

DODATEK 3

Różniczkowalność funkcji, zastosowania

1. Zbadać różniczkowalność funkcji w $x_0 = 0$:

1.1. $f(x) = \cos |x|$,

1.2. $f(x) = \sin |x|$,

1.3. $f(x) = |\sin |x||$,

1.4. $f(x) = |x| \sin |x|$.

2. Zbadać różniczkowalność (ewentualnie tylko jednostronną) funkcji:

2.1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$,

2.2. $f(x) = \sqrt[3]{4x - 1}$,

2.3. $f(x) = |x^2 + x - 2|$,

2.4. $f(x) = e^{\left|\frac{x}{x+1}\right|}$.

3. Rozstrzygnąć dla jakich wartości parametru a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + ax, & x \leq 0 \\ \sin x - ax + 1, & x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła, a dla jakich jest różniczkowalna w $x_0 = 0$.

4. Udowodnić nierówności:

4.1. $e^x \geq x + 1, \quad x \in \mathbf{R}$,

4.2. $\ln x \leq x - 1, \quad x > 0$,

4.3. $2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2), \quad x \in \mathbf{R}$,

4.4. $\ln(1 + x) \geq \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad x > -1$.

5. Wykazać, że funkcje $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ są równe dla $x > 0$.

6. Obliczyć:

6.1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$,

6.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(4x + \pi)}{\cos^2(2x + \frac{\pi}{2})}$,

6.3. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\cos x} \right)$,

6.4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})}$,

6.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right)^x$,

6.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

7. Wyznaczyć ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji:

7.1. $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+x+1)},$

7.2. $f(x) = -x + \ln(-x^2 - 2x + 3),$

7.3. $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x^2-x)},$

7.4. $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{2x}},$

7.5. $f(x) = (x+2)\operatorname{arctg}(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5),$

7.6. $f(x) = \ln(x^2-1) + \frac{3}{x^2-1}.$

8. Wyznaczyć punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji:

8.1. $f(x) = \frac{1}{2-e^{3x}},$

8.2. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}},$

8.3. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-2}.$

9. Narysować wykresy funkcji:

9.1. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9},$

9.2. $f(x) = \frac{1}{x^2+1},$

9.3. $f(x) = \frac{x^2}{1-x},$

9.4. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-9},$

9.5. $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2},$

9.6. $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{3x^2-10x+3},$

9.7. $f(x) = x + \sqrt{1+x^2},$

9.8. $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3},$

9.9. $f(x) = \sqrt[3]{|x|(x^2-3x)},$

9.10. $f(x) = |x|e^{|x-1|},$

9.11. $f(x) = |x| \ln\left(\frac{1}{x} + e\right).$

10. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji, o ile istnieje:

10.1. $f(x) = \arcsin \frac{x+1}{x-1},$

10.2. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1},$

10.3. $f(x) = \frac{1}{x^2+5x-6}.$

11. Dany odcinek o długości a podzielić na takie dwa odcinki, żeby pole prostokąta zbudowanego z tych odcinków było największe.

12. Spośród trójkątów równoramiennych wpisanych w koło o promieniu $R > 0$ wyznaczyć ten o największym i ten o najmniejszym polu, o ile to możliwe.

13. Obliczyć przybliżoną wartość $\cos \frac{1}{3}$ z dokładnością $d = 0.1$, $d = 0.01$, $d = 0.001$.

14. Obliczyć przybliżoną wartość $\sqrt{3}$, korzystając z rozwinięcia Maclaurina funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$ oraz $f(x) = \sqrt{4+x}$ z resztą R_2 , R_3 , R_4 . Oszacować błąd przybliżenia. Porównać wyniki.