{\overline{A}} = \binom{n}{2} n!$

P(A) = $\frac{(n-1)n!}{2n^{n-1}}$

II. Prawdopodobieństwo geometryczne

Niech Ω będzie pewnym ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^k$, zdarzeniami z $\mathcal{S}$ będą podzbiory Ω mające miarę m(A) (np. dla k=1 mające długość, dla k=2 pole, dla k=3 objętość).

Prawdopodobieństwo zdarzenia A określamy wzorem P(A) = $\frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Np.

1. Na odcinku [0,1] umieszczamy losowo, tzn. zgodnie z prawdopodobieństwem geometrycznym oraz niezależnie, dwa punkty x i y, które dzielą ten odcinek na trzy odcinki. Oblicz prawdopodobieństwo, że można z tych odcinków zbudować trójkąt.

Punkty x,y można traktować jako współrzędne x i y punktu ω należącego do kwadratu o wierzchołkach (0,0), (0,1), (1,0), (1,1).

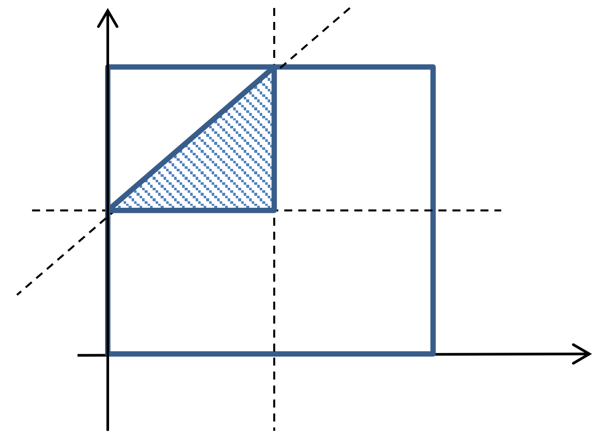
Kwadrat ten będzie teraz przestrzenią Ω.

m(Ω)=1.

Aby z odcinków można było zbudować trójkąt, każdy z nich musi być krótszy od $\frac{1}{2}$.

Dla x<y: $x<\frac{1}{2}$, $y-x<\frac{1}{2}$ i $1-y<\frac{1}{2}$

$m(A)=2\cdot\frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$



2. Losowo wybrano dwie dodatnie liczby x i y nie większe od 1. Oblicz prawdopodobieństwo, że ich suma jest nie większa niż 1, a iloczyn nie mniejszy niż 0,09.

$\Omega = [0,1]\times[0,1]$, m($\Omega$)=1

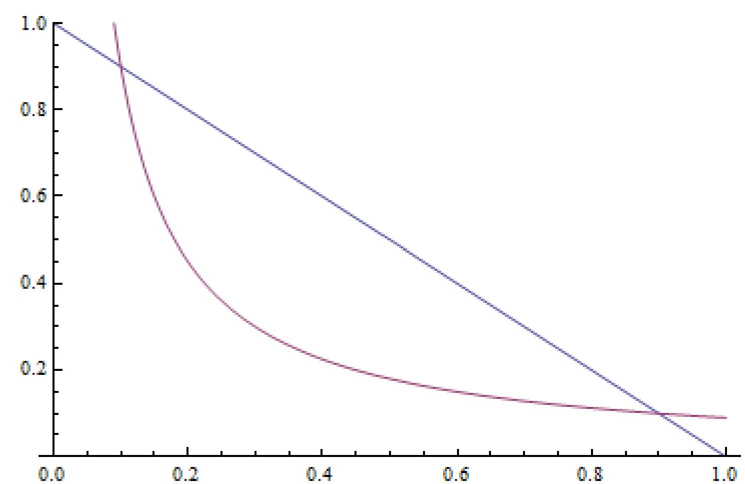
Zdarzenie A jest figurą zawartą pomiędzy wykresami

$y = 1 - x$ oraz $y = \frac{0{,}09}{x}$.

$x + \frac{0{,}09}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}1 \vee x = 0{,}9$

$m(A) = \int_{0{,}1}^{0{,}9}(1 - x - \frac{0{,}09}{x})dx = 0{,}4 - 0{,}09 ln9$

$P(A) = 0{,}4 - 0{,}09 ln9$



Def. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B dane jest wzorem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{dla } P(B) > 0$$

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A jest prawdopodobieństwem tego zdarzenia, w sytuacji, gdy zależy ono od dodatkowych warunków (zajścia zdarzenia B).

Wnioski:

1. Zdarzenia A i B są niezależne $\Leftrightarrow$ P(A) = P(A|B), gdy P(B)>0.
2. Jeżeli $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną, $B \in \mathcal{S}$ i P(B)>0, to $(\Omega, \mathcal{S}, P(\,.\, |B))$ jest przestrzenią probabilistyczną (tzn. prawdopodobieństwo warunkowe spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa)

Np. Dane są dwie urny, w pierwszej są 2 czarne i 1 biała kula, a w drugiej 2 białe i 1 czarna. Z pierwszej urny losujemy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a z drugiej z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągniemy czarną kulę z drugiej urny.

Niech A-wylosowanie kuli czarnej, B-wylosowanie urny drugiej.

$P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{4}$

Tw. wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zbiór $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{S}$ jest zbiorem zdarzeń parami wykluczających się i $\sum_i P(A_i) = 1$, to

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i), \text{dla } B \in \mathcal{S}$$

Tw. wzór Bayesa

Jeżeli zbiór $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{S}$ jest zbiorem zdarzeń parami wykluczających się i $\sum_i P(A_i) = 1$ oraz P(B)>0, to $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$.

Np.

1. Na taśmę trafiają wyroby wytwarzane przez dwa automaty. Stosunek ilościowy produkcji pierwszego automatu do produkcji drugiego wynosi 3:2. Pierwszy automat wytwarza 65% produktów pierwszej jakości, a drugi 85%. Z taśmy wybieramy jeden produkt. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie to produkt pierwszej jakości.

A_i-wybrany produkt jest wyprodukowany przez i-ty automat, A-wybrany produkt jest pierwszej jakości

$P(A_1) + P(A_2) = 1$ i $\frac{P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{3}{2} \Rightarrow P(A_1) = \frac{3}{5}$ i $P(A_2) = \frac{2}{5}$

$P(A) = P(A_1)\, P(A|A_1) + P(A_2)\, P(A|A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{65}{100} + \frac{2}{5} \cdot \frac{85}{100} = \frac{73}{100}$

2. Jeżeli produkt ma defekt, to automat wykrywa go w 90% przypadków, jeżeli nie ma defektu, to mimo to automat informuje o defekcie w 1% przypadków. W partii jest 2% produktów mających defekt. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany produkt wykryty jako uszkodzony, jest rzeczywiście uszkodzony.

A-produkt jest uszkodzony, B-automat wykrył uszkodzenie

$P(A) = 0{,}02$; $P(B|A) = 0{,}9$; $P(B|A') = 0{,}01$

$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}02}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')} = \frac{0{,}018}{0{,}018+0{,}01 \cdot 0{,}98} = 0{,}6474$