

WMS, Matematyka, gr. 1
KOŁOKWIUM NR 2
WSTĘP DO RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH

1. Dana jest funkcja

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|^3 - 27, & |x| \leq 3 \\ 0, & |x| > 3 \end{cases}.$$

Rozwiązać problem początkowy (zostawić tylko całki właściwe nieelementarne $\int_{\alpha(t,x)}^{\beta(t,x)} e^{-y^2} dy$)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Narysować wykres funkcji początkowej φ i sprawdzić stosowne założenia. Znaleźć oszacowanie rozwiązania u .

2. Rozwiązać problem początkowy (wynik podać bez całek)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(2t + x), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^{2x}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = \arctg x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Sprawdzić, że znaleziona funkcja u rzeczywiście jest rozwiązaniem.

3. Rozwiązać problem brzegowy

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = y \sin 2x, & (x, y) \in (0, 2\pi) \times (0, 1) \\ u(0, y) = u(2\pi, y) = 0, & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = 3 \sin x, u(x, 1) = 0, & x \in [0, 2\pi] \end{cases}.$$

Sprawdzić, czy odpowiednie szeregi są jednostajnie zbieżne.

4. Niech $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ będzie obszarem ograniczonym z brzegiem ∂U klasy C^1 . Dla $T > 0$ połóżmy $U_T = U \times (0, T]$ i $\Gamma_T = \bar{U}_T \setminus U_T$. Sprawdzić dla jakich wartości parametru $c \in \mathbb{R}$ problem początkowo-brzegowy

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + cu + f(x, t), & (x, t) \in U_T \\ u(x, t) = \varphi(x), & (x, t) \in \Gamma_T \end{cases}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^2(\bar{U}_T)$.

POWODZENIA!!!:)