

Def. Niech funkcja $f: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in I$. Różniczką zupełną pierwszego rzędu funkcji f w x_0 nazywamy funkcję $dx_0 f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określającą wzorem

$$dx_0 f(dx) = f'(x_0) dx, \quad dx \in \mathbb{R}.$$

Krócej

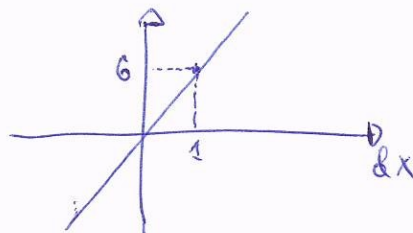
$$df = f' dx.$$

① $f(x) = x^2, \quad x_0 = 3$

$$f'(x) = 2x$$

$$dx_3 f(dx) = 6 dx$$

$$df = 6 dx$$



Tw. Jeżeli $dx \neq 0$, to $f' = \frac{df}{dx}$.

Tw. (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli:

1) funkcja $f: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej t jest ciągła,

2) funkcja $\varphi: \mathbb{R} \supset J \rightarrow I$ zmiennej x ma ciągłe pierwsze pochodną i $t := \varphi(x)$,

to

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Jeżeli ponadto $\varphi'(x)$ jest funkcją zmienną t i $\varphi'(x) \neq 0, x \in J$, to

$$\int f(\varphi(x)) dx = \int f(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(x)} dt.$$

Dowód

$$t = \varphi(x), \quad t' = \varphi'(x), \quad dt = t' dx, \quad dx = \frac{1}{\varphi'(x)} dt$$

① $\int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin t dt = -\frac{1}{5} \cos t + C = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$

$$t = 5x$$

$$t' = 5$$

$$dt = 5 dx$$

$$\textcircled{2} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\textcircled{3} \int \sqrt{x+1} dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\text{I} \quad t = x+1 \\ dt = dx$$

$$\text{II} \quad t = \sqrt{x+1} \quad \int \sqrt{x+1} dx = 2 \int t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 + C = \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx \quad = \frac{2}{3} (\sqrt{x+1})^3 + C = \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} + C \\ dx = 2\sqrt{x+1} dt$$

$$\textcircled{4} \int \sqrt{x^2+1} dx = \pm \int \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t-1}} dt - \text{dalej nie wiadomo jak to by cos tak poluzyc!}$$

$$t = x^2+1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{t-1}$$

$$dt = 2x dx$$

$$dx = \frac{1}{2x} dt$$

$$\text{Trzeba: } \sqrt{x^2+1} = x+t \text{ albo } \sqrt{x^2+1} = tx+1$$

Szko odpowiednie I i III podstosownie Eulera.

$$\textcircled{5} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + C = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$t = ax \quad a \neq 0$$

$$dt = a dx$$

Co to funkcje wymierne

$\int w_n(x) dx$, $w_n(x)$ - wielomian stopnia n

$$\textcircled{1} \int (7x^4 + 8x^2 + 4x + 1) dx = \frac{7}{5} x^5 + \frac{8}{3} x^3 + 2x^2 + x + C$$

Ale jak poluzyc

$$\int \frac{w_n(x)}{p_m(x)} dx \quad ?$$

$w_n(x)$, $p_m(x)$ - wielomiany odpowiednio stopnia n i m . (12)

Def (Litomki proste I i II rodzaju)

1. $\frac{A}{(ax+b)^n}$, $a, b, A \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ - I rodzaj

2. $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$, $a, b, c, A, B \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ - II rodzaj
 $\Delta < 0$

Tw. Każdy wielomian da się przedstawić w postaci iloczynu czynników liniowych lub kwadratowych.

Tw. Każdy funkcję wymierną można przedstawić w postaci sumy wielomianu i skończonej ilości ułamków prostych I lub II rodzaju. Przedstawienie to jest jednoznaczne.

Uwaga Wielomian całkuje się, wykorzystując liniowość całki nieoznaczonej i wólc ma $\int x^k dx$, zaś ułamki proste całkuje się w operacji o trójokresie o całkowanie przez podzielenie.

Algorytm Euklidesa

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \exists c \in \mathbb{Z} \exists ! r \in \mathbb{Z}, r \in \langle 0, b \rangle$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$$

① $\frac{7}{2} = 3 + \frac{①}{2}$

$$\frac{-7}{2} = -3 + \frac{-1}{2}, \quad \frac{-7}{2} = -4 + \frac{①}{2}$$

↑
Algorytm nie dotarł
do tej sytuacji!

$$\forall w_n(x), p_m(x), p_m \neq 0 \exists q(x) \exists ! r_l(x), l \in \langle 0, m \rangle$$

$$\frac{w_n(x)}{p_m(x)} = q(x) + \frac{r_l(x)}{p_m(x)}$$

CoThowanie

$$\int \frac{w_n(x)}{p_m(x)}$$

1) $n < m$ a) Rozkład mianownika $p_m(x)$ na iloczyn czynników liniowych lub kwadratowych.b) Rozkład $\frac{w_n(x)}{p_m(x)}$ na ułamki proste.2) $n \geq m$ a) Podzielić $w_n(x)$ przez $p_m(x)$: $\frac{w_n(x)}{p_m(x)} = q(x) + \frac{r_l(x)}{p_m(x)}$ b) Punkt 1) dla $\frac{r_l(x)}{p_m(x)}$.Wzory

$$a \neq 0 \quad 1. \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\textcircled{1} \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

$t = x + \frac{1}{2}$
 $dt = dx$

$$\textcircled{3} \quad \int \frac{dx}{x^4+x^3} = \int \frac{dx}{x^3(x+1)} = \dots$$

$$\frac{1}{x^3(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1}$$

$$1 = Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + C(x+1) + Dx^3$$

$$1 = (A+D)x^3 + (A+B)x^2 + (B+C)x + C$$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ A+B=0 \\ B+C=0 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1, C=1, D=-1$$

$$\dots = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \ln|x+1| + C$$

$$\textcircled{4} \int \frac{x^5 + x^2 + 2}{x^2 - 1} dx = \dots$$

$$(x^5 + x^2 + 2) : (x^2 - 1) = x^3 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^5 + x^2 + 2 \\ -x^5 + x^3 \\ \hline x^3 + x^2 + 2 \\ -x^3 + x \\ \hline x^2 + x + 2 \\ -x^2 + 1 \\ \hline x + 3 \end{array}$$

$$\frac{x^5 + x^2 + 2}{x^2 - 1} = x^3 + x + 1 + \frac{x+3}{x^2-1}$$

$$\dots = \int (x^3 + x + 1) dx + \int \frac{x+3}{x^2-1} dx = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + x +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-1} dx + 3 \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{1}{2} \ln|x^2-1| +$$

$$+ \frac{3}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$