Funkcja uwikłana jednej zmiennej

Często różne związki algebraiczne nie są opisywalne funkcyjnie. Ale jeśli spełnione są pewne założenia, to można to zrobić, zwykle lokalnie. Najczęściej nie mamy na tą lokalną funkcję jawnego wzoru, ale wiemy, że istnieje, a nawet w pewnych punktach możemy efektywnie obliczyć jej pochodną.

Dla przykładu okrąg

$$x^2+y^2=4$$

nie jest wykresem żadnej funkcji, jednak lokalnie nim jest:
$y(x)=\sqrt{4-x^2}$, $y(x)=-\sqrt{4-x^2}$, $x(y)=\sqrt{4-y^2}$, $x(y)=-\sqrt{4-y^2}$ - <u>funkcje uwikłane.</u>

W przypadku lemniskaty Bernoulliego jawnego wzoru na <u>funkcję uwikłaną</u> już nie uzyskamy (można to zrobić przechodząc na współrzędne biegunowe).

<u>Tw. (O funkcji uwikłanej jednej zmiennej)</u>

Załóżmy, że funkcja $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ spełnia warunki:

$F(x,y)=0$

$y=y(x)$?

$y=f(x)$

1. $F(x_0,y_0)=0$,
2. F jest ciągła w otoczeniu U_0 punktu (x_0,y_0),
3. F_y jest ciągła w U_0 i $F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

Wówczas istnieje otoczenie Δ_0 punktu x_0 i istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła (<u>funkcja uwikłana</u>) $f:\Delta_0\to\mathbb{R}$ taka, że:

1) $y_0=f(x_0)$,

2) $F(x,f(x))=0$, $x\in\Delta_0$.

Jeśli ponadto F_x jest ciągła w U_0 (czyli F jest klasy C^1), to f jest C^1 w Δ_0 oraz

$$(*)\quad f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))},\quad x\in\Delta_0$$

Uzasadnienie (*):

$$F(x,f(x)) = 0, \quad x \in \Delta_0$$

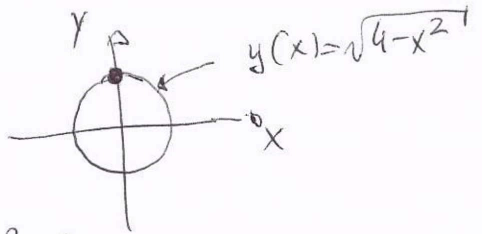
$$F_x(x,f(x)) + F_y(x,f(x)) \cdot f'(x) = 0, \quad x \in \Delta_0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}, \quad x \in \Delta_0$$

<u>Prz</u>

$$x^2 + y^2 = 4$$



$F(x,y) := x^2 + y^2 - 4$

$(x_0, y_0) = (0,2)$

Chcemy obliczyć $y'(0)$, gdzie $y(x)$ jest funkcją uwikłaną (zamiast $f(x)$ piszę $y(x)$, bo w praktyce tak się robi...)

$F_x(x,y) = 2x, \quad F_y(x,y) = 2y$

$F_y(0,2) = 4 \neq 0$

$$\Rightarrow \underline{y'(0)} = -\frac{F_x(0,2)}{F_y(0,2)} = -\frac{0}{4} = \underline{0}$$

Nietrudno to sprawdzić:

$$y(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$y'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow \underline{y'(0) = 0}$$

Jeszcze inna motywacja tego twierdzenia: Chcemy opisać funkcyjnie (chociażby lokalnie) zbiór pierwiastków równania

$$\boxed{F(x,y) = 0},$$

gdzie $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją.

Tw (o funkcji uwikłanej dwóch zmiennych)

Załóżmy, że funkcja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:

$\boxed{\begin{array}{c} F(x,y,\underline{u}) = 0 \quad ? \\ u = u(x,y) \end{array}}$; $\boxed{u = f(x,y)}$

1. $F(x_0, y_0, u_0) = 0$,
2. F jest ciągła w otoczeniu U_0 punktu (x_0, y_0, u_0),
3. F_u jest ciągła w U_0 i $F_u(x_0, y_0, u_0) \neq 0$.

Wówczas istnieje otoczenie Δ_0 punktu (x_0, y_0) i istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła (funkcja uwikłana) $f: \Delta_0 \to \mathbb{R}$ taka, że:

1) $u_0 = f(x_0, y_0)$,
2) $F(x, y, f(x,y)) = 0$, $(x,y) \in \Delta_0$.

Jeśli ponadto F_x, F_y są ciągłe w U_0 (czyli F jest klasy C^1), to f jest klasy C^1 w Δ_0 oraz:

$$f_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,u(x,y))}{F_u(x,y,u(x,y))}, \quad f_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,u(x,y))}{F_u(x,y,u(x,y))},$$

$$(x,y) \in \Delta_0.$$

Metoda funkcji uwikłanych (w skrócie)

$$\begin{cases} F_1(x,y,z,\underline{u,v}) = 0 \\ F_2(x,y,z,\underline{u,v}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \end{cases} \quad \begin{cases} u = f_1(x,y,z) \\ v = f_2(x,y,z) \end{cases} \quad ?$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u,v)} := \det \underbrace{\begin{bmatrix} F_{1u} & F_{1v} \\ F_{2u} & F_{2v} \end{bmatrix}}_{\text{macierz Jakobiego } (J)} \quad - \text{ jakobian}$$

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0 \end{cases} \qquad P_0 := (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u,v)}(P_0) \neq 0 \implies \begin{cases} u = f_1(x,y,z) \\ v = f_2(x,y,z) \end{cases} \text{ jednoznacznie}$$

w otoczeniu U_0 punktu P_0

Pochodne funkcji uwikłanych f_1, f_2 obliczamy, rozwiązując odpowiednio układy równań:

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{1u} \cdot f_{1x} + F_{1v} \cdot f_{2x} = 0 \\ F_{2x} + F_{2u} \cdot f_{1x} + F_{2v} \cdot f_{2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Obliczamy } f_{1x}, f_{2x}$$

Analogicznie postępujemy, żeby obliczyć: f_{1y} i f_{2y} oraz f_{1z} i f_{2z}.

Po prostu różniczkujemy tożsamości

$$\begin{cases} F_1\left(x, y, z, \overset{u}{f_1(x,y,z)}, \overset{v}{f_2(x,y,z)}\right) = 0 \\ F_2\left(x, y, z, \overset{u}{f_1(x,y,z)}, \overset{v}{f_2(x,y,z)}\right) = 0 \end{cases}$$

Odpowiednio względem x, y, z

$\boxtimes$