Najczęściej spotykane rozkłady dyskretne:

I. Rozkład dwupunktowy:

Def. Zmienna X ma rozkład dwupunktowy ⇔ z prawdopodobieństwem 1 przyjmuje tylko dwie wartości, tzn. P(X = x_1) = p i P(X = x_2) = 1 – p = q

$$EX = x_1 p + x_2 q, m_k = (x_1)^k p + (x_2)^k q$$

np. rozkład zero-jedynkowy: P(X = 1) = p i P(X = 0) = 1 – p = q

Zdarzenie $\{X = 1\}$ nazywamy sukcesem, a $\{X = 0\}$ porażką

EX=p, m_k=p, $D^2X = pq, c_k = p\left(1 - p^{k-1}\right) = pq \sum_{i=0}^{k-2} p^i, \sigma = \sqrt{pq}$

Przykład:

1. jednokrotny rzut monetą: niech sukcesem będzie wyrzucenie orła, to P(X = 1) = $\frac{1}{2}$, P(X = 0) = $\frac{1}{2}$
2. jednokrotny rzut kostką: niech sukcesem będzie wyrzucenie „6”, to P(X = 1) = $\frac{1}{6}$, P(X = 0) = $\frac{5}{6}$

II. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego)

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie zero-jedynkowym i niech

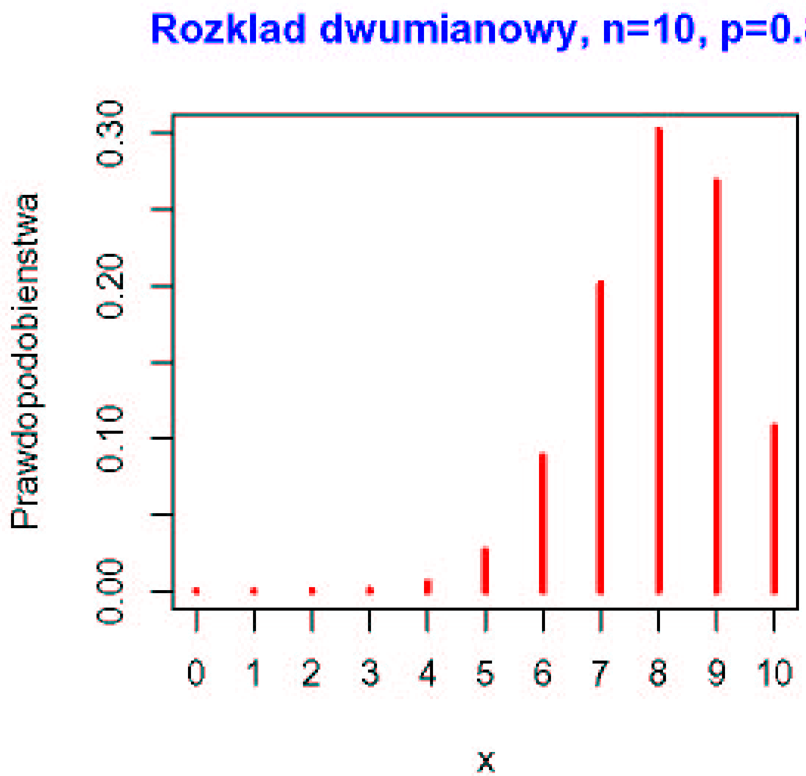
$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

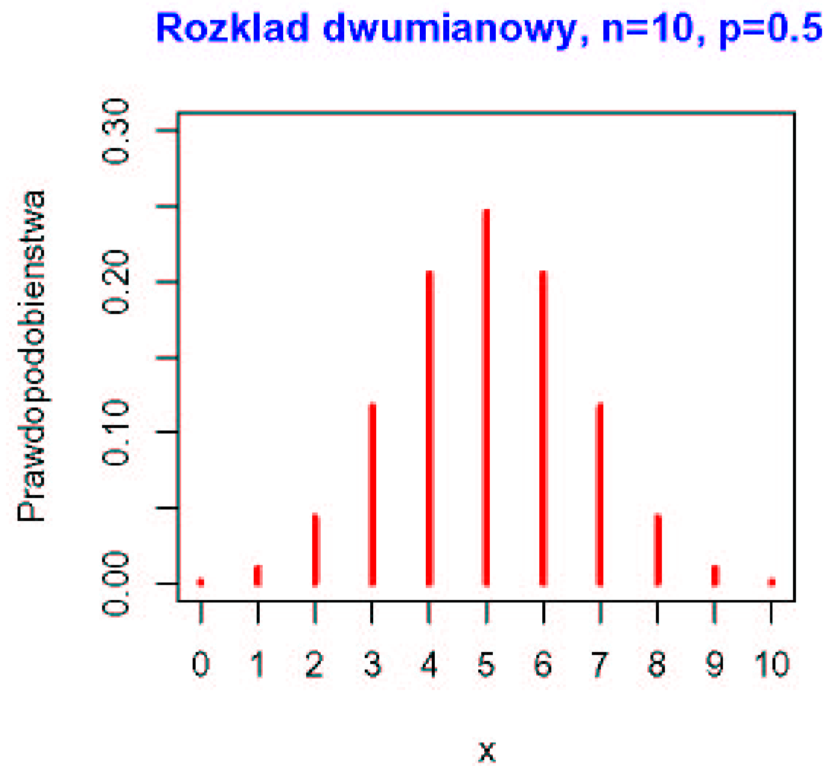
EX = np, $D^2X = npq, \sigma = \sqrt{npq}$

Jeżeli P(X = k) = p_k, to p_k jest prawdopodobieństwem zdarzenia, że dokładnie k zmiennych spośród X_i przyjmie wartość 1 ⇒ $p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Zmienne X_i nazywamy próbami Bernoulliego, a prawdopodobieństwo p_k prawdopodobieństwem k sukcesów w n próbach Bernoulliego.

Def. Zmienna X ma rozkład dwumianowy ⇔ P(X = k) = $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, 0 ≤ k ≤ n.





Przykład:

1. W pewnym gatunku zwierząt prawdopodobieństwo urodzenia osobnika płci męskiej wynosi 0,6. Oblicz prawdopodobieństwo, że w miocie, w którym urodziło się pięcioro młodych będą co najmniej cztery osobniki męskie.

P(A) $= \binom{5}{4} 0{,}6^4 0{,}4^1 + \binom{5}{5} 0{,}6^5 0{,}4^0 = 0{,}6^4 \cdot 2{,}6$

2. Załóżmy, że prawdziwa jest hipoteza Mendla, iż dla krzyżówki grochu w drugim pokoleniu stosunek nasion żółtych do zielonych jest jak 3 : 1. Wylosowano dziesięć nasion. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie co najwyżej siedem nasion żółtych.

P(A) $= 1 - \binom{10}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^8\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \binom{10}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^9\left(\frac{1}{4}\right)^1 - \binom{10}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8 \left[\frac{45}{16} + \frac{30}{16} + \frac{9}{16}\right]$

III. Rozkład hipergeometryczny

Z populacji liczącej N elementów pobieramy n-elementową próbkę ($n \le N$). Wiadomo, że w populacji m elementów ma cechę A, a reszta cechę B. Szukamy prawdopodobieństwa, że dokładnie k elementów w próbce ma cechę A ($k \le \min\{n,m\}$).

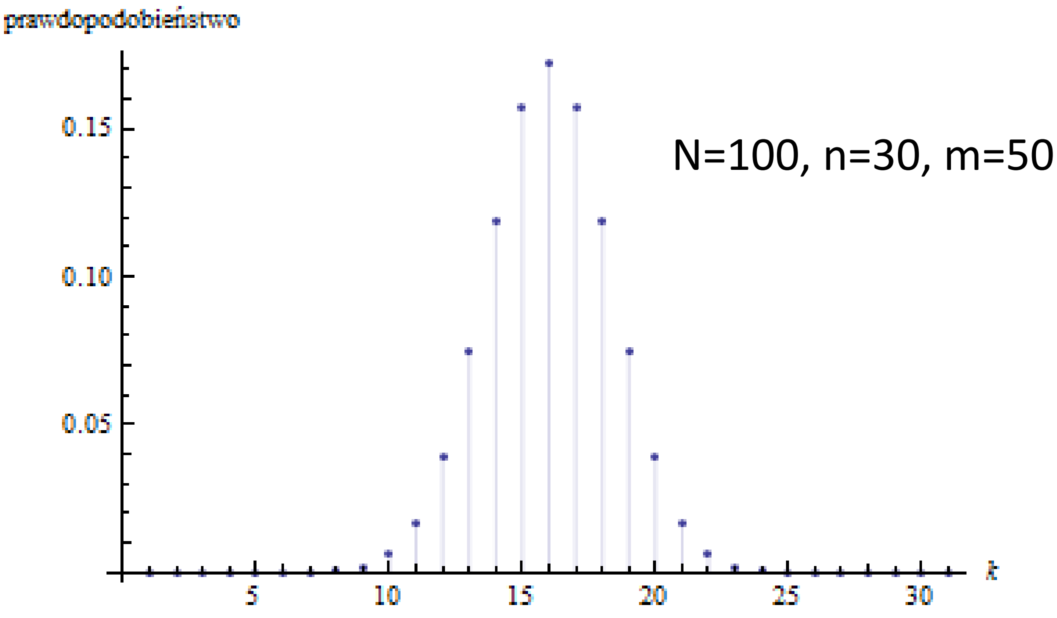
$$P(A) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

Def. Zmienna X ma rozkład hipergeometryczny $\Leftrightarrow P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $0 \le n \le N$,

$\max\{0, n+m-N\} \le k \le \min\{n,m\}$

$$EX = \frac{nm}{N}$$

$$D^2X = \frac{nm(1-\frac{m}{N})(N-n)}{N(N-1)}$$



Np.

1. W urnie znajduje się 5 kul białych i 3 czarne. Oblicz prawdopodobieństwo, że losując 4 kule wyciągniemy 2 kule białe i 2 czarne.

P(A) = $\frac{\binom{5}{2}\binom{8-5}{4-2}}{\binom{8}{4}} = \frac{3}{7}$

2. W grze polegającej na skreślaniu 6 spośród 49 liczb umieszczonych na karcie, oblicz prawdopodobieństwo skreślenia 5 poprawnych liczb.

P(A) = $\frac{\binom{6}{5}\binom{49-6}{6-5}}{\binom{49}{6}} = \frac{43}{22\cdot46\cdot47\cdot49}$

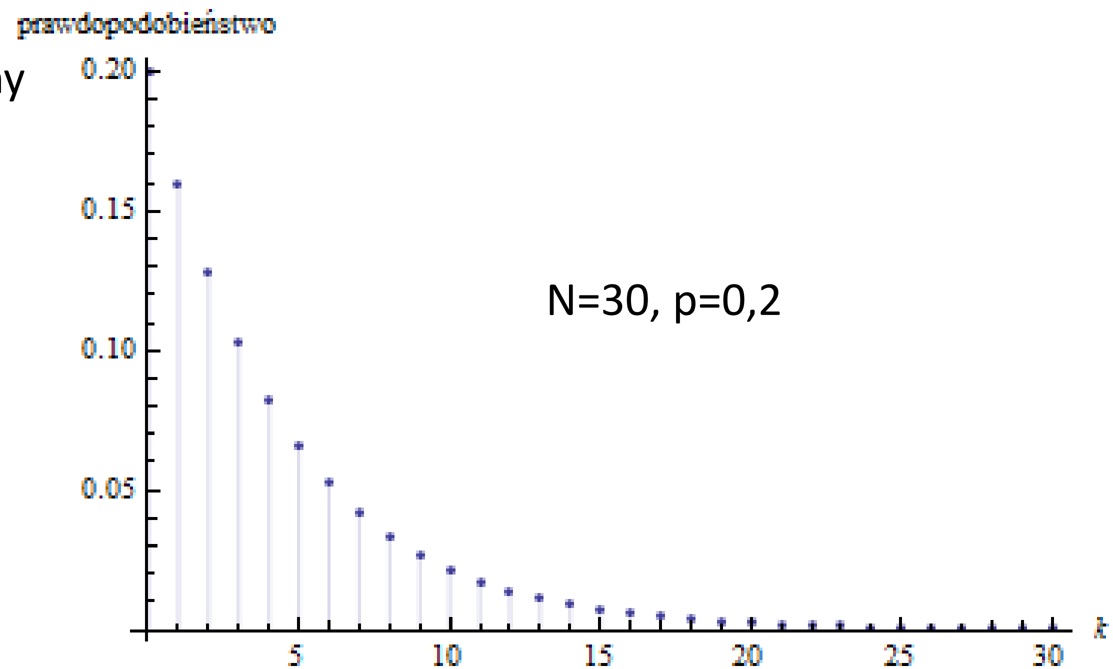
IV. Rozkład geometryczny

Rozkład geometryczny jest rozkładem opisującym prawdopodobieństwo zdarzenia, że proces Bernoulliego odniesie pierwszy sukces dokładnie w *k*-tej próbie (k ≥ 1) z prawdopodobieństwem sukcesu p.

Def. Zmienna X ma rozkład geometryczny $\Leftrightarrow$ P(X = k) = $(1-p)^{k-1}p$

EX = $\frac{1}{p}$

$$D^2X = \frac{1-p}{p^2}$$



N=30, p=0,2

Np.

1. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy 10-krotnym rzucie monetą orzeł zostanie wyrzucony w 4-tym rzucie.

P(A) = $(\frac{1}{2})^5$

2. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy 12-krotnym rzucie kostką „4” zostanie wyrzucona w 5-tym lub 8-mym rzucie.

P(A) = $(\frac{5}{6})^4\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^7\frac{1}{6}$

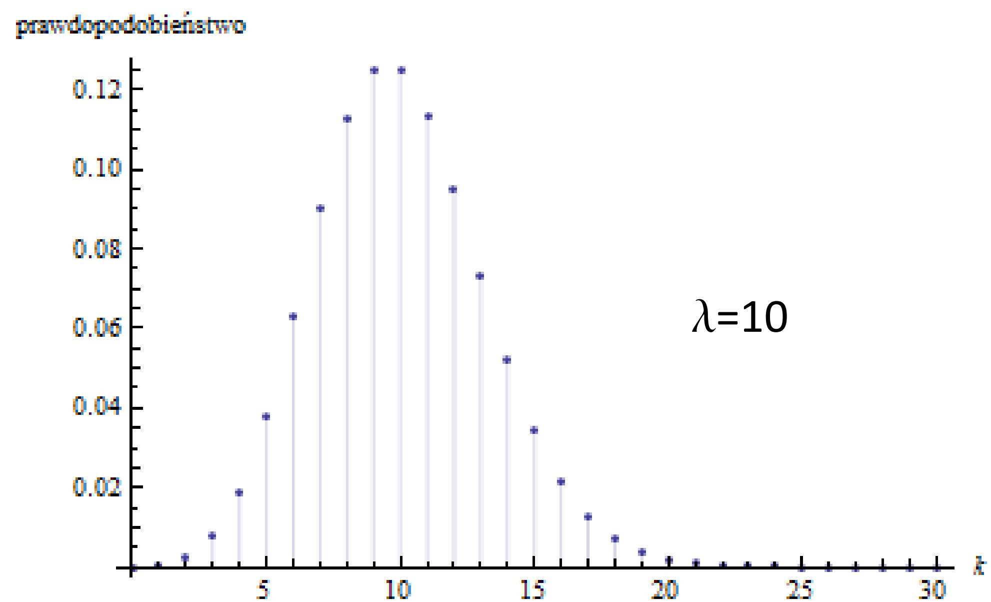
V. Rozkład Poissona

Def. Zmienna losowa X przyjmująca wartości naturalne ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda \Leftrightarrow$

P(X = k) = $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, k=0,1,…

EX = λ,

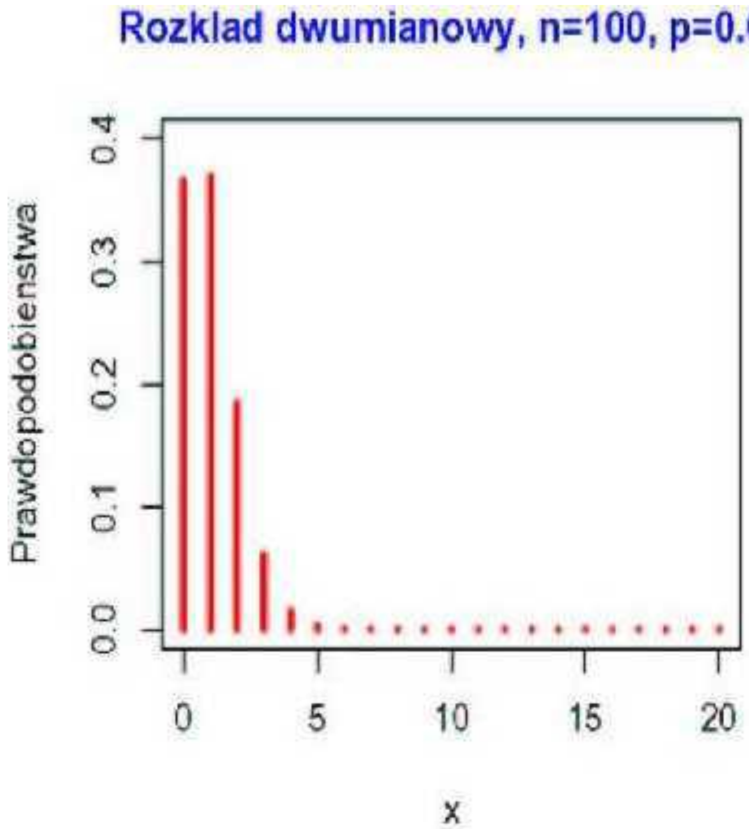
$D^2X = \lambda$

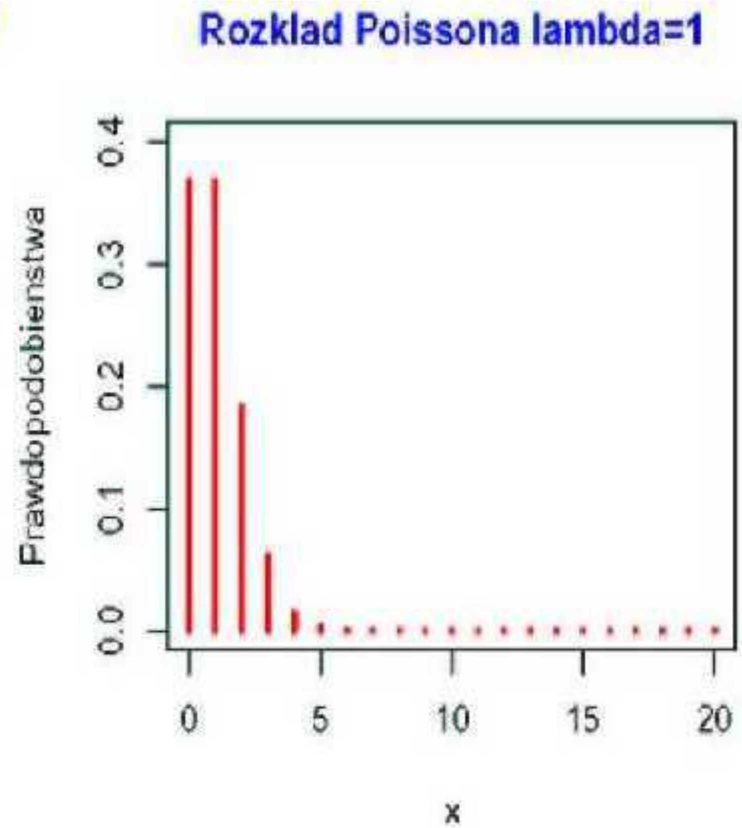


Tw.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$, to $\forall k \geq 0$: $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Rozkład Poissona daje dobre przybliżenie wartości rozkładu dwumianowego, gdy n jest dostatecznie duże (n≥100), a p małe (p≤0,1) oraz λ≈np.





Np.

1. W 100 próbach Bernoulliego prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p = 0,98. Oblicz prawdopodobieństwo, że poniesiemy co najwyżej jedną porażkę.

prawdopodobieństwo porażki wynosi q = 0,02 i przyjmijmy λ = nq = 2

P(A) = P(X = 0) + P(X = 1) $\approx e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}\right)=\frac{3}{e^2}$

2. Prawdopodobieństwo przesłania błędnego bitu wynosi 2,5· 10^9 niezależnie od pozostałych. Przesyłamy 10^8 bitów i na końcu dodajemy bit parzystości. Błędny ciąg odbierzemy jako poprawny, gdy przekłamaniu ulegnie parzysta liczba bitów. Oblicz prawdopodobieństwo odebrania błędnego ciągu jako poprawnego.

ciąg błędny zostanie odebrany jako poprawny, jeżeli przekłamaniu ulegną 2,4,6,… bity
weźmy λ = 0,25

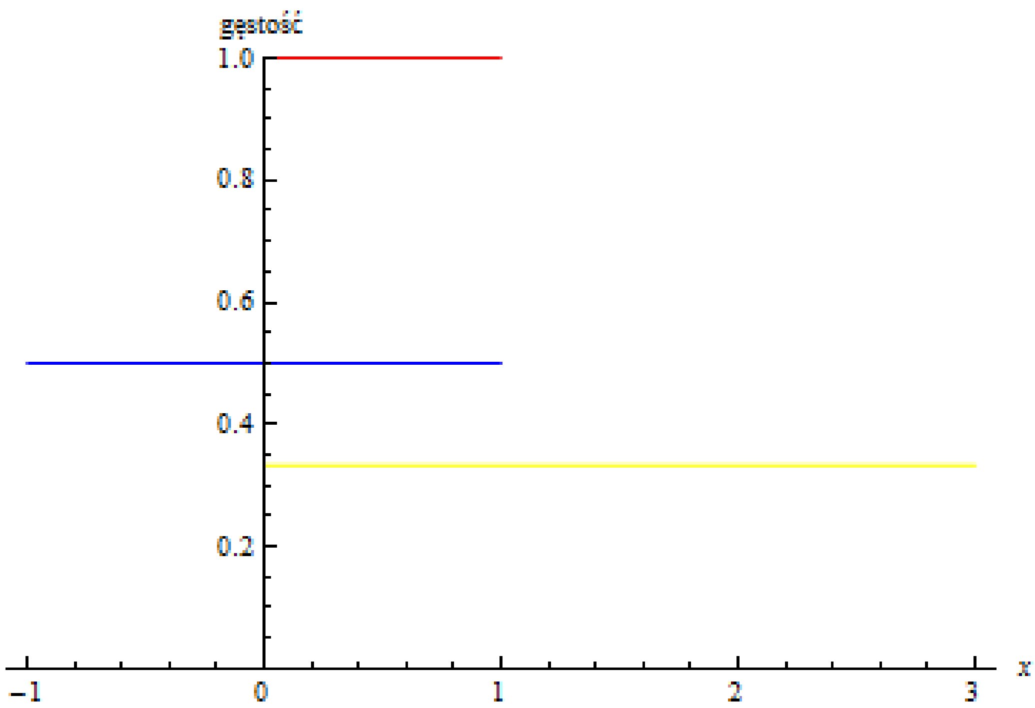
P(A) = $\sum_{k=1}^{10^4} P(X=2k) \approx \sum_{k=1}^{10^4} e^{-0,25}\frac{(0,25)^{2k}}{(2k)!} \approx e^{-0,25}\frac{(0,25)^2}{2!} = 0.0243375$

ponieważ $e^{-0,25}\frac{(0,25)^4}{4!} = 0.000126758$

Najczęściej spotykane rozkłady ciągłe:

I. Rozkład jednostajny (prostokątny)

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład jednostajny $\Leftrightarrow$ gęstość X ma postać



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, x \in (a,b) \\ 1, \quad x \ge b \end{cases}$$

EX = $\frac{b+a}{2}$,

$D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}$,

$$m_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(b-a)(k+1)},$$

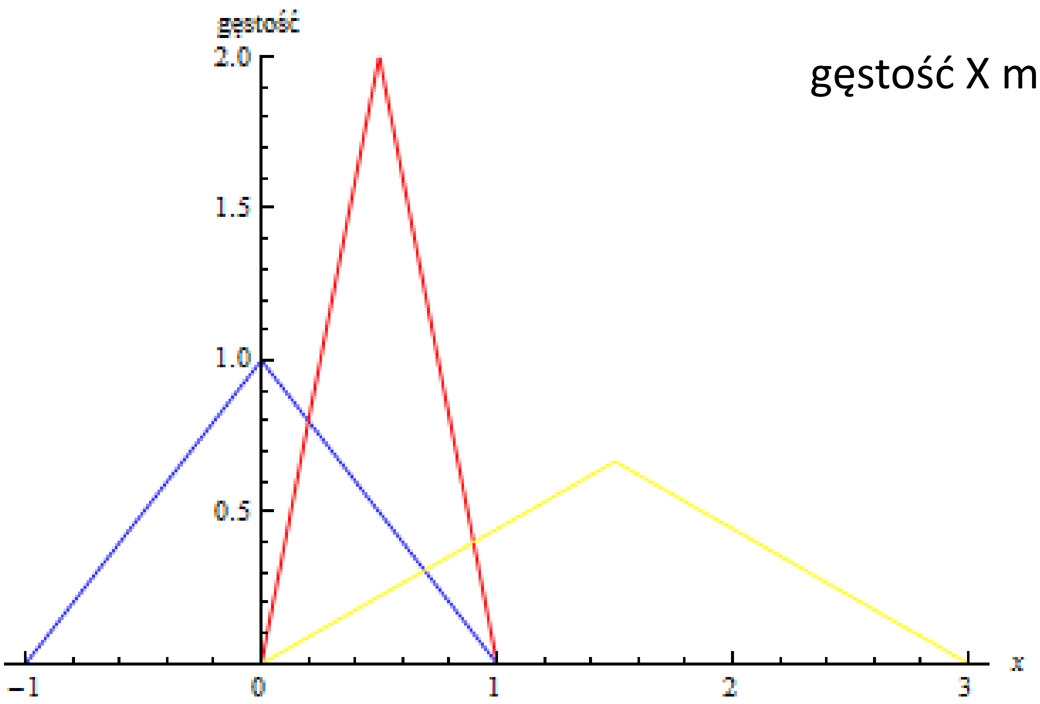
$$c_k = \begin{cases} 0, k - \text{nieparzyste} \\ \frac{(b-a)^k}{(k+1)2^k}, k - \text{parzyste} \end{cases}$$

Uwaga: Jeżeli zmienna X ma rozkład jednostajny na [0,1], to zmienna Y = (b-a)X + a ma rozkład jednostajny na [a,b]

II. Rozkład trójkątny

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład trójkątny w przedziale [a,b] ⇔

gęstość X ma postać $f(x) = \begin{cases} \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, x \in (\frac{a+b}{2}, b] \\ 0, \quad x \notin [a,b] \end{cases}$



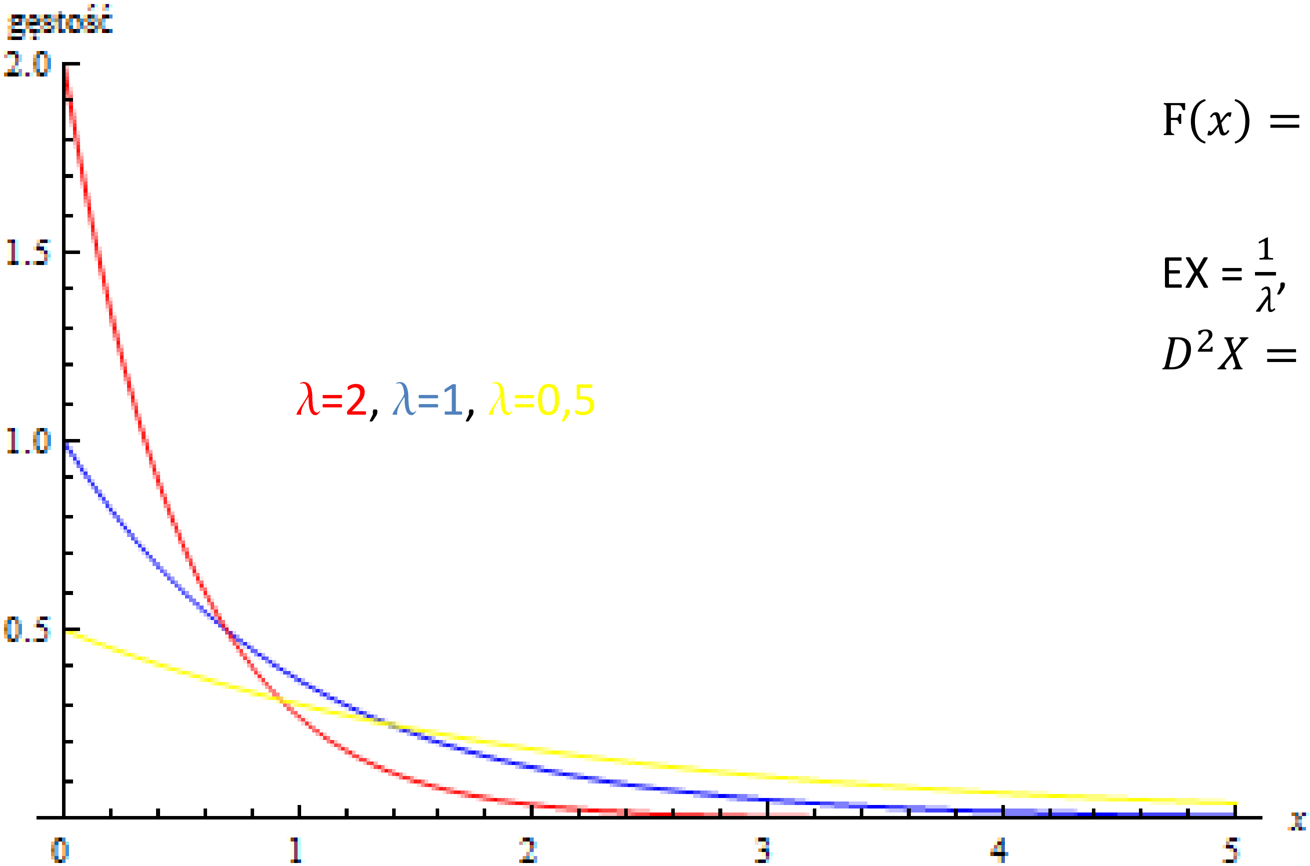
$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le a \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, x \in (a, \frac{a+b}{2}] \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, x \in (\frac{a+b}{2}, b) \\ 1, \quad x \ge b \end{cases}$$

EX = $\frac{a+b}{2}$,

$$D^2X = \frac{1}{24}(b-a)^2$$

III. Rozkład wykładniczy

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0 \Leftrightarrow$ gęstość X ma postać $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$



λ=2, λ=1, λ=0,5

$$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

EX = $\frac{1}{\lambda}$,

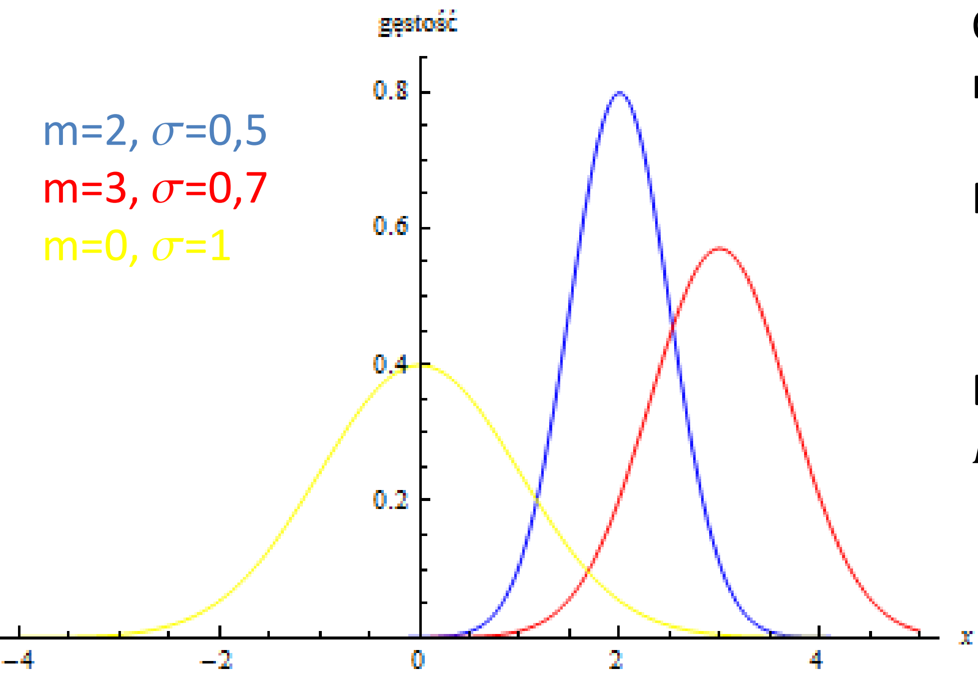
$$D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$$

Tw.
Jeżeli X jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, to P(X > x + x_0 | X >x_0) = P(X > x).
Własność ta nazywana jest brakiem pamięci rozkładu wykładniczego.

Np. Jeżeli zmienna losowa X o rozkładzie wykładniczym jest czasem pracy pewnego elementu, gdzie parametr λ jest intensywnością uszkodzeń tego elementu, to prawdopodobieństwo uszkodzenia w czasie x od chwili obecnej x_0 nie zależy od dotychczas przepracowanego czasu x_0.

IV. Rozkład normalny

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład normalny z parametrami m $\in \mathbb{R}$ i σ>0$\Leftrightarrow$
gęstość zmiennej X ma postać $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, x $\in \mathbb{R}$



Oznaczenia:
rozkład normalny z parametrami m i σ oznaczamy N(m,σ)
N(0,1) jest rozkładem normalnym standaryzowanym

EX = m,
$D^2X = \sigma^2$

Uwaga:

1. Jeżeli zmienna X ma rozkład normalny standaryzowany X~N(0,1), to zmienna Y = σX + m ma rozkład normalny z parametrami m oraz σ Y ~ N(m,σ).
2. Dystrybuanta rozkładu normalnego N(m,σ) nie jest funkcją elementarną, a wartości dystrybuanty Φ rozkładu N(0,1) są stablicowane

Np. Oblicz moment centralny rzędu 4 dla rozkładu normalnego N(m,σ)

$$E(X-EX)^4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^4 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left|\begin{matrix} t = \dfrac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma dt \end{matrix}\right| = \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left|\begin{matrix} t^3 & 3t^2 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix}\right| = -t^3 e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 3\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} t & 1 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{matrix}\right| = 3\left[-t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} du\right] = 3\sqrt{2\pi}$$

$$E(X-EX)^4 = 3\sigma^4$$

tablica wartości dystrybuanty Φ(z) rozkładu normalnego N(0,1)

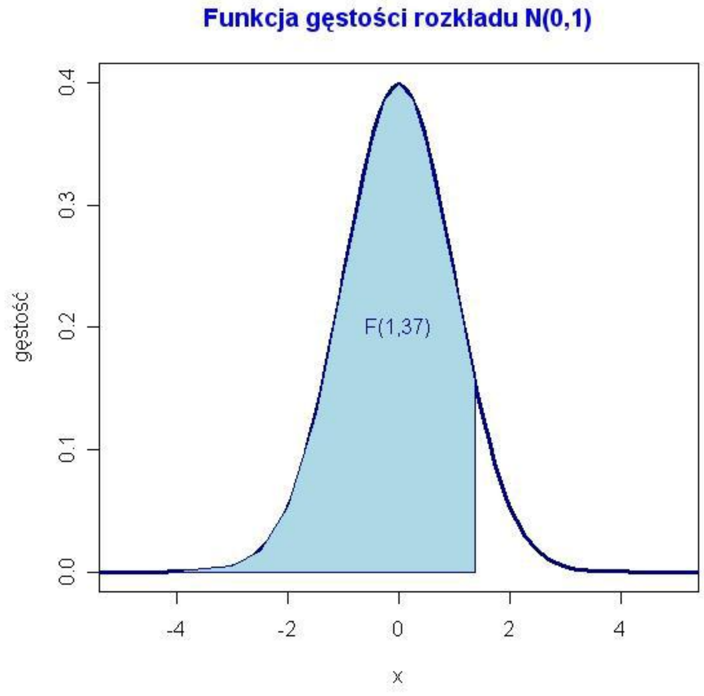
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5797	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990

Wniosek:

1. Funkcja gęstości rozkładu normalnego $N(m,\sigma)$ przyjmuje zawsze wartości nieujemne, a całkowite pole pod krzywą gęstości jest równe 1.
2. Krzywa gęstości normalnej zmiennej losowej X jest symetryczna względem prostej prostopadłej do osi OX przechodzącej przez punkt x = m. Pola pod krzywą gęstości na lewo i na prawo od punktu m są równe $\frac{1}{2}$
3. Dla dystrybuanty rozkładu N(0,1) zachodzi $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Np.

1. Załóżmy, że iloraz inteligencji w populacji dorosłej części ludzkości ma rozkład zbliżony do normalnego ze średnią m = 100. Wtedy połowa ludzkości jest mądrzejsza od osoby przeciętnie mądrej.



2. Jeżeli $X \sim N(0,1)$, to bezpośrednio z tablicy

$P(X < 1,37) = \Phi(1,37) = 0,9147$

$P(X \geq 1,37) = 1 - P(X < 1,37) = \Phi(-1,37) = 0,0853$

$P(|X| < 1,37) = P(-1,37 < X < 1,37) =$

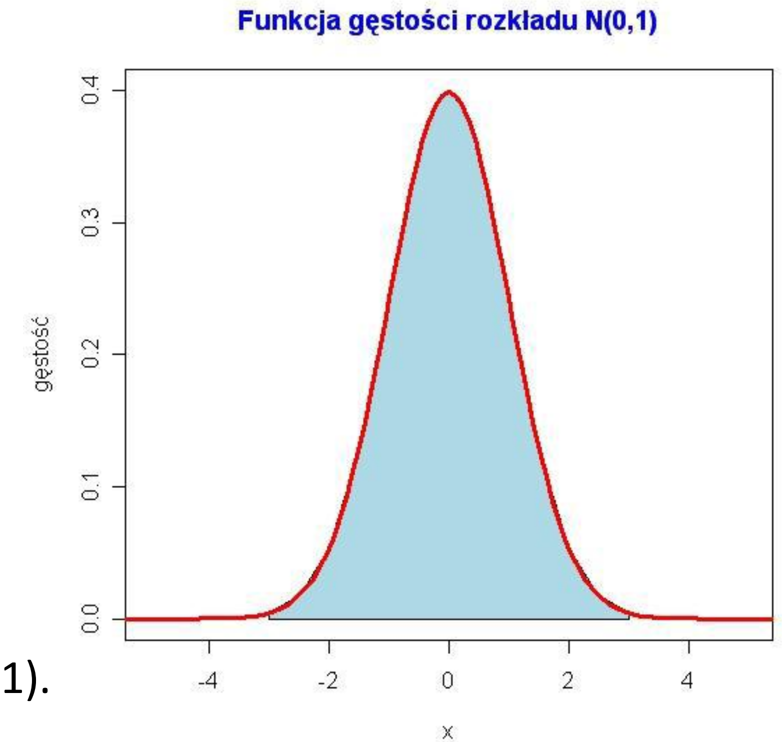
$= P(X < 1,37) - P(X \leq -1,37) = \Phi(1,37) - \Phi(-1,37) =$

$= \Phi(1,37) - (1 - \Phi(1,37)) = 0,8294$

Tw. reguła 3-sigmowa

Jeżeli zmienna X ma rozkład normalny N(m,σ), to P(|X-m| > 3σ) < 0,01.

Wniosek: P(X $\in$ (m-3σ,m+3σ)) > 0,99



Np. Jeżeli X ma rozkład normalny N(0,1), to

1. P(|X| <3) = P(- 3 <X < 3) = Φ(3) - Φ(- 3) = =0,9987 - (1 – 0,9987) = 0,9974
2. kwantyl rzędu 0,9
   P(X < $\xi_{0,9}$) = 0,9

z tablicy odczytujemy, że $\xi_{0,9}$ = 1,28.

Tw. o standaryzacji

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład N(m,σ),

to zmienna losowa: Y = $\frac{X-m}{\sigma}$ma rozkład normalny N(0,1).

Np.

1. Jeżeli X ma rozkład normalny N(10,2) oblicz P(X < 8) = P($\frac{X-10}{2}$<$\frac{8-10}{2}$) = P(Y < - 1) = Φ(- 1) = 1 - Φ(1) = 0,8413
2. Wiadomo, że zysk (w zł) z pewnego przedsięwzięcia ma rozkład normalny N(80,45).

Oblicz prawdopodobieństwo, że inwestując w dane przedsięwzięcie, poniesiemy stratę.

niech zmienna X oznacza zysk z przedsięwzięcia, prawdopodobieństwo poniesienia straty oznacza prawdopodobieństwo, że zysk będzie ujemny.

P(X < 0)=P($\frac{X-80}{45} < -1{,}78$) = Φ(- 1,78) = 1 - Φ(1,78) = 0,0375

V. Rozkład lognormalny

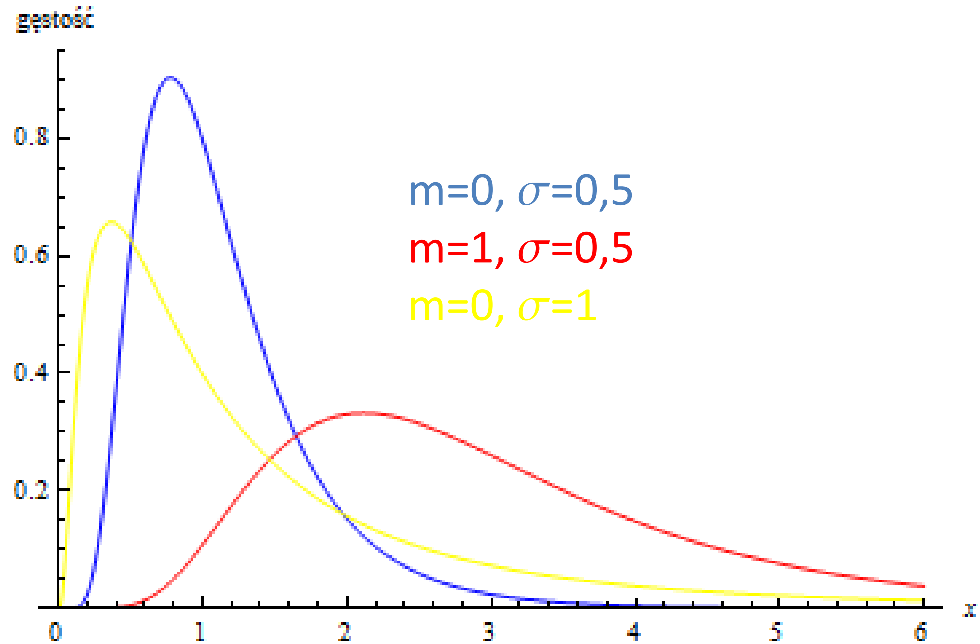
Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład lognormalny z parametrami m $\in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$

$\Leftrightarrow$ gęstość X ma postać $f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(lnx-m)^2}{2\sigma^2}}$, x $\in \mathbb{R}_+$

Uwaga: Zmienna X ma rozkład lognormalny z parametrami m i $\sigma \Leftrightarrow$ lnX ma rozkład N(m,σ)

EX = $e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$,

$D^2\mathrm{X} = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$



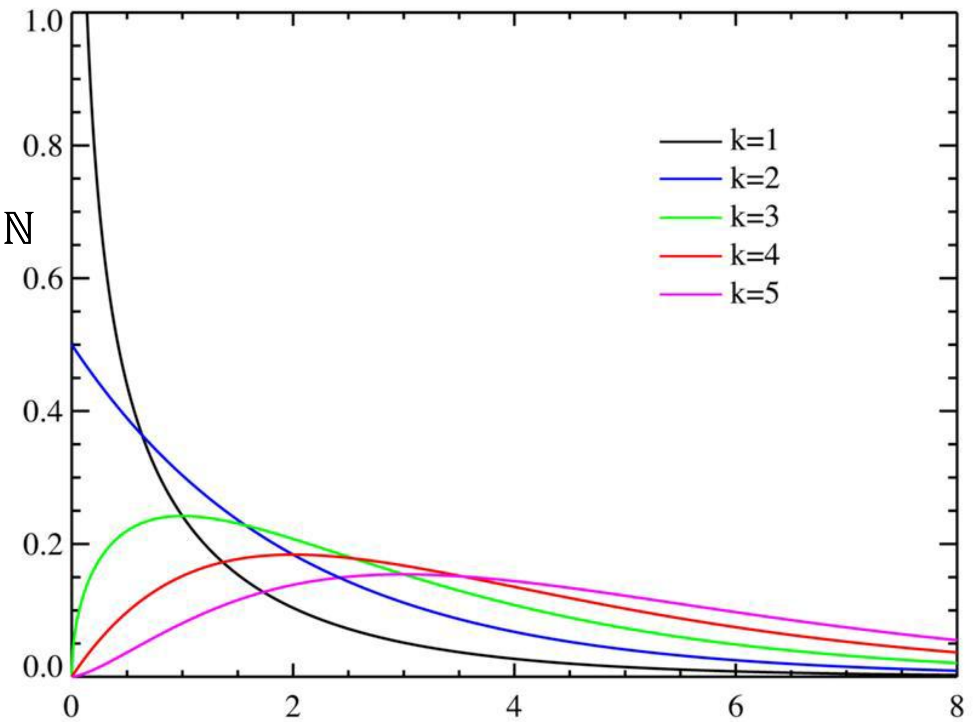
VI. Rozkład chi-kwadrat

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład chi-kwadrat o k stopniach swobody $\Leftrightarrow$ X jest sumą kwadratów k niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_k$ o rozkładzie normalnym N(0,1), tzn. $X = \sum_{i=1}^{k}(X_i)^2$

Funkcja gęstości rozkładu chi-kwadrat zależy od nieelementarnej funkcji Γ Eulera, która jest uogólnieniem silni dla wartości naturalnych

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \Gamma(k+1) = k!, \text{dla } k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \dfrac{2^{-\frac{k}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma(\frac{k}{2})}, x > 0 \end{cases}, \mathrm{k} > 0$$

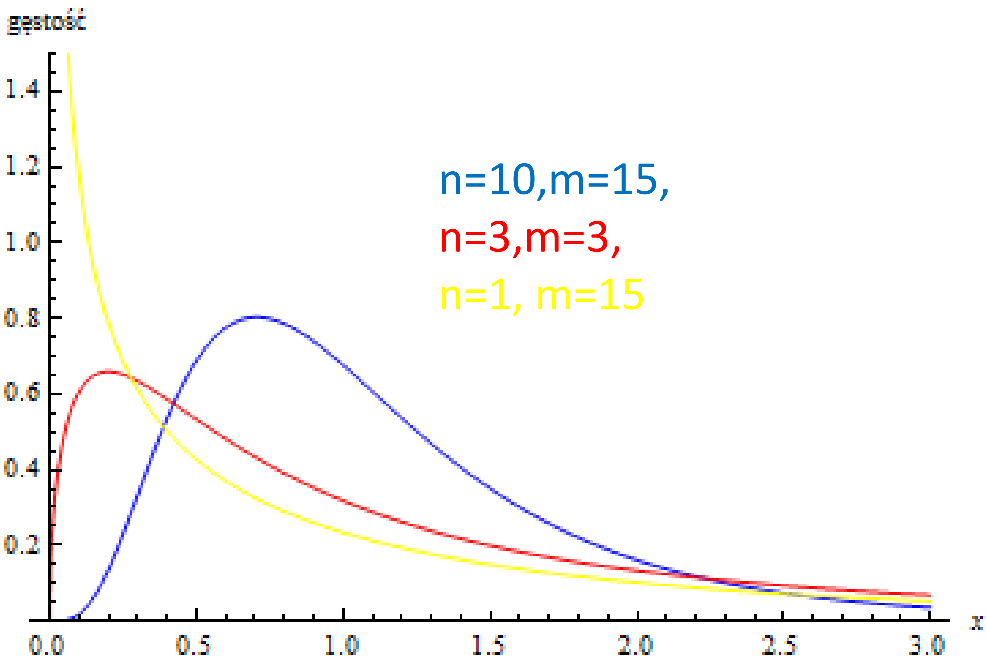


EX = k,

$D^2X = 2k$

VII. Rozkład Snedecora

Def. Mówimy, że zmienna Y typu ciągłego ma rozkład Snedecora o (n, m) stopniach swobody $\Leftrightarrow \mathrm{Y} = \frac{\frac{X_1}{n}}{\frac{X_2}{m}}$, gdzie X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat o odpowiednio n i m stopniach swobody.



EX = $\frac{m}{m-2}$, dla m>2

$$D^2X = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2}, \text{dla } m > 4$$

Funkcja gęstości rozkładu Snedecora zależy od nieelementarnej funkcji B Eulera

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} (nx+m)^{-\frac{n+m}{2}}}{\mathrm{B}(\frac{n}{2},\frac{m}{2})}, x > 0 \end{cases}, \text{ gdzie } \mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

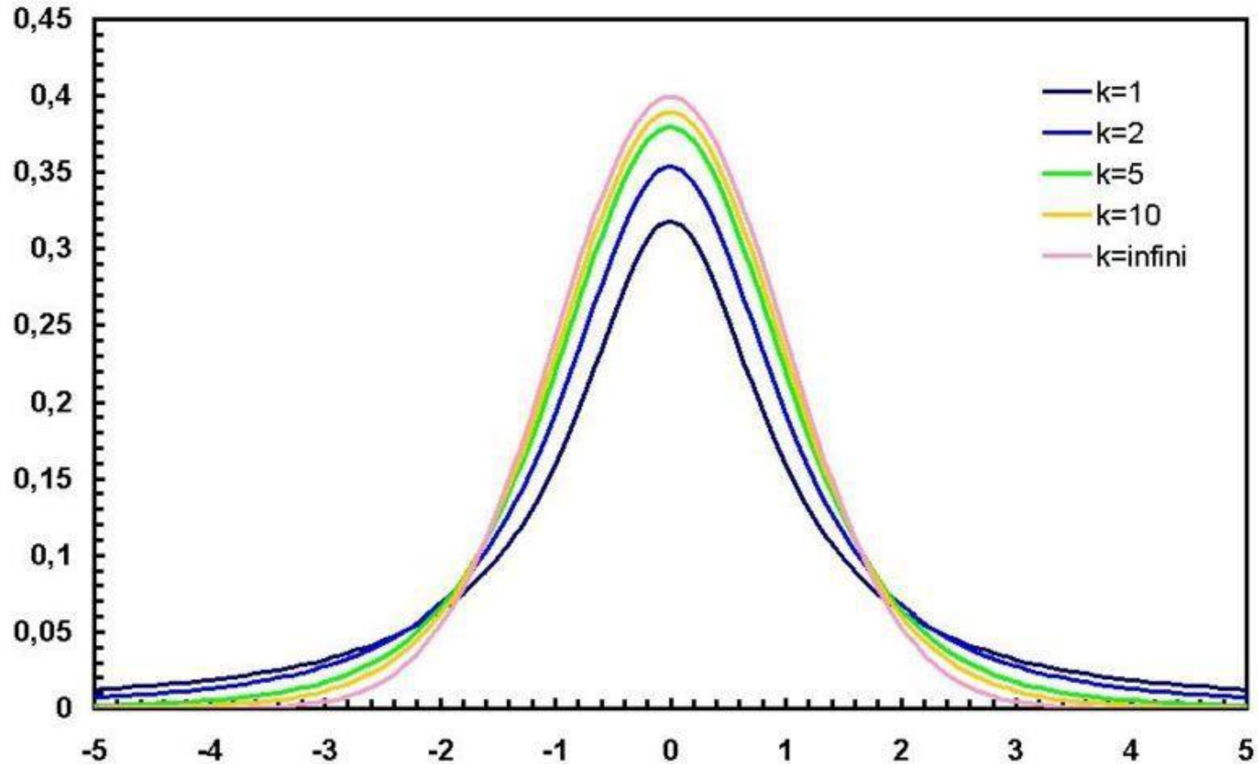
VIII. Rozkład t-Studenta

Def. Mówimy, że zmienna t typu ciągłego ma rozkład t - Studenta o k stopniach swobody ⇔ t = $\frac{Y}{\sqrt{Z}}\sqrt{k}$, gdzie Y i Z są niezależne, Y ma rozkład normalny N(0,1), a Z ma rozkład chi-kwadrat o k stopniach swobody

EX = 0, dla k>1

$$D^2X = \frac{k}{k-2}, \text{dla } k > 2$$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{k}{x^2+k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{k}\mathrm{B}(\frac{k}{2},\frac{1}{2})}$$



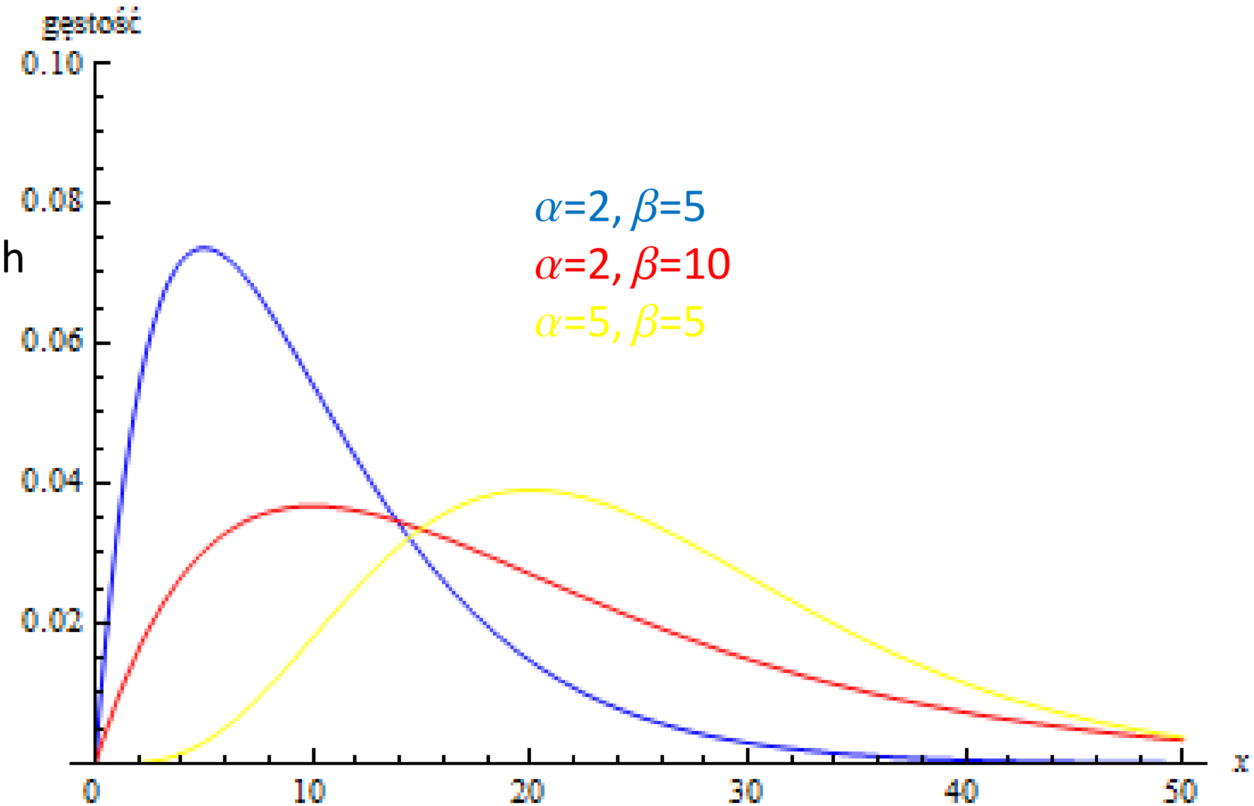
IX. Rozkład gamma

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład gamma o parametrze kształtu $\alpha > 0$ i parametrze skali $\beta > 0 \Leftrightarrow$ funkcja gęstości X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1} \beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0 \end{cases}$$

EX = $\alpha\beta$,
$D^2X = \alpha\beta^2$

Uwaga:
Rozkład chi-kwadrat o k stopniach swobody jest rozkładem gamma z parametrami $\alpha = \frac{k}{2}$ i $\beta = 2$



X. Rozkład beta

Def. Mówimy, że zmienna X typu ciągłego ma rozkład beta o parametrach kształtu $\alpha,\beta > 0$ $\Leftrightarrow$ funkcja gęstości X ma postać

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \dfrac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}, x \in [0,1] \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

$EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$,

$D^2X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(1+\alpha+\beta)}$

Uwaga: Dla dystrybuanty rozkładu beta zachodzi F(1-x) = 1 – F(x)