

WMS, Matematyka, II rok, gr.: 1, 3
KOŁOKWIUM NR 2
Z RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

1. a) Wykazać, że problem Cauchy'ego

$$x' = \frac{1}{t} \left(t^2 x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} + 1 - t^2 \right), \quad x(1) = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

- b) Udowodnić, że każde rozwiązanie równania

$$x' = \frac{|tx - t|}{|x - 1| + 1} + x \cos(x + t)$$

jest przedłużalne na $\mathbb{R}$.

2. Rozwiązać równanie

$$(1 - t)x'' + \left(1 - \frac{1}{t}\right)x' - \frac{1}{t}x = 0,$$

wiedząc, że $x_1 = 1 - t$ jest jego rozwiązaniem szczególnym.

3. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = x + 3y + z + 1. \\ z' = -x + 4z \end{cases}$$

4. a) Z badać stabilność i asymptotyczną stabilność rozwiązania $x(t) = 1$ równania

$$x'' + (x' - 1)^{20} = x^4.$$

- b) Sprawdzić, czy funkcja

$$V(x, y) = 1 - \cos x + \frac{1}{2}y^2$$

jest funkcją Lapunowa pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju dla układu równań

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$$

w jakimś otoczeniu punktów stacjonarnych $(x, y) = (0, 0)$ i $(x, y) = (\pi, 0)$. Wyciągnąć wnioski odnośnie stabilności, o ile to możliwe.

POWODZENIA!!!:)