

Co to jest nieznaną

$s'(t) = v(t)$ - równanie ruchu (~~L. Infeld~~)

$$s(t) = t^2 \Rightarrow v(t) = 2t \quad - \text{Równikowosc}$$

$$s(t) = t^2 + C \Leftrightarrow v(t) = 2t \quad - \text{Co to jest}$$

$$s(t) = \arctan t + C \Leftrightarrow v(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int_0^t \Leftrightarrow v(t) = \frac{1}{e^{10t} + 1}$$

$$\text{Zadanie.} \quad \Leftrightarrow v(t) = \frac{e^t}{t}$$

Ala nie wie
nie wie wzoru

Def Funkcja $F: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ (I - przedział) jest

funkcją pierwotną funkcji $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, gdy

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x).$$

Tw Jeżeli f jest ciągła, to ma funkcję pierwotną F .

Przyk Funkcja pierwotna funkcji elementarnej
nie musi być funkcją elementarną, np.:

$$e^{-x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \sqrt{4+x^3}, \cos x^2, \frac{1}{\ln x}, \\ \sqrt{x} \cdot \sin x,$$

Tw Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na $\underline{I}$.

Wtedy każda funkcja $F + C$, $C = \text{const} \in \mathbb{R}$ też
jest funkcją pierwotną funkcji f na $\underline{I}$ i są to
jej wszystkie funkcje pierwotne na $\underline{I}$.

Def. Mielik F będzie funkcją pierwotną funkcji f na I . Całka nieoznaczona funkcji f na I nazywamy zbiór $\{F + C : C = \text{const} \in \mathbb{R}\}$ wszystkich jej funkcji pierwotnych na I .

Oznaczenie: $\int f(x) dx$ - "całka $f(x)$ po dx "

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Np. $\int 2t dt = t^2 + C$

Własności

1. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

2. $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \quad k = \text{const}$

① $(\int f(x) dx)' = f(x)$ - Różniczkowanie jest odwrotnością całkowania

② $\int f'(x) dx = f(x) + C$ - Całkowanie jest odwrotnością różniczkowania
= obliczenia do stoją.

• $(\int \underline{x} dx)' = (\frac{1}{2}x^2 + C)' = \underline{x}$

•• $\int \underline{(x)'} dx = \int 1 dx = \underline{x + C}$

$f(x) = x$

W2 only

1. $\int 0 \, dx = C$

2. $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

6. $\int e^x \, dx = e^x + C$

7. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

Tr $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$

Tw. (o całkowym przez uści)

Jeżeli funkcje u, v mają ciągłe pierwsze pochodzące, to

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) v'(x) dx.$$

Dow.

$$\int (u(x) v(x))' dx = \int u'(x) v(x) + \int u(x) v'(x) dx$$

$$u(x) v(x) + C = \int u'(x) v(x) + \int u(x) v'(x) dx$$

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx$$



$$\textcircled{1} \int \underbrace{x e^x}_{f(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ v' = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx =$$

$$= x e^x - e^x + C = \underbrace{e^x (x-1)}_{F(x)} + C$$

Sproudeni:

$$[e^x (x-1) + C]' = e^x (x-1) + e^x = x e^x \quad \text{OK}$$

A gelybytl:

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = x \\ v = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = \frac{1}{2} x^2 \\ v' = e^x \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$

= *we proceed*
do calc ▽

$$\textcircled{2} \int x \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u' = 1 \\ v = \ln x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = x \ln x - \int dx =$$

$$= x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C$$

$$\textcircled{3} \int \sin x \cdot e^x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ v' = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = \cos x \\ v = e^x \end{array} \right\} =$$

$$\sin x e^x - \int \cos x \cdot e^x \, dx = \sin x e^x -$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ v' = e^x \end{array} \middle| \begin{array}{l} u' = -\sin x \\ v = e^x \end{array} \right\} = \sin x e^x - \cos x e^x -$$

$$- \int \sin x \cdot e^x \, dx \quad \int \sin x e^x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

CW 1) $\int x \cdot \sin x \, dx$
2) $\int \cos x \, dx$

$$\int \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

$$t := 5x$$