

$$\boxed{\Delta u = 0} \quad - \Delta u = f(x)$$

~~niektóre~~

$$\bar{\Phi}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2n} \ln|x|, & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega(n)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

- Rozwiązanie podobne  
wielomio  $\Delta u = 0$

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \bar{\Phi}(x) = +\infty}$$

$x \in \mathbb{R}^n$  - dowolnie ustalone

$y \rightarrow \bar{\Phi}(x-y)$  dla  $x \neq y$  - Rozwiązanie wielomio  $\Delta u = 0$   
 $y \rightarrow \bar{\Phi}(y-x)$

Funkcja Greena

$U \subset \mathbb{R}^n$  - obszar z gładkim brzegiem

$x \in \bar{U}$  - dowolnie ustalone



$$\Delta \phi^x = 0, \quad y \in U$$

$$\phi^x(y) = \bar{\Phi}(y-x), \quad y \in \partial U$$

Def.  $G(x,y) := \bar{\Phi}(y-x) - \phi^x(y), \quad x, y \in \bar{U}, \quad x \neq y$   
- funkcja Greena

$$\boxed{\exists G \Leftrightarrow \exists \phi^x, x \in \bar{U}}$$

Def.  $\textcircled{1} \begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in U \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial U \end{cases}$

Tw1 Jeśli  $u \in C^2(\bar{U})$  jest rozwiązaniem  $\textcircled{1}$ , to

$$u(x) = - \int_{\partial U} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) d\sigma(y) + \int_U f(y) G(x,y) dy, \quad x \in U$$

Dowód

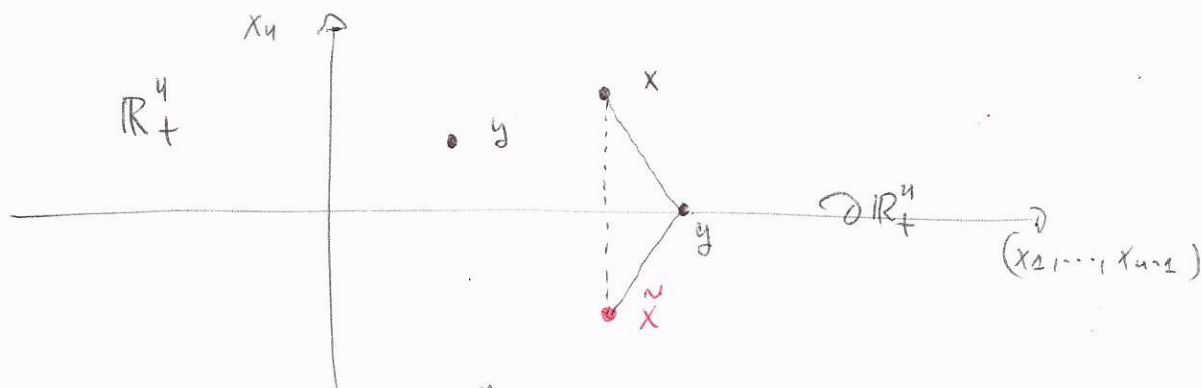
Wynika z konstrukcji  $\square$

$\alpha(n)$  - objętość kuli jednostkowej  
 $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$   
 $V = \alpha(n) r^n$   
 $P_p = n \alpha(n) r^{n-1}$   
 $\alpha(2) = \pi$

$\boxed{1}$

# Konstrukcja funkcji Greena dla półprzestrzeni

$$\mathbb{R}_+^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0 \}$$



$$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \cup \partial \mathbb{R}_+^n$$

$$\Rightarrow \tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - \text{odbicie punktu } x \text{ względem płaszczyzny } \partial \mathbb{R}_+^n$$

Konstrukcja

$$\phi^x(y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}) = \Phi(y_1-x_1, \dots, y_{n-1}-x_{n-1}, y_n+x_n) \in$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \mathbb{R}_+^n \cup \partial \mathbb{R}_+^n$$

„odbijamy” oddzieleni z punktu ~~x~~  $x \in \mathbb{R}_+^n$  do punktu  $\tilde{x} \notin \mathbb{R}_+^n$  dla  $y \in \mathbb{R}_+^n$ .

$$\text{dla } y \in \mathbb{R}_+^n \quad \begin{cases} \Delta \phi^x = 0, & y \in \mathbb{R}_+^n & \text{bo } y \neq \tilde{x} \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x), & y \in \partial \mathbb{R}_+^n & \text{bo } |y-x| = |y-\tilde{x}| \end{cases}$$

Def.

$$G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}), \quad x, y \in \mathbb{R}_+^n \cup \partial \mathbb{R}_+^n, \quad x \neq y$$

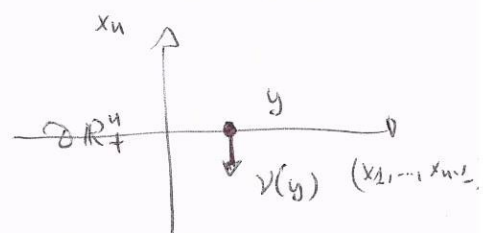
- funkcja Greena

⊕

Obliczymy  
 $y \in \partial \mathbb{R}_+^n$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu} G(x,y) \circ \nu(y) :$$

$$\nu(y) = (0, \dots, 0, -1)$$



$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = - \frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y)$$

$n \geq 3$

$$\frac{\partial G}{\partial y_n}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-x) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(y-\tilde{x}) = - \frac{1}{n \alpha(n)} \left[ \frac{y_n - x_n}{|y-x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y-\tilde{x}|^n} \right]$$

$$= \frac{2x_n}{n \alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = - \frac{2x_n}{n \alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}$$

CIĄG DALSZY ZADANIA 6

$n=2$  - To samo.

[2]

# CIĄG DALSZY ZADANIA 5

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}_+^n \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

Pytanie, czy  $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  jest rozwiązaniem

②. Dłuz analogis do tw. 1 spodnieczony si, ze

$$u(x) = - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

✱

Zatem

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y), \quad x \in \mathbb{R}_+^n.$$

③

Wzrost Poissona

$$K(x, y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x-y|^n}, \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}_+^n \\ y \in \partial \mathbb{R}_+^n \end{matrix} - \text{Jedno Poisson}$$

Tw. 2 Zosdzony, i  $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  i obreslony funkcys u wzorem ③. Wskazow:

$$1. \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n),$$

$$2. \quad \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n,$$

$$3. \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in \mathbb{R}_+^n}} u(x) = \varphi(x_0) \quad \text{dla kazdego punktu } x_0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$$

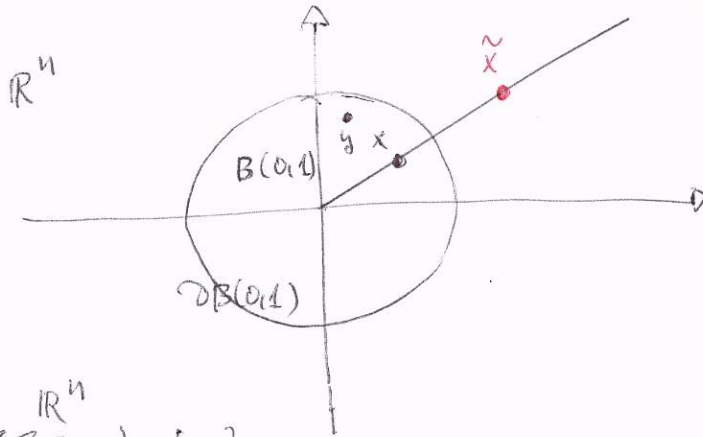
Dowód

Evens, Ar. 51...

✱



# Konstrukcja funkcji Greena dla kuli jednostkowej $B(0,1)$



$$x \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} := \frac{x}{|x|^2} \text{ - obraz inwersyjny } x \text{ względem sfery } \partial B(0,1)$$

Wtedy

$$\phi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x})), \quad x, y \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$$

("Odbijamy osobliwość" z punktu  $x \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$  do punktu  $\tilde{x} \notin \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$  dla  $y \in \overline{B(0,1)} \setminus \{0\}$ .)

Wz. 3

$$\Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)(|x||y - \tilde{x}|)^{n-2}} = \frac{1}{|x|^{n-2}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n(n-2)\alpha(n)|y - \tilde{x}|^{n-2}}}_{\Phi(y - \tilde{x})}$$

$$\Phi(|x|(y - \tilde{x})) = |x|^{2-n} \cdot \Phi(y - \tilde{x})$$

A wtedy  $\Delta \phi^x = 0, \quad y \in B(0,1) \setminus \{0\}.$

Poleżemy, że jeżeli  $y \in \partial B(0,1)$ , to  $\Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \Phi(y - x)$ :

$$|x||y - \tilde{x}| = |y - x|$$

Wynikanie będzie podnieść obustronnie do kwadratu

$$|x|^2 |y - \tilde{x}|^2 = |y - x|^2$$

$$L = |x|^2 |y - \tilde{x}|^2 = |x|^2 \langle y - \tilde{x}, y - \tilde{x} \rangle = |x|^2 \langle y - \frac{x}{|x|^2}, y - \frac{x}{|x|^2} \rangle$$

$$= |x|^2 \left( |y|^2 - \frac{2\langle y, x \rangle}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) = |x|^2 - 2\langle y, x \rangle + 1$$

$$\pm \text{ (zależy od } \Phi = |y - x|^2 = \langle y - x, y - x \rangle = |y|^2 - 2\langle y, x \rangle + |x|^2 = |x|^2 - 2\langle y, x \rangle + 1$$

ZADANIE 4

[4]

L = \Phi

Zatem

$$\phi^x(y) = \bar{\Phi}(y-x), \quad y \in \partial B(0,1).$$

$n=2$

Bierzemy - jak wyżej dla  $n \geq 3$ .

$$\bar{\Phi}(|x|(y-\tilde{x})) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x||y-\tilde{x}|) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x| - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln|y-\tilde{x}|}_{\bar{\Phi}(y-\tilde{x})}$$

A stąd

$$\Delta \phi^x = 0, \quad y \in B(0,1) \setminus \{0\}.$$

Def.

$$G(x,y) := \bar{\Phi}(y-x) - \bar{\Phi}(|x|(y-\tilde{x})), \quad x,y \in \bar{B}(0,1) \setminus \{0\}, \quad x \neq y$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} \Delta u = 0, & x \in B(0,1) \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial B(0,1) \end{cases}$$

Przyjmujemy, że  $u \in C^\infty(B(0,1)) \cap C(\bar{B}(0,1))$  jest rozwiązaniem  $\textcircled{4}$ . Zaczynamy od tw. 1 z poprzedniego rozdz. i

$$u(x) = - \int_{\partial B(0,1)} \varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) d\sigma(y), \quad x \in B(0,1).$$

$n \geq 3$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = D_y G(x,y) \cdot \nu(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) y_i$$

$y \in \partial B(0,1)$

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x}))$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y_i}(y-x) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{y_i - x_i}{|y-x|^n}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x})) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y-\tilde{x}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x-y|^n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \sum_{i=1}^n y_i \left( \frac{y_i - x_i}{|x-y|^n} - \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x-y|^n} \right) = \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = -\frac{1}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$

  $n=2$  - Ten samo.

5

Zadani

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} d\sigma(y), \quad x \in B(0,1)$$

Wzór Poissona

$$K(x,y) := \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \cdot \frac{1}{|x-y|^n} \quad - \text{Jądro Poissona}$$

Tw 3. Załóżmy, że  $\varphi \in C(\partial B(0,1))$  i określmy funkcję  $u$  wzorem (5). Wówczas:

1.  $u \in C^\infty(B(0,1))$ ,
2.  $\Delta u = 0$ ,  $x \in B(0,1)$ ,
3.  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x_0 \in \partial B(0,1)}} u(x) = \varphi(x_0)$  dla każdego punktu  $x_0 \in \partial B(0,1)$ .

Dowód

Podobny do dowodu twierdzenia 2.

□

Wzór (5) i twierdzenie 3 opisują  $u$  na  $B(0,r)$ .