

DODATEK 2

Granice ciągów, ciągłość funkcji

1. Obliczyć granice ciągów:

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cos n!,$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}},$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}},$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 3^n + 2^{2n+1} + \frac{(-1)^n}{n}},$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^2+1}{-n^2+n+2} \right)^{\sqrt{n}},$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\ln \frac{1}{n^2+2} - \ln \frac{1}{n^2+3} \right),$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}},$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n+1}{n-1} \frac{1}{n^3} \cos \frac{n\pi}{2},$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right),$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2},$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \right).$$

2. Dobrać parametry a, b tak, żeby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & |x| < 2, \\ \sqrt{x^2 - 4}, & |x| \geq 2, \end{cases}$$

była ciągła. Naszkicować rysunek funkcji f z tak dobranymi a, b .

3. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} + x \cos \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 4^a - 2^{a+1} - 8, & x = 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$ w zależności od parametru a .

4. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(\sqrt{x^2+x+1}-1)}{\sqrt{x^2+4}-2}, & x \neq 0, \\ \ln(a-1) + \ln a + 1, & x = 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$ w zależności od parametru a .

5. Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x(\sqrt{x^2+x+9}-3)}, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}, \\ \ln(a+1) + \ln a + \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$ w zależności od parametru a .

6. Zbadać prawostronną ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \left[\ln \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) + 2 \ln x \right], & x > 0, \\ \sin^2 a + \cos a + 1, & x = 0, \end{cases}$$

w punkcie $x_0 = 0$ w zależności od parametru a .