

Równania różniczkowe

Józef Myjak

KU 1740 pozycja wydawnictw naukowych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

Redaktor Naczelny Wydawnictw AGH: *Jan Sas*
Komitet Naukowy Wydawnictw AGH:
Zbigniew Kąkol (przewodniczący)
Marek Cała
Borys Mikułowski
Tadeusz Sawik
Mariusz Ziółko

Recenzenci:
prof. dr hab. Stanisław Sędziwy
dr Lucjan Sapa

Afiliacja autora
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza

Opieka redakcyjna: *Kamila Zimnicka-Warchol*

Skład komputerowy: *Józef Myjak*

Projekt okładki i strony tytułowej: *Agata Wajer-Gądecka*

Druk wykonano z materiałów dostarczonych przez autora.

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2016

ISBN 978-83-7464-864-6

Wydawnictwa AGH
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
tel. 12 617 32 38, tel./faks 12 636 40 38
e-mail: redakcja@wydawnictwoagh.pl
<http://www.wydawnictwo.agh.edu.pl>

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział 1. Równania różniczkowe. Problem początkowy	7
1.1. Wprowadzenie	7
1.2. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równania skalarnego	10
1.3. Metoda odwzorowań zwężających	14
1.4. Przedłużanie rozwiązań	16
1.5. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równania wektorowego	17
1.6. Istnienie rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równań o prawych stronach ciągłych	20
1.7. Dalsze przykłady twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań	23
1.8. Przestrzenie metryczne i przestrzenie unormowane	25
1.9. Zadania	32
Rozdział 2. Przykłady równań całkowalnych	35
2.1. Równanie o zmiennych rozdzielonych	35
2.2. Równanie jednorodne	36
2.3. Równanie liniowe	38
2.4. Równanie Bernoulliego	40
2.5. Równanie zupełne. Czynniki całkujące	42
2.6. Równanie Clairauta i równanie Lagrange'a	46
2.7. Przykłady wyznaczania rozwiązań w postaci parametrycznej	48
2.8. Równanie jednorodne względem szukanej funkcji i jej pochodnych	50
2.9. Równanie Riccatiego	53
2.10. Równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu	54
2.11. Zadania	56
Rozdział 3. Równanie różniczkowe liniowe n-tego rzędu	59
3.1. Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu	59
3.2. Przykłady równań całkowalnych	63
3.3. Równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach	65
3.4. Postać całkowa rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu	72
3.5. Zadania	73
Rozdział 4. Układy równań różniczkowych liniowych	75
4.1. Układy równań liniowych o współczynnikach funkcyjnych	75
4.2. Jednorodne układy równań liniowych o stałych współczynnikach	78

4.3. Niejednorodne układy równań liniowych	83
4.4. Zamiana układu równań na równanie wyższego rzędu	85
4.5. Wiadomości pomocnicze z teorii macierzy i wyznaczników	87
4.6. Zadania	89
Rozdział 5. Zależność rozwiązań od warunków początkowych, nierówności różniczkowe, twierdzenia porównawcze	91
5.1. Zależność rozwiązań od warunków początkowych oraz prawych stron równania	91
5.2. Nierówności różniczkowe	94
5.3. Twierdzenia porównawcze	99
5.4. Rozwiązanie górne i dolne problemu Cauchy'ego	100
5.5. Zadania	101
Rozdział 6. Stabilność rozwiązań równań różniczkowych	105
6.1. Wprowadzenie	105
6.2. Stabilność układów liniowych	106
6.3. Metoda Lapunowa dla układów autonomicznych	107
6.4. Metoda Lapunowa dla układów nieautonomicznych	112
6.5. Zadania	116
Rozdział 7. Klasyfikacja punktów krytycznych.	
Cykle graniczne	119
7.1. Zachowanie się rozwiązań w otoczeniu punktów stacjonarnych	119
7.2. Równania liniowe z perturbacjami	121
7.3. Układy nieliniowe. Linearyzacja	122
7.4. Cykle graniczne	123
7.5. Zadania	125
Rozdział 8. Problemy brzegowe dla równania drugiego rzędu	127
8.1. Wprowadzenie do liniowych problemów brzegowych	127
8.2. Regularne zagadnienie Sturm–Liouville’a	130
8.3. Zadania	134
Rozdział 9. Całki pierwsze układu równań	135
9.1. Całki pierwsze układu równań	135
Rozdział 10. Metoda charakterystyk dla równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu	141
10.1. Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu	141
10.2. Liniowe równanie cząstkowe o stałych współczynnikach	142
10.3. Liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu	148
10.4. Liniowe równanie różniczkowe cząstkowe o n -zmiennych niezależnych	152
10.5. Przykłady	156
10.6. Zadania	162
Bibliografia	165

Wstęp

Przedstawiony tekst powstał na bazie wykładu, jaki zlecono mi na drugim roku Wydziału Matematyki Stosowanej AGH. Na przedmiot ten przeznaczono 30 godzin wykładu i 30 godzin ćwiczeń (obecnie 28 wykładu i 28 ćwiczeń). Ustalając zakres materiału, przyjąłem następujące kryteria: studenci winni uzyskać informacje o podstawowych problemach stanowiących przedmiot teorii równań różniczkowych, jak również umieć znaleźć rozwiązania prostych standardowych równań. Aby ułatwić nabycie umiejętności rozwiązywania konkretnych równań, w tekście zamieściłem znaczną ilość przykładów i zadań do rozwiązania przez studentów (dalsze przykłady zob. [4, 6]). Podstawowa część ćwiczeń poświęcona jest technice rozwiązywania równań, pozostała próbom interpretacji i zastosowań zawartych w wykładzie rezultatów teoretycznych. Na zakończenie rozdziału I przypominałem podstawowe pojęcia i fakty dotyczące przestrzeni metrycznych i unormowanych, z których korzystałem w dowodach twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemu Cauchy'ego. Podobnie na zakończenie rozdziału IV przypominałem podstawowe fakty z teorii macierzy, użyteczne w rozważaniach o układach równań.

Dobierając zestaw zagadnień, kierowałem się zarówno ważnością, jak też możliwością w miarę prostego przedstawienia prezentowanych tematów. Ograniczona liczba godzin nie pozwoliła na bardziej kompletny przegląd problemów będących przedmiotem teorii równań różniczkowych (zob. [2, 5, 10]). W szczególności pomiąłem zagadnienie istnienia rozwiązań periodycznych, intrygujący wciąż badaczy temat układów dynamicznych opisanych zwyczajnymi równaniami różniczkowymi, jak też wiele innych ważnych zagadnień. Z rozległej tematyki punktów krytycznych, bifurkacji czy cykli granicznych wprowadziłem tylko elementarną klasyfikację punktów krytycznych na prostym przykładzie liniowego układu dwóch równań. Warto wspomnieć, że zarówno dziedziny pominięte, jak również ujęte w tekście, np. układy równań liniowych, stabilność, problemy brzegowe, rozwiązania periodyczne, nierówności różniczkowe, mają nie tylko bogatą literaturę przedmiotu, ale również szereg opracowań monograficznych.

Aktualnie równania różniczkowe wykorzystywane w praktycznych zastosowaniach rozwiązuje się głównie metodami numerycznymi. Ponieważ techniki te są przedmiotem specjalnych zajęć, ten ważny temat pomiąłem całkowicie. Pomiąłem też przykłady zagadnień, które można opisać za pomocą równań różniczkowych (np. klasyczny przykład wahadła matematycznego). Tutaj miałem znaczne wątpliwości, zwyciężył jednak reżim doboru zestawu zagadnień tak, aby można było zrealizować je w ramach 30 godzin wykładu. Od zasady tej odstępiałem jedynie raz. Otóż w rozdziale pierwszym zasugerowałem możliwości dalszych rezultatów. Oczywiście ta część materiału nie była przedmiotem wykładu. Dokładniej, rozdział ten zawiera kilka możliwości dowodu twierdzeń o istnieniu rozwiązań problemu początkowego i to zarówno

przy założeniu warunku Lipschitza, jak również przy założeniu tylko ciągłości prawej strony. Zarówno wykładowca, jak i studenci, mogą wybrać wersję, która im odpowiada najbardziej. Chciałem na tym przykładzie pokazać bogactwo dowodowe tych samych rezultatów. Słuszność tej decyzji w moim odczuciu potwierdził fakt, że do egzaminu studenci przygotowują różne wersje, pomimo że na wykładzie przedstawiam tylko jedną. Ponadto, aby zainteresowanemu studentowi dać pogląd na możliwości dalszych rezultatów, w podrozdziale 1.7 dołączyłem wraz z dowodami parę dalszych wyników dotyczących istnienia i jednoznaczności rozwiązań problemu początkowego. Zaprezentowane wyniki są proste, a równocześnie urozmaicone, dają dobry pogląd na to, jak mogą rozwijać się teorie matematyczne.

Rozdział 3 zawiera twierdzenie Liouville'a wraz z dowodem, a rozdział czwarty twierdzenie Abela również z dowodem. Ponieważ twierdzenie Liouville'a wynika łatwo z twierdzenia Abela (zob. uwagę 4.2), tego typu powtórzenie może wydawać się stratą czasu. Uznałem jednak, że walory dydaktyczne takiego podejścia całkowicie wynagradzają czas przeznaczony na powtórzenie w gruncie rzeczy podobnych dowodów. Oczywiście student może ograniczyć się jedynie do dowodu twierdzenia Abela.

Poza materiałem obowiązkowym jest również dowód twierdzenia 9.1, dotyczącego reprezentacji zbioru całek pierwszych dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. W trakcie zajęć raczej trudno wygospodarować czas na dowód tego faktu, a ponieważ bardziej dociekliwi studenci zadawali mi na ten temat pytania, zdecydowałem się dołączyć bardzo elementarny dowód, który zainteresowany adept wiedzy może prześledzić samodzielnie.

Rozdział 1

Równania różniczkowe. Problem początkowy

1.1. Wprowadzenie

Przez *równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n* rozumiemy związek

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

gdzie $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ ($V \subset \mathbb{R}^{n+2}$) jest daną funkcją, t zmienną niezależną, a x funkcją szukaną zmiennej t .

Jeśli ze związku (1.1) potrafimy wyznaczyć $x^{(n)}$, otrzymamy tak zwaną postać *normalną* równania różniczkowego

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (1.2)$$

gdzie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Dla $n = 1$ równanie (1.2) przyjmuje postać

$$x' = f(t, x). \quad (1.3)$$

Przez *rozwiązanie równania* (1.1) (odp. równania (1.2)) określone w przedziale $I \subset \mathbb{R}$ rozumiemy funkcję $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalną n -krotnie w przedziale I , taką że $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) \in V$ (odp. $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$) dla $t \in I$ i ponadto spełniającą warunek

$$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{dla } t \in I$$

(odp. $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ dla $t \in I$).

Zauważmy, że rozwiązaniem równania

$$x'' = 2$$

jest rodzina krzywych

$$x = t^2 + C_1 t + C_2,$$

zależna od dwóch parametrów C_1 i C_2 . Nietrudno sprawdzić, że rozwiązanie równania (1.1) zależy od n parametrów.

Dowolne rozwiązanie równania (1.1) nazywamy *całką* tego równania. Rodzinę rozwiązań równania (1.1) zależną od n parametrów nazywamy *całką ogólną*. Istnieją równania różniczkowe, dla których całka ogólna obejmuje wszystkie rozwiązania, jak

również równania, które posiadają całki nienależące do klasy rozwiązań opisanych przez całkę ogólną. Nazywamy je *całkami szczególnymi* lub *osobliwymi*.

Wykres rozwiązania równania różniczkowego nazywamy *trajektorią*. Na przykład trajektoriami równania

$$xx' + t = 0$$

jest rodzina okręgów

$$x^2 + t^2 = C, \quad C \geq 0.$$

Układem równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu nazywamy zespół równań

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{1.4}$$

gdzie $f_1, f_2, \dots, f_n$ są zadanymi funkcjami określonymi na zbiorze $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o wartościach w $\mathbb{R}$, natomiast $x_1, x_2, \dots, x_n$ są szukanymi funkcjami zmiennej t .

Rozwiązaniem układu równań (1.4) w przedziale I nazywamy układ funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ określonych w przedziale I , różniczkowalnych w tym przedziale i takich, że $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U$ oraz

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n'(t) &= f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \end{aligned}$$

dla $t \in I$.

Wprowadzając zapis wektorowy $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, układ równań (1.4) możemy zapisać w postaci (1.3).

W dalszym ciągu, jeśli x przyjmuje wartości skalarne, równanie (1.3) będziemy nazywać *równaniem skalarnym*, jeśli x przyjmuje wartości wektorowe, *równaniem wektorowym*. Jeśli z kontekstu będzie jasno wynikać, o jaki typ równania chodzi, będziemy używać krótkiej formy: równanie.

Przyjmując

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \dots, \quad x_n = x^{(n-1)},$$

równanie (1.2) możemy sprowadzić do układu równań:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Zbiór rozwiązań równania (1.1) (odp. (1.2)) tworzy rodzinę funkcji zależną od n parametrów. Można zatem szukać rozwiązania, które dodatkowo spełnia zadane n warunków. Najprostsze warunki to żądanie, aby rozwiązanie przechodziło przez z góry zadany punkt (t_0, x_0) i ponadto w punkcie $t = t_0$ pochodne do rzędu $n - 1$ przyjmowały zadane wartości $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, tzn. rozwiązanie to winno spełniać warunki:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \quad (1.6)$$

Warunki (1.6) nazywamy warunkami początkowymi, a zagadnienie znalezienia rozwiązania równania (1.2) (lub (1.1)) spełniające warunki (1.6) nazywamy *problemem początkowym* albo *problemem Cauchy'ego*.

Na przykład dla równania wektorowego pierwszego rzędu problem Cauchy'ego ma postać

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.7)$$

gdzie $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ są zadanymi wartościami.

Nietrudno sprawdzić, że rozwiązaniem problemu

$$x'' = 6t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2,$$

jest funkcja $x = t^3 + 2t + 1$.

Uwaga 1.1. W przypadku gdy f jest funkcją ciągłą, problem (1.7) jest równoważny znalezieniu rozwiązania równania całkowego

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (1.8)$$

(Przez całkę z funkcji wektorowej f rozumiemy funkcję wektorową, której współrzędnymi są całki współrzędnych funkcji f).

Istotnie, całkując równanie (1.7) przy warunku $x(t_0) = x_0$ w przedziale $[t_0, t]$, otrzymamy (1.8). Na odwrót, przyjmując $t = t_0$ w (1.8), otrzymamy $x(t_0) = x_0$. Natomiast różniczkując (1.8), otrzymamy równość $x' = f(t, x)$.

Podstawowy wynik dotyczący problemu Cauchy'ego (twierdzenie Peano) mówi, że jeśli f jest funkcją ciągłą, problem (1.7) ma co najmniej jedno rozwiązanie. Jeśli dodatkowo założymy, że funkcja f jest klasy C^1 , albo spełnia tzw. warunek Lipschitza względem zmiennej x , rozwiązanie jest jedyne. Poniższe przykłady pokazują, że ciągłość funkcji f nie zapewnia jednoznaczności rozwiązań.

Przykład 1.1. Rozważmy problem Cauchy'ego

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0.$$

Oczywiście funkcja $x(t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem tego problemu. Nietrudno też sprawdzić, że dla dowolnego $\alpha \geq 0$ funkcja

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t \leq \alpha, \\ (t - \alpha)^2/4, & \text{jeśli } t > \alpha, \end{cases}$$

jest również rozwiązaniem naszego problemu. Problem ma więc nieskończenie wiele rozwiązań na $\mathbb{R}$.

Przykład 1.2. Rozważmy problem Cauchy'ego

$$x' = 2\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

Oczywiście funkcja $x_1(t) = 0$ jest rozwiązaniem tego problemu. Nietrudno też sprawdzić, że dla dowolnego $\alpha \geq 0$ funkcja

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} -(t + \alpha)^2, & \text{jeśli } t < -\alpha, \\ 0, & \text{jeśli } -\alpha \leq t \leq \alpha, \\ (t - \alpha)^2, & \text{jeśli } t > \alpha, \end{cases}$$

jest też rozwiązaniem naszego problemu. Rozwiązanie tego problemu nie jest więc określone jednoznacznie na $\mathbb{R}$.

Przykład 1.3. Rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$tx' = 2x, \quad x(0) = 0$$

jest rodzina funkcji

$$x(t) = \begin{cases} at^2, & \text{jeśli } t < 0, \\ bt^2, & \text{jeśli } t \geq 0, \end{cases}$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Oznacza to, że rozważany problem początkowy ma na zbiorze $\mathbb{R}$ nieskończenie wiele rozwiązań.

1.2. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równania skalarnego

Wpierw wykażemy dwa proste lematy, które wykorzystamy w dowodzie twierdzenia o lokalnym istnieniu rozwiązań.

Lemat 1.1. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem funkcji skalarnych określonych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$ takim, że

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \alpha_n \quad \text{dla } t \in I, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Założmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny. Wówczas ciąg $\{x_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale I . Jeśli ponadto funkcje x_n są ciągłe, to również granica tego ciągu jest funkcją ciągłą.

Dowód. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny, spełnia więc warunek Cauchy'ego zbieżności szeregu, co oznacza, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że

$$\alpha_m + \dots + \alpha_{n-1} < \varepsilon \quad \text{dla dowolnych } n, m \geq n_0, \quad m < n.$$

Niech $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie dobrane zgodnie z powyższym warunkiem. Na mocy przyjętych założeń dla dowolnych $n, m \geq n_0$ ($m < n$) oraz $t \in I$ mamy

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leq |x_{m+1}(t) - x_m(t)| + |x_{m+2}(t) - x_{m+1}(t)| + \dots$$

$$+|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \leq \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_{n-1} < \varepsilon.$$

Ponieważ ostatnia nierówność zachodzi dla dowolnego $t \in I$, wnioskujemy stąd, że

$$\sup_{t \in I} \{|x_n(t) - x_m(t)|\} \leq \varepsilon \quad \text{dla } n, m \geq n_0,$$

co oznacza, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego w metryce zbieżności jednostajnej. Zatem jest on jednostajnie zbieżny. Ponieważ granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą, dowód jest kompletny.

Lemat 1.2. Niech $f : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Niech $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, będzie ciągiem funkcji ciągłych, zbieżnym jednostajnie w przedziale $[\alpha, \beta]$ do funkcji φ . Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^s f(t, \varphi_n(t)) dt = \int_{\alpha}^s f(t, \varphi(t)) dt \quad \text{dla } s \in [\alpha, \beta].$$

Dowód. Zauważmy wpierw, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na zbiorze $[\alpha, \beta] \times [a, b]$. Niech $\varepsilon > 0$. Połóżmy $\varepsilon' = \varepsilon/(\beta - \alpha)$. Ustalmy $\delta > 0$ tak, aby

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| < \varepsilon' \quad \text{dla } t \in [\alpha, \beta], \quad x, \tilde{x} \in [a, b], \quad |x - \tilde{x}| < \delta.$$

Następnie dobierzmy n_0 tak, aby

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \delta \quad \text{dla } n \geq n_0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Oczywiście

$$|f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon' \quad \text{dla } n \geq n_0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Zatem dla $n \geq n_0$ oraz $s \in [\alpha, \beta]$ mamy

$$\left| \int_{\alpha}^s f(t, \varphi_n(t)) dt - \int_{\alpha}^s f(t, \varphi(t)) dt \right| \leq \int_{\alpha}^s |f(t, \varphi_n(t)) - f(t, \varphi(t))| dt < \varepsilon'(s - \alpha) \leq \varepsilon,$$

co kończy dowód lematu.

Definicja 1.1. Mówimy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) spełnia warunek Lipschitza (jest funkcją lipschitzowską) na zbiorze I , jeśli istnieje stała $L \geq 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in I$ zachodzi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Mówimy, że funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) spełnia warunek Lipschitza (lub jest funkcją lipschitzowską) względem drugiej zmiennej na zbiorze U , jeśli istnieje stała $L \geq 0$ taka, że dla dowolnych $(t, x), (t, y) \in U$ zachodzi

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|.$$

Najmniejszą wartość stałej, dla której zachodzi powyższe oszacowanie, nazywamy stałą Lipschitza.

Mówimy, że funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest *lokalnie lipschitzowska* na zbiorze U , jeśli dla każdego punktu ze zbioru U istnieje otoczenie tego punktu, w którym funkcja spełnia warunek Lipschitza (oczywiście stała Lipschitza zależy od otoczenia).

Mówimy, że funkcja f jest *lokalnie lipschitzowska względem drugiej zmiennej* na zbiorze U , jeśli dla każdego punktu ze zbioru U istnieje otoczenie tego punktu, w którym funkcja spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej, przy czym stała Lipschitza zależy od otoczenia.

Funkcja lokalnie lipschitzowska nie musi być lipschitzowska. Na przykład funkcja $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ jest lokalnie lipschitzowska, lecz nie jest lipschitzowska w zbiorze $(0, 1)$. Funkcja różniczkowalna na zbiorze otwartym $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ jest lokalnie lipschitzowska, a funkcja różniczkowalna na zbiorze domkniętym $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ jest lipschitzowska.

Twierdzenie 1.1. (Istnienie i jednoznaczność rozwiązań lokalnych). *Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, $a, b > 0$, będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stałą L . Wówczas problem Cauchy'ego*

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.9)$$

ma rozwiązanie w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, b/M, 1/(2L)\}$, $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in P\}$, ponadto rozwiązanie to jest określone jednoznacznie.

Dowód. Stosując metodę indukcji matematycznej, skonstruujemy ciąg funkcji $\{x_n\}$, $x_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, za pomocą wzoru

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \quad (1.10)$$

gdzie $x_0(t) = x_0$. Ciąg $\{x_n\}$ nosi nazwę ciągu kolejnych przybliżeń Picarda.

Dla uproszczenia rozważań ograniczymy się do przedziału $[t_0, t_0 + \alpha]$ (dla przedziału $[t_0 - \alpha, t_0]$ argument jest analogiczny). Zauważmy wpierw, że funkcja x_1 jest określona dla dowolnego $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ i ponadto

$$|x_1(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, x_0)| ds \leq M(t - t_0) \leq b. \quad (1.11)$$

Zatem $(t, x_1(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Wynika stąd, że funkcja x_1 jest określona dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ i ponadto $(t, x_1(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Wykorzystując indukcję matematyczną, nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja x_n jest określona w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ i ponadto $|x_n(t) - x_0| \leq b$, czyli $(t, x_n(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Pokażemy następnie, że dla $n = 0, 1, 2, \dots$ mamy

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{ML^n(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \quad (1.12)$$

Istotnie, dla $n = 0$ wzór (1.12) jest prawdziwy na mocy (1.11) i definicji liczby α . Dla dowodu metodą indukcji przypuśćmy, że wzór (1.12) jest prawdziwy dla $n = k$.

Wówczas

$$\begin{aligned}
 |x_{k+2}(t) - x_{k+1}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, x_{k+1}(s)) - f(s, x_k(s))] ds \right| \\
 &\leq \int_{t_0}^t L |x_{k+1}(s) - x_k(s)| ds \\
 &\leq \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!} \int_{t_0}^t (s - t_0)^{k+1} ds = \frac{ML^{k+1}}{(k+2)!} (t - t_0)^{k+2},
 \end{aligned}$$

co kończy dowód wzoru (1.12). Z oszacowania (1.12) wynika natychmiast, że

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ponieważ szereg

$$\frac{M}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^{n+1}}{(n+1)!}$$

jest zbieżny, na mocy lematu 1.1 ciąg $\{x_n\}$ jest jednostajnie zbieżny w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$. Oznaczmy jego granicę przez φ .

Przechodząc we wzorze (1.10) z n do nieskończoności i wykorzystując lemat 1.2, otrzymamy

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + \alpha],$$

co zgodnie z uwagą 1.1 oznacza, że φ jest rozwiązaniem problemu (1.9).

Aby zakończyć dowód, pozostaje pokazać, że rozwiązanie to jest jedyne. Niech $x, y : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ będą rozwiązaniami problemu (1.9). Zgodnie z uwagą 1.1

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad y(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
 |y(t) - x(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, x(s))| ds \\
 &\leq L \int_{t_0}^t |y(s) - x(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t \|y - x\|_0 ds \leq \alpha L \|y - x\|_0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\|y - x\|_0 = \max\{|y(t) - x(t)| : t \in [t_0, t_0 + \alpha]\}.$$

Powyższe oszacowanie zachodzi dla dowolnego $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Przechodząc po lewej stronie ostatniej nierówności do supremum względem $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, otrzymamy

$$\|y - x\|_0 \leq \alpha L \|y - x\|_0.$$

Ponieważ $\alpha L < 1$, nierówność ta jest możliwa tylko wtedy, gdy $\|y - x\|_0 = 0$, co kończy dowód.

Uwaga 1.2. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą, spełniającą lokalnie warunek Lipschitza względem zmiennej x . Wówczas dla dowolnego $(t_0, x_0) \in U$ problem początkowy (1.9) posiada lokalnie dokładnie jedno rozwiązanie.

Istotnie, niech $(t_0, x_0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, istnieje otoczenie punktu (t_0, x_0) zawarte w U , w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Wystarczy teraz wziąć zbiór postaci P zawarty w tym otoczeniu i wykorzystać twierdzenie 1.1.

1.3. Metoda odwzorowań zwężających

Twierdzenie 1.1 można pokazać, wykorzystując twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że ciąg $\{x_n\} \subset X$ spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ dla dowolnych $m, n \geq n_0$. Przestrzeń (X, d) nazywamy *zupełną*, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni spełniający warunek Cauchy'ego jest zbieżny.

Twierdzenie Banacha. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech funkcja $f : X \rightarrow X$ spełnia warunek

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{dla } x, y \in X,$$

gdzie $0 < k < 1$. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $x^* \in X$ taki, że

$$f(x^*) = x^*.$$

Ponadto, dla dowolnego $x \in X$ ciąg $\{f^n(x)\}$, gdzie $f^0(x) = x$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, $n = 1, 2, \dots$, jest zbieżny do x^* .

Punkt x^* nazywamy punktem stałym odwzorowania f .

Dowód. Ustalmy $x_0 \in X$ i połóżmy

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \leq kd(x_1, x_0), \\ d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Metodą indukcji matematycznej łatwo sprawdzić, że

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq k^{n-1} d(x_1, x_0).$$

Wykorzystując nierówność trójkąta oraz ostatnie oszacowanie, dla $n > m$ otrzymamy

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq k^{n-1}d(x_1, x_0) + k^{n-2}d(x_1, x_0) + \dots + k^m d(x_1, x_0) \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1})d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k}d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć m_0 takie, że $k^m/(1-k) < \varepsilon$ dla $m > m_0$. Wynika stąd, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a ponieważ X jest przestrzenią zupełną, jest on zbieżny do pewnego elementu x^* . Przechodząc z n do nieskończoności w nierówności

$$d(f(x_n), x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}),$$

otrzymamy

$$d(f(x^*), x^*) \leq kd(x^*, x^*),$$

skąd wynika, że $f(x^*) = x^*$. Pozostaje sprawdzić, że x^* jest jedynym punktem stałym odwzorowania f . Istotnie, przypuśćmy, że $\tilde{x}$ jest również punktem stałym odwzorowania f . Wówczas

$$d(x^*, \tilde{x}) = d(f(x^*), f(\tilde{x})) \leq kd(x^*, \tilde{x}),$$

skąd natychmiast wynika, że $d(x^*, \tilde{x}) = 0$, czyli $x^* = \tilde{x}$. Ponieważ punkt x_0 był ustalony dowolnie, ciąg $\{f^n(x)\}$ dąży do x^* dla dowolnego $x \in X$. Dowód jest kompletny.

Dowód twierdzenia 1.1 metodą odwzorowań zwężających. Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 1.1. Oznaczmy przez $\mathcal{C}$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych

$$x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow [x_0 - b, x_0 + b].$$

Dla $x, y \in \mathcal{C}$ połóżmy

$$d_0(x, y) = \sup \{|x(t) - y(t)| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $(\mathcal{C}, d_0)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dla $x \in \mathcal{C}$ połóżmy

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds.$$

Zauważmy, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ jest dobrze określone w zbiorze $\mathcal{C}$ i ponadto

$$|\mathcal{F}(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t Mds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Oznacza to, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ przekształca zbiór $\mathcal{C}$ w siebie. Ponadto, dla $x, y \in \mathcal{C}$ oraz $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mamy

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x)(t) - \mathcal{F}(y)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x(s) - y(s)|ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t Ld_0(x, y)ds \right| \leq \alpha Ld_0(x, y). \end{aligned}$$

Przechodząc po lewej stronie do supremum względem t otrzymamy

$$d_0(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq \alpha L d_0(x, y).$$

Ponieważ $\alpha L < 1$ z twierdzenia Banacha wynika, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ posiada dokładnie jeden punkt stały, co wobec uwagi 1.1 kończy dowód twierdzenia 1.1.

1.4. Przedłużanie rozwiązań

Niech funkcje $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ będą rozwiązaniami problemu (1.9). Załóżmy, że

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{dla } t \in I \cap J.$$

Jeśli $I \subset J$, rozwiązanie ψ nazywamy przedłużeniem rozwiązania φ . Powstaje naturalne pytanie: istnieje maksymalny przedział w którym problemu (1.9) posiada rozwiązanie? Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2. *Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym, będzie funkcją ciągłą, ograniczoną, lokalnie lipschitzowską względem zmiennej x . Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x_0) \in U$ problem (1.9) posiada rozwiązanie określone jednoznacznie i ponadto rozwiązanie to, albo można przedłużyć w prawo tak, aby było określone w przedziale $[t_0, +\infty)$ albo, aby osiągnęło brzeg obszaru U . Podobnie rozwiązanie to można przedłużyć w lewo tak, aby było określone w przedziale $(-\infty, t_0]$ albo, aby osiągnęło brzeg obszaru U .*

Dowód. Niech $(t_0, x_0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, istnieje otoczenie punktu (t_0, x_0) zawarte w U , w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Dobierzmy $a > 0$ i $b > 0$ tak, aby zbiór $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ był zawarty w tym otoczeniu. Na mocy twierdzenia 1.1 problem (1.9) ma rozwiązanie lokalne i jest ono jedyne. Połóżmy

$$\Delta = \{h > t_0 : \text{problem (1.9) ma rozwiązanie w przedziale } [t_0, h]\}.$$

Na mocy poprzednich rozważań zbiór Δ jest niepusty. Niech $t_* = \sup \Delta$. Zauważmy wprawdzie, że problem (1.9) ma rozwiązanie określone w przedziale $[t_0, t_*)$. Istotnie, niech $t \in [t_0, t_*)$. Z własności supremum wynika, że istnieje $h \in \Delta$, $t < h < t_*$ takie, że problem (1.9) ma rozwiązanie określone w przedziale $[t_0, h]$, ponadto jest ono w tym przedziale jedyne. Oznacza to, że dla dowolnego $t \in [t_0, t_*)$ istnieje rozwiązanie określone w tym punkcie i ponadto każde rozwiązanie określone w tym punkcie przyjmuje taką samą wartość. Oznaczmy ją przez $\varphi(t)$. Oczywiście tak określona funkcja $\varphi : [t_0, t_*) \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem problemu (1.9). Jeśli $t_* = \infty$, dowód jest zakończony. Przypuśćmy, że $t_* < \infty$. Dla dowolnych $s, t \in [t_0, t_*)$ mamy

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \left| \int_s^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - s|,$$

gdzie M jest stałą taką, że $|f(t, x)| \leq M$ dla $(t, x) \in U$. Z powyższego oszacowania wynika, że funkcja φ spełnia warunek Cauchy'ego zbieżności w lewostronnym otoczeniu

punktu t^* , skąd wynika istnienie granicy $\lim_{t \rightarrow t_*} \varphi(t)$ (zob. zadanie 10). Oznaczmy tę granicę przez x_* . Jeśli $(t_*, x_*) \in \partial U$ teza twierdzenia jest spełniona. Jeśli $(t_*, x_*) \in U$ wówczas problem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_*) = x_*$$

ma – zgodnie z twierdzeniem 1.1 – rozwiązanie w pewnym przedziale $(t_* - \delta, t_* + \delta)$. Oznacza to, że rozwiązanie problemu (1.9) istnieje co najmniej w przedziale $[t_0, t_* + \delta)$, co jest sprzeczne z definicją t_* . Zatem $t_* = \infty$ lub $(t_*, x_*) \in \partial U$. Ponieważ argument na przedłużenie w lewo jest analogiczny, dowód twierdzenia 1.2 jest kompletny.

Przykład 1.4. Rozwiązaniem problemu

$$x' = x^2, \quad x(1) = 1$$

jest funkcja $x = 1/(2 - t)$, a maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania jest przedział $(-\infty, 2)$.

Uwaga 1.3. Z twierdzenia 1.2 wynika natychmiast, że wielkość przedziału istnienia rozwiązania nie zależy od stałej Lipschitza. Na przykład przy założeniach twierdzenia 1.1, rozwiązanie istnieje co najmniej w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, b/M\}$.

1.5. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równania wektorowego

Rozważmy problem początkowy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.13)$$

gdzie: $t \in \mathbb{R}$, $x \in R^n$, $(t_0, x^0) \in U$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset R^{n+1}$) jest zadaną funkcją ciągłą.

Mówimy, że funkcja $f : U \rightarrow R^n$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej wektorowej x , jeśli istnieje stała $L > 0$ taka, że dla dowolnych $(t, x), (t, y) \in U$ zachodzi

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

gdzie symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni R^n . Przyjmijmy, że dla $x \in R^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, norma $\|x\|$ określona jest wzorem

$$\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Mówimy, że funkcja $f : U \rightarrow R^n$ spełnia lokalnie warunek Lipschitza względem zmiennej wektorowej x , jeżeli każdy punkt $(t, x) \in U$ posiada otoczenie, w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej x .

Twierdzenie 1.3. (Istnienie i jednoznaczność rozwiązań lokalnych). Niech $f : P \rightarrow R^n$, gdzie $P = \{(t, x) \in R^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|x - x^0\| \leq b\}$, jest funkcją ciągłą, spełniającą warunek Lipschitza względem zmiennej x ze stałą L . Wówczas

problem Cauchy'ego (1.13) posiada rozwiązanie w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, b/M, 1/(2L)\}$, $M = \max\{\|f(t, x)\| : (t, x) \in P\}$, ponadto rozwiązanie to jest określone jednoznacznie.

Dowód. Niech $\mathcal{C}$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych

$$x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow [x_1^0 - b, x_1^0 + b] \times \dots \times [x_n^0 - b, x_n^0 + b].$$

Dla $x, y \in \mathcal{C}$ połóżmy

$$d_0(x, y) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \sup \{|x_i(t) - y_i(t)| : t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $(\mathcal{C}, d_0)$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dla $x \in \mathcal{C}$ połóżmy

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Zauważmy, że $\mathcal{F}(x)$ jest funkcją ciągłą określoną na $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, o wartościach w $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnego $x \in \mathcal{C}$ i $i \in \{1, \dots, n\}$ mamy

$$|\mathcal{F}(x)_i(t) - x_i^0| \leq \left| \int_{t_0}^t f_i(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(s, x(s))| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| \leq M\alpha \leq b.$$

Stąd wnioskujemy natychmiast, że $\|\mathcal{F}(x)(t) - x^0\| \leq b$ dla $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, a to oznacza, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ przekształca zbiór $\mathcal{C}$ w siebie.

Dla $x, y \in \mathcal{C}$ oraz $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ mamy

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x)_i(t) - \mathcal{F}(y)_i(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f_i(s, x(s)) - f_i(s, y(s))) ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t L|x_i(s) - y_i(s)| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t Ld_0(x, y) ds \right| \leq \alpha Ld_0(x, y). \end{aligned}$$

Przechodząc po lewej stronie do supremum względem t na zbiorze $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, a następnie do maksimum po $i \in \{1, \dots, n\}$ otrzymamy

$$d_0(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq \alpha Ld_0(x, y).$$

Ponieważ $\alpha L < 1$, z twierdzenia Banacha wynika, że odwzorowanie $\mathcal{F}$ posiada dokładnie jeden punkt stały, co wobec uwagi 1.1 kończy dowód twierdzenia 1.3.

Uwaga 1.4. Załóżmy, że $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, jest funkcją ciągłą, spełniającą lokalnie warunek Lipschitza względem zmiennej x . Wówczas dla dowolnego $(t_0, x_0) \in U$ problem początkowy (1.13) ma lokalnie dokładnie jedno rozwiązanie.

Istotnie, niech $(t_0, x_0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, istnieje otoczenie punktu (t_0, x_0) zawarte w U , w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Wystarczy teraz wziąć zbiór postaci P zawarty w tym otoczeniu i wykorzystać twierdzenie 1.3.

Niech funkcje $\varphi : I \rightarrow R^n$, $\psi : J \rightarrow R^n$ będą rozwiązaniami problemu (1.13). Załóżmy, że

$$\varphi(t) = \psi(t) \quad \text{dla } t \in I \cap J.$$

Jeśli $I \subset J$, rozwiązanie ψ nazywamy przedłużeniem rozwiązania φ .

Twierdzenie 1.4. *Niech $f : U \rightarrow R^n$, gdzie $U \subset R^{n+1}$ jest zbiorem otwartym, będzie funkcją ciągłą, ograniczoną, lokalnie lipschitzowską względem zmiennej x . Wówczas dla dowolnego punktu $(t_0, x^0) \in U$ problem (1.13) posiada rozwiązanie określone jednoznacznie i ponadto rozwiązanie to, albo można przedłużyć w prawo tak, aby było określone w przedziale $[t_0, +\infty)$, albo aby osiągnęło brzeg obszaru U . Podobnie rozwiązanie to można przedłużyć w lewo tak, aby było określone w przedziale $(-\infty, t_0]$ albo, aby osiągnęło brzeg obszaru U*

Dowód. Niech $(t_0, x^0) \in U$. Ponieważ U jest zbiorem otwartym, istnieje otoczeniu punktu (t_0, x^0) zawarte w U , w którym funkcja f spełnia warunek Lipschitza. Wybierzmy $a > 0$ i $b > 0$ tak, aby zbiór $P = \{(t, x) \in R^{n+1} : |t - t_0| \leq a, \|x - x^0\| \leq b\}$ był zawarty w tym otoczeniu. Na mocy twierdzenia 1.3 problem (1.13) ma rozwiązanie lokalne. Połóżmy

$$\Delta = \{h > t_0 : \text{problem (1.13) ma rozwiązanie w przedziale } [t_0, h]\}.$$

Na mocy poprzednich rozważań zbiór Δ jest niepusty. Niech $t_* = \sup \Delta$. Zauważmy wprawdzie, że problem (1.13) ma rozwiązanie określone w przedziale $[t_0, t_*)$ i ponadto rozwiązanie to jest określone jednoznacznie. Istotnie, niech $t \in [t_0, t_*)$. Z własności supremum wynika, że istnieje $t < h < t_*$ takie, że problem (1.13) ma rozwiązanie określone w przedziale $[t_0, h]$, ponadto jest ono w tym przedziale jedyne. Oznacza to, że dla $t \in [t_0, t_*)$ istnieje rozwiązanie określone w tym punkcie i ponadto każde rozwiązanie określone w tym punkcie przyjmuje taką samą wartość. Oznaczmy ją przez $\varphi(t)$. Oczywiście tak określona funkcja $\varphi : [t_0, t_*) \rightarrow R^n$ jest rozwiązaniem problemu (1.13). Jeśli $t_* = \infty$, dowód jest zakończony. Przypuśćmy, że $t_* < \infty$. Dla dowolnych $s, t \in [t_0, t_*)$ oraz $i \in \{1, \dots, n\}$ mamy

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(s)| = \left| \int_s^t f_i(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - s|,$$

gdzie M jest stałą taką, że $\|f(t, x)\| \leq M$ dla $(t, x) \in U$. Z powyższego oszacowania wynika, że granica $\lim_{t \rightarrow t_*} \varphi_i(t)$ spełnia warunek Cauchy'ego w lewostronnym otoczeniu punktu t_* , zatem granica ta istnieje, gdy $t \rightarrow t_*$, $t < t_*$ (zob. zadanie 10). Oznaczmy ją przez x_i^* . Oznacza to, że $\lim_{t \rightarrow t_*-0} \|\varphi(t) - x^*\| = 0$, gdzie $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. Jeśli $(t_*, x^*) \in \partial U$, teza twierdzenia jest spełniona. Jeśli $(t_*, x^*) \in U$, wówczas problem

$$x' = f(t, x), \quad x(t_*) = x^*$$

ma – zgodnie z twierdzeniem 1.3 – rozwiązanie w pewnym przedziale $(t_* - \delta, t_* + \delta)$. Oznacza to, że rozwiązanie problemu (1.13) istnieje co najmniej w przedziale $[t_0, t_* + \delta)$, co jest sprzeczne z definicją t_* . Zatem $t_* = \infty$ lub $(t_*, x^*) \in \partial U$. Ponieważ argument na przedłużenie w lewo jest analogiczny, dowód twierdzenia 1.4 jest kompletny.

1.6. Istnienie rozwiązań problemu Cauchy'ego dla równań o prawych stronach ciągłych

W niniejszym podrozdziale pokażemy, że dla istnienia rozwiązań problemu Cauchy'ego wystarczy założyć ciągłość prawych stron. Oczywiście rozwiązanie w tym przypadku nie musi być określone jednoznacznie (zob. przykłady: 1.1 – 1.3). Nasze rozważania rozpoczniemy od przypomnienia twierdzenia Ascoli–Arzela, które stanowi istotne narzędzie w prezentowanych dowodach.

Mówimy, że rodzina funkcji $\{x_n\}$, $x_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jest równociągła w punkcie $t_0 \in [\alpha, \beta]$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|x_n(t) - x_n(t_0)| < \varepsilon \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [\alpha, \beta].$$

Mówimy, że rodzina $\{x_n\}$ jest równociągła w zbiorze $[\alpha, \beta]$, jeśli jest równociągła w każdym punkcie tego zbioru.

Mówimy, że rodzina $\{x_n\}$ jest ograniczona w punkcie $t_0 \in [\alpha, \beta]$, jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|x_n(t_0)| \leq M \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Mówimy, że rodzina funkcji $\{x_n\}$ jest wspólnie ograniczona w zbiorze $[\alpha, \beta]$, jeśli jest ograniczona w każdym punkcie tego zbioru. Jeśli ponadto stała M nie zależy od punktu, mówimy, że rodzina $\{x_n\}$ jest jednostajnie ograniczona.

Nietrudno sprawdzić, że rodzina $\{x_n\}$ równociągła i wspólnie ograniczona w $[\alpha, \beta]$ jest jednostajnie ograniczona w $[\alpha, \beta]$.

Twierdzenie Ascoli–Arzela. *Z każdego ciągu funkcji $\{x_n\}$ równociągłych i wspólnie ograniczonych w przedziale $[\alpha, \beta]$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}$ jednostajnie zbieżny w przedziale $[\alpha, \beta]$.*

Dowód. Niech ciąg $\{\tau_i\}$ będzie zbiorem gęstym w przedziale $[\alpha, \beta]$. Ponieważ ciąg liczbowy $\{x_n(\tau_1)\}$ jest ograniczony, istnieje podciąg $\{x_{1,n}\}$ ciągu $\{x_n\}$ zbieżny w punkcie τ_1 . Podobnie, ponieważ ciąg liczbowy $\{x_{1,n}(\tau_2)\}$ jest ograniczony, istnieje podciąg $\{x_{2,n}\}$ ciągu $\{x_{1,n}\}$ zbieżny w punkcie τ_2 . Oczywiście jest on też zbieżny w punkcie τ_1 . Korzystając z indukcji, możemy skonstruować rodzinę ciągów $\{x_{1,n}\}, \{x_{2,n}\}, \dots$ taką, że $\{x_{k,n}\}$ jest podciągiem ciągu $\{x_{k-1,n}\}$ oraz $\{x_{k,n}\}$ jest zbieżny w punktach $\tau_1, \dots, \tau_k$.

Położmy $y_k = x_{k,k}$. Zauważmy, że w każdym punkcie τ_i ciąg liczbowy $\{y_k(\tau_i)\}$ jest zbieżny. Niech $\varepsilon > 0$. Na mocy równociągłości rodziny $\{y_k\}$ dla każdego $t \in [\alpha, \beta]$ istnieje $\delta_t = \delta_t(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$|y_k(s) - y_k(t)| < \varepsilon \quad \text{dla } s \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \cap [\alpha, \beta], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście rodzina przedziałów $\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ jest pokryciem otwartym zbioru $[\alpha, \beta]$. Ponieważ zbiór $[\alpha, \beta]$ jest zwarty, można wybrać pokrycie skończone $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1), \dots, (t_l - \delta_l, t_l + \delta_l)$ gdzie $\delta_i = \delta_{t_i}$. Ponieważ ciąg $\{\tau_i\}$ jest gęsty w $[\alpha, \beta]$, dla każdego $k \in \{1, \dots, l\}$ istnieje element ciągu $\{\tau_i\}$ leżący w przedziale $(t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$. Oznaczmy ten element przez $\tilde{t}_k$.

Ponieważ ciąg $\{y_n(\tilde{t}_k)\}$ jest zbieżny, możemy wybrać $\tilde{n}_k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|y_m(\tilde{t}_k) - y_n(\tilde{t}_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla } n, m \geq \tilde{n}_k.$$

Położmy

$$n_0 = \max\{\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_l\}.$$

Niech $t \in [\alpha, \beta]$. Oczywiście $t \in (t_k - \delta_k, t_k + \delta_k)$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, l\}$. Dla $m, n \geq n_0$ otrzymamy

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_m(t)| &\leq |y_n(t) - y_n(\tilde{t}_k)| + |y_n(\tilde{t}_k) - y_m(\tilde{t}_k)| + \\ &\quad + |y_m(\tilde{t}_k) - y_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ element $t \in [\alpha, \beta]$ jest dowolny, oznacza to, że ciąg $\{y_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności, co kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie 1.5 (Peano). Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, $a, b > 0$, będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $|f(t, x)| \leq M$ dla $(t, x) \in P$. Niech $\alpha = \min\{a, b/M\}$. Wówczas problem (1.9) ma w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ co najmniej jedno rozwiązanie.

Dowód metodą przybliżeń Tonelliego. Dla uproszczenia zapisu rozważmy przedział $[t_0, t_0 + \alpha]$ (dla przedziału $[t_0 - \alpha, t_0]$ argument jest podobny). Dla $n \in \mathbb{N}$ połączmy

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau - \delta_n)) d\tau, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad (1.14)$$

gdzie $\delta_n = \alpha/n$, $x_n(t) = x_0$ dla $t \in [t_0 - \delta_n, t_0]$. Wpierw pokażemy, że funkcja x_n jest określona w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Zauważmy, że funkcja x_n jest określona w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ i ponadto $(t, x_n(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Istotnie, dla $t \in [t_0, t_0 + \delta_n]$ mamy

$$|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_0) d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Zatem $(t, x_n(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + \delta_n]$. Oznacza to, że funkcja x_n jest również określona w przedziale $[t_0 + \delta_n, t_0 + 2\delta_n]$. Przypuśćmy, że funkcja x_n jest określona w przedziale $[t_0, t_0 + k\delta_n]$, gdzie $1 < k < n$, ponadto $(t, x_n(t)) \in P$ dla $t \in [t_0, t_0 + k\delta_n]$. Wówczas dla $t \in [t_0 + k\delta_n, t_0 + (k+1)\delta_n]$ mamy

$$|x_n(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau - \delta_n)) d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq b,$$

co oznacza, że żądane warunki zachodzą w przedziale $[t_0, t_0 + (k+1)\delta_n]$. Na mocy indukcji matematycznej zachodzą one w całym przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Zauważmy też, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $s, t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ mamy

$$|x_n(t) - x_n(s)| = \left| \int_s^t f(\tau, x_n(\tau - \delta_n)) d\tau \right| \leq M|t - s|.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że ciąg funkcji $\{x_n\}$ jest w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ równością. Na mocy twierdzenia Ascoli–Arzela istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny jednostajnie w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$. Oznaczmy granicę tego podciągu przez φ . Przechodząc z n_k do nieskończoności w równości

$$x_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_{n_k}(\tau - \delta_{n_k})) d\tau,$$

na mocy lematu 1.2 oraz równości ciągu $\{x_{n_k}\}$, otrzymamy

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

co – zgodnie z uwagą 1.1 – oznacza, że φ jest rozwiązaniem problemu (1.13).

Dowód metodą łamanych Eulera. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$t_i^n = t_0 + i\delta_n, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\delta_n = \alpha/n$, a następnie rozważmy funkcje

$$x_n(t) = \begin{cases} x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0) & \text{dla } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta_n, \\ x_n(t_i^n) + f(t_i^n, x_n(t_i^n))(t - t_i^n) & \text{dla } t_i^n < t \leq t_{i+1}^n, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Podobnie jak w poprzednim dowodzie można sprawdzić, wykorzystując indukcję matematyczną, że w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ funkcja x_n jest dobrze zdefiniowana i ponadto

$$|x_n(t) - x_0| \leq M(t - t_0) \leq b.$$

Zatem $(t, x_n(t)) \in P$ dla $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Rozważmy funkcję $\psi_n : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\psi_n(t) = f(t_i^n, x_n(t_i^n)) \quad \text{dla } t_i^n \leq t \leq t_{i+1}^n, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zauważmy, że

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \psi_n(\tau) d\tau, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Oczywiście dla $s, t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ mamy

$$|x_n(t) - x_n(s)| = \left| \int_s^t \psi_n(\tau) d\tau \right| \leq M|t - s|.$$

Z ostatniej nierówności wynika, że ciąg $\{x_n\}$ jest w przedziale $[t_0, t_0 + \alpha]$ równością. Ponieważ ciąg ten jest też wspólnie ograniczony, na mocy twierdzenia Ascoli–Arzela istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ jednostajnie zbieżny, powiedzmy do funkcji φ .

Oczywiście

$$x_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t [\psi_{n_k}(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))] d\tau. \quad (1.15)$$

Ponieważ funkcja f jest jednostajnie ciągła w zbiorze P , dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że

$$|\psi_{n_k}(\tau) - f(\tau, \varphi(\tau))| < \varepsilon \quad \text{dla } n_k \geq n_0, \quad \tau \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Wynika stąd, że ostatni wyraz we wzorze (1.15) dąży do zera, gdy n_k dąży do nieskończoności. Przechodząc zatem do granicy we wzorze (1.15), otrzymamy

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

co kończy dowód.

Sformułowanie i dowód analogu twierdzenia 1.5 dla problemu wektorowego (1.13) pozostawiamy czytelnikowi.

1.7. Dalsze przykłady twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań

Twierdzenie 1.5 mówi, że jeśli funkcja f jest ciągła, to problem (1.13) posiada lokalnie co najmniej jedno rozwiązanie. Aby pokazać, że rozwiązanie to jest określone jednoznacznie, założyliśmy dodatkowo (zob. twierdzenie 1.1 oraz 1.3), że funkcja f spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej. Warunek Lipschitza jest założeniem mocno ograniczającym. Wiadomo, że w przestrzeni funkcji ciągłych podzbiór funkcji spełniających warunek Lipschitza (również lokalnie) jest zbiorem małym (dokładnie jest to tzw. zbiór pierwszej kategorii Baire'a). Z drugiej strony wiadomo też, że zbiór funkcji ciągłych, dla których problem Cauchy'ego ma rozwiązanie niejednoznaczne, jest również zbiorem małym (też zbiorem pierwszej kategorii Baire'a). Oznacza to, że mamy wiele funkcji, które nie są lipschitzowskie, dla których zachodzi jednoznaczność rozwiązania problemu Cauchy'ego. Twierdzenie 1.1 obejmuje zatem tylko nieliczną część równań, dla których problem początkowy posiada jednoznaczne rozwiązanie. W niniejszym paragrafie podamy dalsze przykłady twierdzeń o jednoznaczności rozwiązań problemu Cauchy'ego (zob. [1], [3], [11]).

Twierdzenie 1.6. (Peano). *Niech $f : [t_0, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $f(t, \cdot)$ jest funkcją nierosnącą dla dowolnego $t \in [t_0, t_0 + a]$. Wówczas problem (1.9) ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 1.5 problem ma co najmniej jedno rozwiązanie określone w pewnym przedziale $[t_0, t_0 + h]$. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że w przedziale tym istnieją dwa różne rozwiązania x_1 i x_2 . Oczywiście $x_1(t_0) = x_2(t_0)$. Przypuśćmy, że $x_1(\hat{t}) \neq x_2(\hat{t})$ dla pewnego $\hat{t} \in [t_0, t_0 + h]$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $x_1(\hat{t}) < x_2(\hat{t})$. Połóżmy

$$\tilde{t} = \inf\{\bar{t} \leq \hat{t} : x_1(t) < x_2(t) \text{ dla } t \in [\bar{t}, \hat{t}]\}.$$

Oczywiście $\tilde{t} \geq t_0$, a ze względu na ciągłość rozwiązań $x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$. Zgodnie z przyjętymi założeniami $f(t, x_1(t)) \geq f(t, x_2(t))$ dla $t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$. Wynika stąd, że $x_1'(t) \geq x_2'(t)$ dla $t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$. Połóżmy $z(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Oczywiście $z(\tilde{t}) = 0$ oraz

$z'(t) \leq 0$ dla $t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$. Zatem $z(t) \leq 0$ dla $t \in (\tilde{t}, \hat{t}]$, co oznacza, że $x_1(t) \geq x_2(t)$ dla $t \in (\tilde{t}, \hat{t}]$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Lemat 1.3. Załóżmy, że $p : [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, rosnącą i taką, że $p(0) = 0$, $p(t) > 0$ dla $t > 0$ oraz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^a \frac{dt}{p(t)} = \infty, \quad (1.16)$$

gdzie $a > 0$. Jeśli $u : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek

$$u(t) \leq \int_0^t p(u(s))ds \quad \text{dla} \quad 0 < t \leq a, \quad (1.17)$$

to $u(t) \equiv 0$ w $[0, a]$.

Dowód. Załóżmy, że $u \neq 0$. Oczywiście $u(0) = 0$. Połóżmy

$$t_0 = \sup\{t > 0 : u(s) = 0 \text{ dla } s \in [0, t]\}.$$

Zauważmy, że $u(t_0) = 0$. Połóżmy

$$v(t) = \max\{u(s) : s \in [0, t]\}.$$

Oczywiście v jest funkcją rosnącą, $v(t) > 0$ dla $t > t_0$. Z ciągłości funkcji u wynika, że dla każdego $t \in [0, a]$ istnieje $\tau_t \in [0, t]$ takie, że $v(t) = u(\tau_t)$. Wykorzystując (1.17) oraz własności funkcji p , mamy

$$v(t) = u(\tau_t) \leq \int_0^{\tau_t} p(u(s))ds \leq \int_0^t p(v(s))ds. \quad (1.18)$$

Położmy

$$w(t) = \int_0^t p(v(s))ds. \quad (1.19)$$

Oczywiście $w(t_0) = 0$. Z (1.18) wynika, że $v(t) \leq w(t)$. Różniczkując (1.19) i wykorzystując ostatnią nierówność, otrzymamy

$$w'(t) = p(v(t)) \leq p(w(t)).$$

Ponieważ $w(t) > 0$ dla $t > t_0$

$$\frac{w'(t)}{p(w(t))} dt \leq 1, \quad t \in (t_0, a].$$

Niech $\delta \in (t_0, a]$. Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[\delta, a]$, otrzymamy

$$\int_{\delta}^a \frac{w'(t)}{p(w(t))} dt \leq a - \delta \leq a. \quad (1.20)$$

Z drugiej strony, podstawiając $s = w(t)$ mamy

$$\int_{\delta}^a \frac{w'(t)}{p(w(t))} dt = \int_{\sigma}^{\alpha} \frac{ds}{p(s)}, \quad (1.21)$$

gdzie $\sigma = w(\delta)$, $\alpha = w(a)$. Zauważmy, że $\sigma \rightarrow 0$ gdy $\delta \rightarrow t_0$. Na mocy (1.16) prawa strona (1.21) dąży do nieskończoności, gdy $\delta \rightarrow t_0$, co przeczy nierówności (1.20). Z uzyskanej sprzeczności wynika, że $u = 0$, co kończy dowód.

Twierdzenie 1.7. (Osgood). *Załóżmy, że $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ ($a, b > 0$), jest funkcją ciągłą, spełniającą warunek*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq p(|x_1 - x_2|),$$

gdzie p spełnia założenia lematu 1.3. Wówczas problem początkowy (1.9) posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód. Przypuśćmy, że x_1, x_2 są rozwiązaniami problemu (1.9) w przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Oczywiście

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))) ds \right| \leq \int_{t_0}^t p(|x_1(s) - x_2(s)|) ds.$$

Wynika stąd, że funkcja $u = |x_1 - x_2|$ spełnia warunek (1.17). Na mocy lematu 1.3 teza twierdzenia wynika natychmiast.

1.8. Przestrzenie metryczne i przestrzenie unormowane

I. Przestrzenie metryczne

W dowodach twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności korzystaliśmy z pojęcia przestrzeni metrycznej, granicy ciągu w przestrzeni metrycznej, funkcji określonych na przestrzeni metrycznej oraz pojęcia normy i przestrzeni unormowanej. Dla wygody Czytelnika przypomnimy definicje tych pojęć.

Parę (X, d) złożoną z niepustego zbioru X oraz funkcji $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, spełniającej następujące warunki:

- (i) $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ dla dowolnych $x, y \in X$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ dla dowolnych $x, y, z \in X$;

nazywamy przestrzenią metryczną. Zbiór X nazywamy przestrzenią, funkcję d metryką w przestrzeni X a liczbę $d(x, y)$ odległością punktów x i y .

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $x_0 \in X$, $r > 0$. Zbiór

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

nazywamy *kulą otwartą*, a zbiór

$$K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kulą domkniętą w przestrzeni X o środku x_0 i promieniu r .

Niech X będzie dowolnym zbiorem. Funkcja

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x = y, \\ 1, & \text{dla } x \neq y, \end{cases}$$

jest metryką w X . Nazywamy ją *metryką dyskretną*.

Funkcja

$$d(x, y) = |y - x| \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

jest metryką w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Zauważmy, że w tym przypadku kula otwarta to przedział otwarty $(x_0 - r, x_0 + r)$, zaś kula domknięta to przedział domknięty $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, połóżmy

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}; \\ d_2(x, y) &= \max \{|y_1 - x_1|, \dots, |y_n - x_n|\}; \\ d_3(x, y) &= |y_1 - x_1| + \dots + |y_n - x_n|. \end{aligned}$$

Każda z funkcji d_1, d_2, d_3 jest metryką w $\mathbb{R}^n$. Metryka d_1 nosi nazwę metryki Euklidesa, a generowana przez nią odległość dwóch punktów to odległość, którą rozważaliśmy zwykle w geometrii. Nietrudno sprawdzić, że $d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_3(x, y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Funkcję

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X, \quad f(n) = x_n,$$

czyli funkcję, która liczbom naturalnym przyporządkowuje elementy przestrzeni X , nazywamy *ciągami* w przestrzeni X i tradycyjnie oznaczamy symbolem $\{x_n\}$.

Niech $\tilde{\mathbb{N}} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ będzie podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$. Funkcję f zawężoną do zbioru $\tilde{\mathbb{N}}$ nazywamy *podciągami* ciągu $\{x_n\}$ i oznaczamy symbolem $\{x_{n_k}\}$. Ponieważ między zbiorami $\mathbb{N}$ i $\tilde{\mathbb{N}}$ można określić bijekcję, każdy podciąg jest również ciągiem.

Mówimy, że element l jest *granica ciągu* $\{x_n\}$, jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 (zależne od ε) takie, że

$$d(x_n, l) < \varepsilon \quad \text{dla dowolnego } n \geq n_0.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ lub $x_n \rightarrow l$. Ciąg mający granicę nazywamy *ciągami zbieżnym*. Nietrudno zauważyć, że ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej posiada dokładnie jedną granicę.

Mówimy, że ciąg $\{x_n\}$ spełnia *warunek Cauchy'ego* (lub jest *ciągami Cauchy'ego*), jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{dla dowolnych } n, m \geq n_0.$$

Stwierdzenie 1.1. *Ciąg zbieżny jest ciągami Cauchy'ego.*

Istotnie, przypuśćmy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do l . Niech $\varepsilon > 0$ i niech n_0 będzie takie, że

$$d(x_n, l) < \varepsilon/2 \quad \text{dla dowolnego } n \geq n_0.$$

Oczywiście dla dowolnych $n, m \geq n_0$ zachodzi

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, l) + d(l, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

co należało pokazać.

Stwierdzenie 1.2. *Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego (w szczególności ciąg zbieżny) jest ciągami ograniczonym.*

Istotnie, ustalmy n_0 tak, aby $d(a_n, a_m) < 1$ dla $n, m \geq n_0$. Połóżmy

$$r = \max \{d(a_1, a_0), \dots, d(a_{n_0-1}, a_{n_0}), 1\}.$$

Oczywiście $\{a_n\} \subset B(x_0, r)$.

Stwierdzenie 1.3. *Ciąg spełniający warunek Cauchy'ego niekoniecznie musi być ciągiem zbieżnym.*

Istotnie, niech $X = \mathbb{Q}$ będzie zbiorem liczb wymiernych. Załóżmy, że w zbiorze $\mathbb{Q}$ dana jest metryka odziedziczona z przestrzeni $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Rozważmy ciąg liczb wymiernych $\{r_n\}$ zbieżny do liczby $\sqrt{2}$. Oczywiście $\{r_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego (jako ciąg zbieżny w $(\mathbb{R}, |\cdot|)$), lecz nie jest ciągiem zbieżnym w $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, bowiem liczba $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest *zupełna*, jeśli każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego jest ciągiem zbieżnym.

Przestrzeń $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest zupełna. Podobnie przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z każdą z metryk zdefiniowanych powyżej jest przestrzenią zupełną. Zgodnie z poprzednimi uwagami przestrzeń $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nie jest przestrzenią zupełną.

Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią zupełną, to w celu stwierdzenia, czy ciąg elementów tej przestrzeni jest zbieżny, wystarczy sprawdzić, że spełnia on warunek Cauchy'ego. Jest to istotne, bowiem możemy stwierdzić zbieżność ciągu bez znajomości jego granicy. Klasa przestrzeni metrycznych zupełnych jest jedną z najważniejszych klas przestrzeni.

Zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem *ograniczonym*, jeśli istnieje $x_0 \in X$ oraz $r > 0$ takie, że $A \subset B(x_0, r)$.

Zbiór $U \subset X$ nazywamy *zbiorem otwartym*, jeśli dla każdego punktu $x \in U$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że kula $B(x, \varepsilon) \subset U$. Oznacza to, że każdy punkt należy do U wraz z pewną kulą. Oczywiście przestrzeń X jest zbiorem otwartym. Przyjmujemy również, że zbiór pusty $\emptyset$ jest zbiorem otwartym.

Zbiór D nazywamy *zbiorem domkniętym*, jeśli jego dopełnienie $D^c = X \setminus D$ jest zbiorem otwartym. Oczywiście przestrzeń X oraz zbiór pusty $\emptyset$ są zbiorami domkniętymi.

Łatwo sprawdzić, że kula otwarta jest zbiorem otwartym, a kula domknięta jest zbiorem domkniętym. Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, przekrój skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych może być zbiorem domkniętym, np. $\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_0, \frac{n+1}{n}) = K(x_0, 1)$.

Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Suma skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Suma przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych może być zbiorem otwartym np. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K(x_0, \frac{n}{n+1}) = B(x_0, 1)$.

Dla $x_0 \in X$ dowolny zbiór otwarty U zawierający punkt x_0 nazywamy *otoczeniem otwartym* punktu x_0 . Przykładem otoczenia otwartego punktu x_0 jest oczywiście dowolna kula otwarta $B(x_0, r)$. Zauważmy, że w przypadku przestrzeni metrycznych, często bez zmniejszenia ogólności możemy ograniczyć się do rozważania tylko otoczeń kulistych.

Zbiór $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ nazywamy *sąsiedztwem* punktu x_0 . Zatem sąsiedztwo punktu $\{x_0\}$, to jego otoczenie pozbawione punktu $\{x_0\}$.

Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem domknięcia* zbioru $A \subset X$, jeśli każde otoczenie $B(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru A . Oczywiście każdy punkt $x \in A$ jest punktem domknięcia zbioru A . Zbiór wszystkich punktów domknięcia zbioru A nazywamy domknięciem zbioru A i oznaczamy symbolem $\bar{A}$. Łatwo sprawdzić, że domknięcie zbioru A jest zbiorem domkniętym i jest równe przekrojowi wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór A .

Punkt $x_0 \in X$ nazywamy *punktem skupienia* zbioru A , jeśli każde otoczenie $B(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru A różny od x_0 . Żądanie to jest równoważne warunkowi, że każde otoczenie $B(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru A .

Punkt $x_0 \in A$ nazywamy *punktem izolowanym* zbioru A , jeśli istnieje otoczenie $B(x_0, \varepsilon)$ punktu x_0 , które oprócz x_0 nie zawiera innych elementów zbioru A , tzn. $B(x_0, \varepsilon) \cap A = \{x_0\}$.

Punkt zbioru A jest więc albo punktem skupienia zbioru A , albo punktem izolowanym zbioru A .

Niech $A \subset X$. Rodzinę zbiorów otwartych $\{U_i : i \in I\}$ taką, że $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ nazywamy *pokryciem otwartym* zbioru A .

Mówimy, że zbiór A jest zbiorem *zwartym*, jeśli z każdego pokrycia otwartego zbioru A można wybrać pokrycie skończone. Nietrudno sprawdzić, że zbiór zwarty jest domknięty. Podzbiór domknięty zbioru zwartego jest zbiorem zwartym. W szczególności w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ każdy zbiór domknięty i ograniczony jest zwarty. Stwierdzenie to nie jest prawdziwe w dowolnej przestrzeni metrycznej. Wystarczy rozważyć zbiór X o nieskończonej ilości elementów z metryką dyskretną zdefiniowaną w przykładzie 1.1. W oczywisty sposób zbiór ten jest domknięty i ograniczony. Każdy zbiór jednopunktowy $\{x\}$, $x \in X$, jest zbiorem otwartym. Rodzina $\{\{x\} : x \in X\}$ jest więc pokryciem otwartym przestrzeni X . Oczywiście z rodziny tej nie można wybrać pokrycia skończonego.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, D podzbiorem X . Niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru D .

Mówimy, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ posiada w punkcie x_0 *granicę* równą a (co notujemy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ (zależne od ε) takie, że: $|f(x) - a| < \varepsilon$ dla każdego $x \in D$, spełniającego warunek $0 < d(x, x_0) < \delta$.

Zauważmy, że dla $X = \mathbb{R}$ definicja ta pokrywa się z definicją granicy funkcji $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, rozważaną w podstawowym kursie analizy.

Nietrudno sprawdzić, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ posiada w punkcie x_0 granicę równą a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$ zachodzi $f(x_n) \rightarrow a$.

Stwierdzenie 1.4. Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą zadanymi funkcjami. Niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru D . Załóżmy, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b.$$

Jeśli ponadto $g(x) \neq 0$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 oraz $b \neq 0$, to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}.$$

Stwierdzenie 1.5. Niech $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ i niech $x_0 \in X$ będzie punktem skupienia zbioru D . Załóżmy, że funkcje f i g posiadają granicę w punkcie x_0 i ponadto $f(x) \leq g(x)$ w pewnym sąsiedztwie punktu x_0 . Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Mówimy, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ciągła* w punkcie $x_0 \in D$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takie, że

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dla } x \in D, \quad d(x, x_0) < \delta.$$

Mówimy, że funkcja jest *ciągła w zbiorze* D , jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Stwierdzenie 1.6. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, jeśli $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ dla każdego ciągu $\{x_n\}$, $x_n \in D$, $x_n \rightarrow x_0$.

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami danymi.

Mówimy, że ciąg $\{f_n\}$ jest:

- *zbieżny punktowo* do funkcji f , jeśli dla każdego $x \in X$, ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny do liczby $f(x)$;
- *ciągłem Cauchy’ego* ze względu na zbieżność punktową, jeśli dla każdego $x \in X$, ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem Cauchy’ego;
- *zbieżny jednostajnie* do funkcji f , jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } x \in X \quad \text{oraz } n \geq n_0,$$

- *ciągłem Cauchy’ego* ze względu na zbieżność jednostajną, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n_0 takie, że

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{dla każdego } x \in X \quad \text{oraz } n, m \geq n_0.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ rozważmy funkcję $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f_n(x) = x^n$. Zauważmy, że ciąg $\{f_n\}$ na odcinku $[0, 1]$ jest zbieżny punktowo do funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in [0, 1); \\ 1, & \text{dla } x = 1. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że ciąg $\{f_n\}$ nie jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na odcinku $[0, 1]$. Przykład ten pokazuje, że granica punktowa funkcji ciągłych nie musi być funkcją ciągłą. Natomiast, jak pokazuje następne twierdzenie, granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Stwierdzenie 1.7. Ciąg funkcji ciągłych zbieżny punktowo do funkcji ciągłej nie musi być jednostajnie zbieżny.

Istotnie, rozważmy ciąg funkcji $\{f_n\}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x/n$. Oczywiście $\{f_n\}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f_0(x) \equiv 0$, lecz nie jest jednostajnie zbieżny.

Twierdzenie 1.8. *Założmy, że $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, są funkcjami ciągłymi. Jeśli ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f , to f jest funkcją ciągłą na X .*

Dowód. Niech $x_0 \in X$ i niech $\varepsilon > 0$. Na mocy jednostajnej zbieżności możemy wybrać $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f_{\tilde{n}}(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{dla dowolnego } x \in X.$$

Ponieważ $f_{\tilde{n}}$ jest funkcją ciągłą, istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|f_{\tilde{n}}(x) - f_{\tilde{n}}(x_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{dla dowolnego } x \in B(x_0, \delta).$$

Oczywiście

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{\tilde{n}}(x)| + |f_{\tilde{n}}(x) - f_{\tilde{n}}(x_0)| + \\ &\quad + |f_{\tilde{n}}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in B(x_0, \delta)$, co kończy dowód.

Zauważmy, że jednostajna zbieżność ciągu funkcji oznacza zbieżność w metryce d_0 danej wzorem

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \quad (1.22)$$

Twierdzenie 1.9. *Przestrzeń $CB(X, \mathbb{R})$ funkcji ciągłych i ograniczonych na przestrzeni metrycznej X , z metryką jednostajnej zbieżności d_0 daną wzorem (1.22), jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Dowód. Niech $\{f_n\}$, $f_n \in CB(X, \mathbb{R})$, będzie ciągiem Cauchy'ego względem metryki d_0 . Oznacza to, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } n, m \geq n_0, \quad x \in X. \quad (1.23)$$

W szczególności warunek (1.23) oznacza, że dla dowolnego $x \in X$ ciąg liczbowy $\{f_n(x)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ $\mathbb{R}$ jest przestrzenią zupełną, ciąg $\{f_n(x)\}$ jest zbieżny do pewnej liczby $f(x)$. Przechodząc we wzorze (1.23) z m do nieskończoności, otrzymujemy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{dla } n \geq n_0.$$

Ponieważ powyższy warunek zachodzi dla każdego $x \in X$, oznacza to, że ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji f . Na mocy twierdzenia 1.8 funkcja f jest ciągła, co kończy dowód.

II. Przestrzenie wektorowe

Niech E będzie zbiorem niepustym. Załóżmy, że:

I. Dla dowolnych elementów $u, v \in E$ istnieje trzeci element należący do E , oznaczany symbolem $u + v$ i nazywany *sumą* elementów u i v , przy czym spełnione są następujące warunki:

- (i) $u + v = v + u$ dla dowolnych $u, v \in E$;
- (ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$ dla dowolnych $u, v, w \in E$;

(iii) istnieje element nazywany *zerem* i oznaczany symbolem 0 taki, że $u + 0 = u$ dla dowolnego $u \in E$;

(iv) dla dowolnego $u \in E$ istnieje element oznaczany symbolem $-u$, nazywany *elementem odwrotnym*, taki że $u + (-u) = 0$.

II. Dla dowolnego $u \in E$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ istnieje element $\alpha u \in E$, zwany *iloczynem* u przez α przy czym, dla dowolnych $u, v \in E$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:

$$(v) \quad \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$$

$$(vi) \quad 1u = u;$$

$$(vii) \quad (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u;$$

$$(viii) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

Przestrzeń E z tak określonymi działaniami nazywamy *przestrzenią wektorową*. Ponieważ skalary α są liczbami rzeczywistymi, tak zdefiniowaną przestrzeń E nazywamy *przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych*, lub krótko *przestrzenią rzeczywistą*. Elementy przestrzeni E nazywamy *wektorami*.

Przykład 1.5. Dla $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ połóżmy

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \quad \alpha u = (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n).$$

Łatwo sprawdzić, że z tak określonymi działaniami dodawania i mnożenia przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią wektorową.

Przykład 1.6. Dla $f, g \in \mathbb{R}^X = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ połóżmy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

Nietrudno sprawdzić, że z tak określonymi działaniami dodawania i mnożenia przestrzeń $\mathbb{R}^X$ jest przestrzenią wektorową.

Niech E będzie przestrzenią wektorową. Funkcje $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ spełniającą warunki:

$$(i) \quad \|u\| = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } u = 0;$$

$$(ii) \quad \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad \text{dla dowolnych } \alpha \in \mathbb{R}, u \in E;$$

$$(iii) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{dla dowolnych } u, v \in E;$$

nazywamy *normą* w przestrzeni E . Parę $(E, \|\cdot\|)$ nazywamy *przestrzenią unormowaną*.

Nietrudno sprawdzić, że funkcja $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ dana wzorem

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

jest metryką w przestrzeni E . Nazywamy ją *metryką generowaną przez normę*. Tak więc każda przestrzeń unormowana jest w naturalny sposób przestrzenią metryczną.

Dla $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$, połóżmy:

$$\|u\|_1 = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2};$$

$$\|u\|_2 = |u_1| + \dots + |u_n|;$$

$$\|u\|_3 = \max\{|u_1|, \dots, |u_n|\}.$$

Można sprawdzić, że każda z określonych powyżej funkcji jest normą w przestrzeni R^n . Funkcja $\|\cdot\|_1$ nosi nazwę *normy Euklidesa*. Oczywiście odpowiada jej metryka Euklidesa.

Przestrzeń unormowaną E , zupełną względem metryki generowanej przez normę, nazywamy *przestrzenią Banacha*. Klasa przestrzeni Banacha jest jedną z najważniejszych klas przestrzeni rozważanych w analizie matematycznej.

Nietrudno sprawdzić, że przestrzeń R^n z każdą z norm zdefiniowanych powyżej jest przestrzenią Banacha.

Niech $C([0, 1])$ oznacza zbiór funkcji ciągłych $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dla $f \in C([0, 1])$ połóżmy

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Oczywiście $\|\cdot\|_0$ jest normą, nazywamy ją *normą jednostajnej zbieżności*, a przestrzeń $(C([0, 1]), \|\cdot\|_0)$, zgodnie z twierdzeniem 1.9, jest przestrzenią Banacha.

Podobnie, z twierdzenia 1.9 wynika, że przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych $CB(X)$ z normą jednostajnej zbieżności, jest przestrzenią Banacha.

Niech E i F będą przestrzeniami liniowymi (w szczególności przestrzeniami Banacha). Odwzorowanie $A : E \rightarrow F$ spełniające warunki:

- (i) $A(u + v) = A(u) + A(v)$ dla $u, v \in E$,
- (ii) $A(\alpha u) = \alpha A(u)$ dla $u \in E, \alpha \in \mathbb{R}$,

nazywamy odwzorowaniem *liniowym*.

Jeśli ponadto

- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n) = 0$ dla dowolnego ciągu $\{u_n\} \subset E, u_n \rightarrow 0$,

to odwzorowanie A nazywamy *ciągłym*.

Zauważmy, że z liniowości oraz warunku (iii) wynika, że $A(u_n) \rightarrow A(u)$, jeśli $u_n \rightarrow u, u_n \in E$.

Niech $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ będą przestrzeniami unormowanymi. Oznaczmy przez $L(E, F)$ zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z E w F . Jeśli dla $A, B \in L(E, F)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ położymy

$$(A + B)(u) = A(u) + B(u), \quad A(\alpha u) = \alpha A(u) \quad \text{dla } u \in E,$$

to $L(E, F)$ z tak określonymi działaniami jest przestrzenią wektorową. Nietrudno sprawdzić, że wzór

$$\|A\| = \sup \{\|A(x)\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$$

określa normę w przestrzeni $L(E, F)$.

1.9. Zadania

1. Sprawdzić, że funkcja różniczkowalna $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza, a funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia lokalny warunek Lipschitza, może jednak nie spełniać warunku Lipschitza. Podać przykłady.

2. Znaleźć obszary, w których zadana funkcja spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej x i wyznaczyć jej stałą Lipschitza:

a) $f(t, x) = x/(1+t^2)$, b) $f(t, x) = t/(1+x^2)$, c) $f(t, x) = t^2x^2 + tx + 4x$,
 d) $f(t, x) = x^2/(1+t^2)$, e) $f(t, x) = t/x^2$, f) $f(t, x) = 1/(t^2(1-x^2))$.

3. Wyznaczyć stałą Lipschitza względem zmiennej x dla zadanej funkcji i obszaru:

a) $f(t, x) = t\sqrt{x}$, (i) $|t| \leq T$, $x > 1$; (ii) $|t| \leq 1$, $x \geq 0$;
 b) $f(t, x) = t \cos x + x \sin t$, (i) $|t| \leq \pi$, $|x| > \pi$; (ii) $|t| \leq \pi/2$, $|x| \leq \pi/2$;
 c) $f(t, x) = t^2 e^{-tx}$, (i) $0 \leq t \leq 1$, $|x| < \infty$; (ii) $1 \leq t \leq 2$, $x > 0$;
 d) $f(t, x) = t^2 e^{t+x}$, (i) $0 \leq t \leq 1$, $|x| \leq 1$; (ii) $0 \leq t \leq 1$, $x > 0$.

4. Sprawdzić, czy funkcja

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{\sin(tx)}{t}, & (t, x) \neq (0, x), \\ 0, & (t, x) = (0, x), \end{cases}$$

spełnia w obszarze $\{(t, x) : |t| \leq 1, |x| < \infty\}$ warunek Lipschitza względem zmiennej x .

5. Zbadać lokalne i globalne istnienie oraz jednoznaczność rozwiązań problemu:

(i) $x' = \sin^2(tx)$, $x(t_0) = x_0$;
 (ii) $x' = \sin(tx)$, $x(0) = 1$;
 (iii) $x' = \operatorname{tg}(tx)$, $x(0) = 1$.

6. Zbadać istnienie i jednoznaczność rozwiązań problemu:

(i) $x' = 1 + x^{2/3}$, $x(0) = 1$;
 (ii) $x' = t(1+x)x^2$, $x(0) = 1$;
 (iii) $x' = e^t + t/x$, $x(0) = 1$.

7. Sprawdzić, że problem

$$x' = \frac{2}{t}(x-1), \quad x(0) = 0,$$

nie posiada rozwiązań, natomiast problem

$$x' = \frac{2}{t}(x-1), \quad x(0) = 1,$$

posiada nieskończenie wiele rozwiązań, mianowicie są nimi wszystkie funkcje rodziny $x = 1 + Ct^2$, $C \in \mathbb{R}$.

8. Pokazać, że problem początkowy

$$x' = (t^2 + x^2) \sin x + x \cos x, \quad x(0) = 0$$

w zbiorze $|t| \leq a$, $|x| \leq b$ posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe.

9. Dla równania

$$tx' = 2(x+1)$$

rozpatrz problemy początkowe

a) $x(0) = 0$, b) $x(0) = -1$, c) $x(1) = 0$, d) $x(1) = -1$.

10. Pokazać, że rozwiązanie problemu

$$x' = -t/x, \quad x(0) = 1,$$

nie może być przedłużone poza przedział $(-1, 1)$.

11. Pokazać, że rozwiązanie problemu

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1,$$

nie może być przedłużone poza przedział $(-\infty, 1)$.

12. Znaleźć maksymalny przedział istnienia rozwiązań problemu

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 1.$$

13. W zależności od położenia punktu początkowego (t_0, x_0) przedyskutować istnienie, jednoznaczność i maksymalny przedział istnienia rozwiązania problemu początkowego

$$(x-1)x' + t = 0, \quad x(t_0) = x_0.$$

14. Rozważyć problem początkowy

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = 0,$$

gdzie

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{4t^3 x}{t^4 + x^2}, & (t, x) \neq (0, 0); \\ 0, & (t, x) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokazać, że funkcja f jest ciągła, lecz nie spełnia warunku Lipschitza w żadnym obszarze zawierającym początek układu. Pokazać następnie, że problem ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. (*Wskazówka: Podstawić $s = t^4$ i znaleźć rozwiązanie jako funkcję argumentu x*).

15. Niech $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Załóżmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|f(t') - f(t'')| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t', t'' \in (\alpha, \beta) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \setminus \{t_0\}, \quad |t' - t''| < \delta.$$

Pokazać, że istnieje granica $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$. Sformułować analog twierdzenia dla $t_0 = \alpha$ oraz $t_0 = \beta$. (*Wskazówka: Jeśli $t_n \rightarrow t_0$ to ciąg $\{f(t_n)\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, a zatem jest zbieżny. Zauważyć, że granica ta nie zależy od wyboru ciągu $\{t_n\}$*). Zauważmy, że przyjęte założenia to po prostu warunek Cauchy'ego istnienia granicy.

Rozdział 2

Przykłady równań całkownych

2.1. Równanie o zmiennych rozdzielonych

Równanie różniczkowe, które możemy sprowadzić do postaci

$$x' = f(t)g(x), \quad t \in I, \quad (2.1)$$

gdzie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ($I, J \subset \mathbb{R}$) są znanymi funkcjami, nazywamy równaniem różniczkowym *o zmiennych rozdzielonych*. Ponieważ x jest funkcją zmiennej t , równanie to możemy zapisać w formie równoważnej

$$x'(t) = f(t)g(x(t)), \quad t \in I,$$

a jeśli $g(x(t)) \neq 0$ w postaci

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \quad t \in I. \quad (2.2)$$

Założmy, że f i g są funkcjami ciągłymi. Niech F i G będą funkcjami pierwotnymi (całkami) odpowiednio funkcji f i $1/g$, czyli

$$F(t) = \int f(t)dt, \quad G(x) = \int \frac{1}{g(x)}dx.$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt}(G \circ x)(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))},$$

równanie (2.2) możemy zapisać w postaci

$$\frac{d}{dt}(G \circ x)(t) = \frac{d}{dt}F(t), \quad t \in I,$$

lub

$$\frac{d}{dt}((G \circ x)(t) - F(t)) = 0, \quad t \in I.$$

Stąd

$$G(x(t)) - F(t) = C, \quad t \in I. \quad (2.3)$$

Rozważmy teraz związek

$$G(x) - F(t) = C. \quad (2.4)$$

Jeśli z ostatniego związku potrafimy wyznaczyć x jako funkcję t w przedziale I , to wstawiając tę funkcję do (2.4) w miejsce x , otrzymamy równość (2.3). Różniczkując uzyskaną równość względem zmiennej t sprawdzamy natychmiast, że funkcja x jest całką równania (2.1) w przedziale I . Wzór (2.4) określa zatem rozwiązanie równania (2.1) w postaci uwikłanej.

Niech dt oznacza różniczkę zmiennej niezależnej t , a dx różniczkę funkcji x . Ponieważ $dx = x'(t)dt$, mamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x'(t)dt}{dt} = x'(t).$$

Oznacza to, że pochodną możemy interpretować jako stosunek różniczek. Zastępując w równaniu (2.1) pochodną stosunkiem różniczek, możemy równanie to przekształcić do postaci

$$\frac{1}{g(x)}dx = f(t)dt.$$

Aby uzyskać teraz równość (2.4), wystarczy lewą stronę ostatniej równości scałkować względem x , a prawą względem t . Jest to praktyczny sposób szukania rozwiązań równań o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 2.1. Rozwiązać równanie

$$x' = \frac{1+t}{1-x}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$(1-x)dx = (1+t)dt.$$

Po przejściu do funkcji pierwotnych, czyli po scałkowaniu lewej strony względem x , a prawej względem t otrzymamy

$$x - x^2/2 = t + t^2/2 + C,$$

lub

$$t^2 + 2t + x^2 - 2x = C.$$

Ostatnią równość można zapisać w postaci równoważnej

$$(t+1)^2 + (x-1)^2 = C.$$

Ponieważ C jest stałą dowolną, zamiast $2C$, a następnie $C+2$, pozostawiliśmy C .

2.2. Równanie jednorodne

Równanie różniczkowe, które możemy zapisać w postaci

$$x' = f\left(\frac{x}{t}\right) \tag{2.5}$$

nazywamy *równaniem jednorodnym*. Stosując podstawienie

$$y = \frac{x}{t},$$

gdzie y jest funkcją zmiennej t , otrzymamy

$$y + ty' = f(y),$$

czyli równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{dy}{f(y) - y} = \frac{dt}{t},$$

które możemy rozwiązać przez scałkowanie. Po wyznaczeniu z ostatniego równania y jako funkcje zmiennej t , szukane rozwiązanie równania wyjściowego znajdziemy ze wzoru $x = ty(t)$.

Przykład 2.2. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$tx' - x\left(\ln \frac{x}{t} + 1\right) = 0, \quad x(1) = e.$$

Podstawiając $y = x/t$, otrzymamy

$$y + ty' - y(\ln y + 1) = 0.$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dt}{t},$$

a po scałkowaniu

$$\ln |\ln y| = \ln |t| + \ln C, \quad C > 0.$$

Stąd

$$|\ln y| = C|t|, \quad C > 0.$$

Opuszczając moduły, należy rozważyć cztery przypadki, które redukują się do dwóch

$$\ln y = Ct, \quad C > 0 \quad \text{oraz} \quad \ln y = -Ct, \quad C > 0.$$

Oba przypadki możemy zapisać krótko

$$\ln y = Ct, \quad C \neq 0,$$

lub

$$y = e^{Ct}, \quad C \neq 0.$$

Wracając do funkcji wyjściowej, otrzymamy

$$x = te^{Ct}, \quad C \neq 0.$$

Ponieważ wartości $C = 0$ odpowiada $y = 1$, a w konsekwencji funkcja $x = t$, która jest również rozwiązaniem naszego równania, warunek $C \neq 0$ należy pominąć.

Z warunku początkowego wynika, że $e = e^C$. Stąd $C = 1$, a szukane rozwiązanie problemu początkowego ma postać $x = te^t$.

2.3. Równanie liniowe

Równanie różniczkowe, które możemy sprowadzić do postaci

$$x' + f(t)x = g(t), \quad t \in I, \quad (2.6)$$

gdzie f i g są zadanymi funkcjami określonymi na zbiorze $I \subset \mathbb{R}$, nazywamy *równaniem liniowym*. Aby znaleźć rozwiązanie równania (2.6), w pierwszej kolejności wyznaczamy całkę skojarzonego z nim równania jednorodnego

$$x' + f(t)x = 0. \quad (2.7)$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy

$$\frac{dx}{x} = -f(t)dt,$$

a po scałkowaniu

$$\ln |x| = - \int_{t_0}^t f(s)ds + K,$$

gdzie t_0 jest ustalonym punktem w I , a K stałą dowolną. Przekształcając ostatni wzór, otrzymamy

$$|x| = Ce^{-\int_{t_0}^t f(s)ds},$$

gdzie $C = e^K$. Oczywiście $C > 0$. Opuszczając wartość bezwzględną, należy uwzględnić dwa przypadki, które łącznie możemy zapisać w postaci

$$x = Ce^{-\int_{t_0}^t f(s)ds},$$

gdzie C jest dowolną stałą różną od zera. Ponieważ funkcja $x = 0$ jest również rozwiązaniem równania (2.7), warunek $C \neq 0$ należy opuścić. Zatem C jest stałą dowolną.

Powstaje pytanie, czy zastępując stałą C stosownie dobraną funkcją $u(t)$, nie można by uzyskać całki ogólnej równania (2.6) (w dalszym ciągu funkcję tę będziemy zwykle oznaczać symbolem $C(t)$). Aby sprawdzić nasze przypuszczenie, połączmy

$$x = u(t)e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds} \quad (2.8)$$

i wstawmy do równania (2.6). Otrzymamy

$$u'(t)e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds} + u(t)e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}(-f(t)) + f(t)u(t)e^{\int_{t_0}^t f(s)ds} = g(t).$$

Ponieważ wyrazy zawierające funkcję u redukują się, mamy

$$u'(t)e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds} = g(t).$$

Zatem

$$u'(t) = g(t)e^{\int_{t_0}^t f(s)ds},$$

a stąd

$$u(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} f(s) ds} d\tau + C.$$

Podstawiając tak wyznaczoną funkcję u do wzoru (2.8), otrzymamy całkę ogólną równania (2.6)

$$x(t) = \left(\int_{t_0}^t g(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} f(s) ds} d\tau + C \right) e^{-\int_{t_0}^t f(s) ds}.$$

Przykład 2.3. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$x' + \frac{x}{t} = \ln t, \quad x(1) = 1.$$

Rozwiązując skojarzone równanie jednorodne

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t},$$

otrzymamy

$$x = \frac{C}{t}.$$

Rozwiązanie równania wyjściowego szukamy teraz w postaci

$$x = \frac{u(t)}{t},$$

gdzie u jest funkcją szukaną. Po podstawieniu do równania wyjściowego otrzymamy

$$\frac{tu'(t) - u(t)}{t^2} + \frac{u(t)}{t^2} = \ln t,$$

a po uproszczeniu

$$u'(t) = t \ln t.$$

Stąd

$$u(t) = \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{t^2}{4} + K.$$

Zatem całka ogólna równania wyjściowego wyraża się wzorem

$$x = \frac{t}{2} \ln t - \frac{t}{4} + \frac{K}{t}.$$

Uwzględniając warunek początkowy $x(1) = 1$, otrzymamy $1 = -1/4 + K$. Zatem $K = 5/4$, a szukane rozwiązanie zadanego problemu początkowego ma postać

$$x = \frac{t}{2} \ln t - \frac{t}{4} + \frac{5}{4t}.$$

Przykład 2.4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x + (t - x^3)x' = 0.$$

Oczywiście nie jest to równanie liniowe względem x jako funkcji zmiennej t . Natomiast jeśli zmienimy rolę i będziemy szukać funkcji t zmiennej x , to otrzymamy

$$x \frac{dt}{dx} + t = x^3,$$

czyli równanie liniowe. Skojarzone z nim równanie jednorodne

$$x \frac{dt}{dx} + t = 0$$

ma całkę ogólną

$$t = \frac{C}{x}.$$

Rozwiązania naszego równania liniowego szukamy teraz w postaci

$$t = \frac{u(x)}{x}.$$

Oczywiście

$$\frac{dt}{dx} = \frac{u'x - u}{x^2}.$$

Podstawiając do równania wyjściowego, mamy

$$x \frac{u'x - u}{x^2} + \frac{u}{x} = x^3.$$

Stąd

$$u' = x^3,$$

a po scałkowaniu

$$u(x) = \frac{x^4}{4} + C.$$

Zatem

$$t = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{4} x^4 + C \right) = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x},$$

lub w postaci uwikłanej

$$4tx - x^3 = C.$$

(Zamiast $4C$ pozostawiliśmy C , bowiem jest to stała dowolna).

2.4. Równanie Bernoulliego

Równanie różniczkowe postaci

$$x' + f(t)x = g(t)x^\alpha, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1, \quad t \in I, \quad (2.9)$$

gdzie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami, nazywamy *równaniem Bernoulliego*. Po podzieleniu przez x^α mamy

$$\frac{x'}{x^\alpha} + f(t)x^{1-\alpha} = g(t).$$

Podstawiając

$$y = x^{1-\alpha}$$

(y jest funkcją zmiennej t), otrzymamy równanie liniowe

$$\frac{1}{1-\alpha}y' + f(t)y = g(t).$$

Przykład 2.5. Rozważmy równanie

$$x' + \frac{2x}{t} = \frac{2\sqrt{x}}{\cos^2 t}.$$

Dzieląc przez $2\sqrt{x}$, mamy

$$\frac{x'}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{t}\sqrt{x} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Podstawiając $y = \sqrt{x}$, otrzymamy równanie liniowe

$$y' + \frac{y}{t} = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Całką ogólną skojarzonego równania jednorodnego

$$y' + \frac{y}{t} = 0$$

jest funkcja

$$y = \frac{C}{t}.$$

Po uzmiennieniu stałej i podstawieniu do równania liniowego otrzymamy

$$\frac{tC'(t) - C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

a po redukcji

$$C'(t) = \frac{t}{\cos^2 t}.$$

Zatem

$$C(t) = \int t \frac{1}{\cos^2 t}, dt = t \operatorname{tg} t + \ln |\cos t| + K.$$

Całka ogólna równania liniowego ma postać

$$y = \operatorname{tg} t + \frac{\ln |\cos t|}{t} + \frac{K}{t},$$

a wyjściowego równania Bernoulliego

$$x = \left(\operatorname{tg} t + \frac{\ln |\cos t|}{t} + \frac{K}{t} \right)^2.$$

Przykład 2.6. Znaleźć rozwiązanie problemu Cauchy'ego

$$x' + 2tx = 2t^3x^3, \quad x(0) = 2.$$

Podstawiając

$$y = x^{-2}$$

otrzymamy równanie liniowe

$$y' - 4ty = -4t^3.$$

Całka ogólna skojarzonego równania liniowego

$$y' - 4ty = 0$$

ma postać

$$y = Ce^{2t^2}.$$

Po uzmiennieniu stałej i podstawieniu do równania liniowego otrzymamy

$$C'e^{2t^2} + 4tCe^{2t^2} - 4tCe^{2t^2} = -4t^3.$$

Stąd

$$C' = -4t^3Ce^{-2t^2},$$

a po scałkowaniu

$$C(t) = t^2e^{-2t^2} + \frac{1}{2}e^{-2t^2} + K.$$

Całka ogólna równania liniowego ma postać

$$y = \left(t^2e^{-2t^2} + \frac{1}{2}e^{-2t^2} + K\right)e^{2t^2} = t^2 + \frac{1}{2} + Ke^{2t^2},$$

a wyjściowego równania Bernoulliego

$$x = 1 / \sqrt{t^2 + \frac{1}{2} + Ke^{2t^2}}.$$

Uwzględniając warunek początkowy, otrzymamy

$$x = 1 / \sqrt{t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2t^2}}.$$

2.5. Równanie zupełne. Czynniki całkujące

Równanie różniczkowe postaci

$$P(t, x) + Q(t, x)x' = 0, \tag{2.10}$$

gdzie $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ (D podzbiór otwarty i spójny przestrzeni $\mathbb{R}^2$) są zadanymi funkcjami, nazywamy *równaniem zupełnym*, jeśli istnieje funkcja $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że jej różniczka

$$dF = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} dx = P(t, x)dt + Q(t, x)dx.$$

Oznacza to, że lewa strona równania (2.10) po pomnożeniu przez dt jest różniczką zupełną funkcji F . Warunek ten jest spełniony, jeśli

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = P(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = Q(t, x). \quad (2.11)$$

Całka ogólna równania (2.10) ma wówczas postać

$$F(t, x) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Istotnie, jeśli z równania (2.12) wyznaczymy funkcję $x = x(t)$, to po zróżniczkowaniu wyrażenia $F(t, x(t)) = C$ i uwzględnieniu zależności (2.11) otrzymamy równość

$$P(t, x(t)) + Q(t, x(t))x'(t) = 0,$$

co oznacza, że x jest rozwiązaniem równania (2.10).

Założmy dodatkowo, że funkcja F posiada ciągłe pochodne cząstkowe. Na mocy twierdzenia Schwarz'a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right).$$

Stąd i z zależności (2.11) wynika, że zachodzi równość

$$\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Jeśli równość ta nie jest spełniona, równanie (2.10) nie jest równaniem zupełnym.

Założmy teraz, że równość (2.13) jest spełniona i ponadto funkcje P i Q są klasy C^1 . Połóżmy

$$F_1 = \int P dt, \quad F_2 = \int Q dx.$$

Korzystając z warunku (2.13), nietrudno sprawdzić, że

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial t \partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial t}.$$

Całkując ostatnie równości, otrzymamy $F_1(t, x) = F_2(t, x) + C_1(x)$ oraz $F_1(t, x) = F_2(t, x) + C_2(t)$, skąd natychmiast wynika, że $C_1(x) = C_2(t) = C$. Dla $C = 0$ funkcja $F = F_1 = F_2$ spełnia warunki (2.11), a to oznacza, że rozważane równanie jest zupełne.

Całkując pierwszą z równości (2.11) względem t , otrzymamy

$$F(t, x) = \int P(t, x) dt + C(x).$$

Zauważmy, że stała C może być funkcją x . Druga równość (2.11) mówi, że pochodna tej funkcji względem x jest równa Q , czyli

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int P(t, x) dt + C(x) \right) = Q(t, x).$$

Wyznaczając z ostatniego związku $C(x)$, znajdziemy funkcję F . Pokazaliśmy więc, że jeśli spełniony jest warunek (2.13), to równanie (2.8) jest równaniem zupełnym.

Przypuśćmy teraz, że

$$\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} \neq \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t},$$

czyli, że rozważane równanie nie jest zupełne. Pomnóżmy obie strony równania przez funkcję μ zmiennych x i y . Aby tak otrzymane równanie było zupełne, wystarczy, że

$$\frac{\partial(\mu(t, x)P(t, x))}{\partial x} = \frac{\partial(\mu(t, x)Q(t, x))}{\partial t},$$

co jest równoważne warunkowi

$$\mu(t, x) \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + P(t, x) \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial x} = \mu(t, x) \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} + Q(t, x) \frac{\partial \mu(t, x)}{\partial t}.$$

Otrzymaliśmy na μ równanie różniczkowe cząstkowe, zatem na ogół równanie bardziej skomplikowane. Jeśli jednak μ jest funkcją tylko zmiennej t , wówczas

$$Q(t, x) \frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t) \left(\frac{\partial P(t, x)}{\partial x} - \frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} \right).$$

Jeśli ponadto wyrażenie $(P_x - Q_t)/Q$ zależy tylko od t , otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych. Rozwiązując to równanie, wyznaczymy czynnik całkujący $\mu(t)$, a mnożąc równanie przez ten czynnik, otrzymamy równanie zupełne.

Jeśli μ jest funkcją tylko zmiennej x , wówczas

$$P(t, x) \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x) \left(\frac{\partial Q(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} \right).$$

Jeśli ponadto wyrażenie $(Q_t - P_x)/P$ zależy tylko od x , otrzymamy równanie o zmiennych rozdzielonych. Po wyznaczeniu μ , mnożąc przez ten czynnik, równanie wyjściowe sprowadzimy do równania zupełnego.

Przykład 2.7. Znaleźć rozwiązanie równania

$$2t + 2x^2 + (4tx + 3x^2)x' = 0.$$

Położmy

$$P(t, x) = 2t + 2x^2, \quad Q(t, x) = 4tx + 3x^2.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 4x,$$

rozważane równanie jest równaniem zupełnym. Całkując względem t równość

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 2t + 2x^2,$$

otrzymamy

$$F(t, x) = t^2 + 2tx^2 + C(x).$$

Ponieważ

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = 4tx + C'(x),$$

na mocy drugiej równości (2.11) mamy

$$4tx + C'(x) = 4tx + 3x^2.$$

Stąd

$$C(x) = x^3.$$

Zatem

$$F(t, x) = t^2 + 2tx + x^3,$$

a szukane rozwiązanie ogólne ma postać

$$t^2 + 2tx + x^3 = C.$$

Przykład 2.8. Znaleźć rozwiązanie równania

$$(2tx^2 - x)dt + (x^2 + t + x)dx = 0.$$

Położmy

$$P(t, x) = 2tx^2 - x, \quad Q(t, x) = x^2 + t + x.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 4tx - 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = 1,$$

nie jest to równanie zupełne. Zauważmy, że

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) / P = \frac{2}{x},$$

co oznacza, że istnieje czynnik całkujący zależny tylko od x . Istnieje zatem funkcja $\mu(x)$ taka, że

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(x)(2tx^2 - x) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu(x)(x^2 + t + x) \right).$$

Po zrózniczkowaniu otrzymamy

$$\mu'(x)(2tx^2 - x) + \mu(x)(4tx - 1) = \mu(x),$$

a po uproszczeniu

$$x\mu' + 2\mu = 0.$$

Całką tego równania jest funkcja $\mu = 1/x^2$. Po pomnożeniu równania wyjściowego przez $1/x^2$ otrzymamy

$$\left(2t - \frac{1}{x} \right) dt + \left(1 + \frac{t}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że jest to równanie zupełne, a jego rozwiązanie ogólne ma postać

$$t^2 - t/x + x + \ln|x| = C.$$

2.6. Równanie Clairauta i równanie Lagrange'a

I. *Równaniem różniczkowym Clairauta* nazywamy równanie postaci

$$x = tx' + f(x'), \quad (2.14)$$

gdzie f jest zadaną funkcją.

Aby znaleźć rozwiązanie równania (2.14), wystarczy wyznaczyć x' . W tym celu zróżniczkujemy równanie (2.14) względem t . Otrzymamy

$$x' = x' + tx'' + f'(x')x'',$$

a po redukcji

$$x''(t + f'(x')) = 0.$$

Z warunku $x'' = 0$ mamy $x' = C$. Podstawiając tę wielkość do (2.14), uzyskamy całkę ogólną

$$x = Ct + f(C).$$

Jeśli z warunku $t + f'(x') = 0$ potrafimy wyznaczyć x' , to podstawiając uzyskane wyrażenie do równania (2.14), otrzymamy całkę szczególną tego równania, która zwykle jest funkcją innego typu niż całki dane rozwiązaniem ogólnym.

Przykład 2.9. Rozważmy równanie

$$x = tx' - (x')^2/2.$$

Całka ogólna ma postać

$$x = Ct - C^2/2.$$

Aby znaleźć całkę szczególną, zróżniczkujemy rozważane równanie względem t . Otrzymamy

$$x''(t - x') = 0.$$

Zatem $x' = t$, a szukana całka szczególna ma postać

$$x = t^2/2.$$

II. *Równaniem różniczkowym Lagrange'a* nazywamy równanie postaci

$$x = tf(x') + g(x'), \quad (2.15)$$

gdzie f i g są zadanymi funkcjami.

Położmy

$$p(t) = x'(t). \quad (2.16)$$

Jeśli wyznaczymy $p(t)$, to całka ogólna równania (2.15) wyrazi się wzorem

$$x = tf(p(t)) + g(p(t)). \quad (2.17)$$

W celu wyznaczenia $p(t)$ zróżniczkujemy wpraw równanie (2.15) względem t . Otrzymamy

$$x' = f(x') + t f'(x') x'' + g'(x') x'',$$

a po uwzględnieniu podstawienia (2.16)

$$p = f(p) + t f'(p) \frac{dp}{dt} + g'(p) \frac{dp}{dt}.$$

Równanie to możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(p - f(p)) \frac{dt}{dp} - f'(p)t = g'(p).$$

Zauważmy, że jest to równanie liniowe. Po znalezieniu całki $t = t(p)$ należy wyznaczyć $p = p(t)$, a podstawiając uzyskane wyrażenie do (2.17), otrzymamy szukane rozwiązanie. Jeśli nie potrafimy wyznaczyć p jako funkcji t , szukane rozwiązanie możemy przedstawić w postaci parametrycznej

$$t = t(p), \quad x = t(p)f(p) + g(p).$$

Przykład 2.10. Rozważmy równanie

$$x = \frac{1}{2}t \left(x' + \frac{4}{x'} \right).$$

Jest to równanie Lagrange'a, w którym funkcja g jest równa zero. Różniczkując względem t , otrzymamy

$$x' = \frac{1}{2} \left(x' + \frac{4}{x'} \right) + \frac{1}{2}t \left(x'' - \frac{4x''}{(x')^2} \right).$$

Po redukcji

$$\frac{1}{2}x' \left(1 - \frac{4}{(x')^2} \right) = \frac{1}{2}t \left(1 - \frac{4}{(x')^2} \right) x''.$$

Założmy, że $1 - 4/(x')^2 \neq 0$. Wówczas

$$tx'' = x'.$$

Po podstawieniu $x' = p$ otrzymamy równanie

$$t \frac{dp}{dt} = p,$$

którego całką jest funkcja $p = Ct$. Podstawiając Ct w miejsce x' w równaniu wyjściowym, otrzymamy całkę ogólną

$$x = \frac{1}{2}t \left(Ct + \frac{4}{Ct} \right) = \frac{Ct^2}{2} + \frac{2}{C},$$

lub w formie równoważnej

$$x = Ct^2 + \frac{1}{C}.$$

Warunek $1 - 4/(x')^2 = 0$ jest spełniony dla $x' = -2$ oraz $x' = 2$, co daje dwie całki szczególne

$$x = -2t \quad \text{oraz} \quad x = 2t.$$

Przykład 2.11. Rozważmy równanie

$$x = t(1 + x') + (x')^2.$$

Po zróżniczkowaniu względem t otrzymamy

$$x' = 1 + x' + tx'' + 2x'x''.$$

Podstawiając $p = x'(t)$, mamy

$$(t + 2p)\frac{dp}{dt} + 1 = 0,$$

a zmieniając rolę szukanej funkcji ze zmienną niezależną

$$\frac{dt}{dp} + t = -2p.$$

Całą ogólną tak uzyskanego równania liniowego jest funkcja

$$t = 2 - 2p + Ce^{-p}.$$

Niestety, tym razem z ostatniego związku nie potrafimy wyznaczyć p jako funkcję zmiennej t . Podstawiając natomiast w równaniu wyjściowym $x' = p$ oraz zastępując t uzyskanym wyrażeniem, otrzymamy

$$x = (2 - 2p + Ce^{-p})(1 + p) + p^2 = 2 - p^2 + (1 + p)Ce^{-p}.$$

Szukane rozwiązanie możemy teraz wyrazić w postaci parametrycznej:

$$t = 2 - 2p + Ce^{-p}, \quad x = 2 - p^2 + (1 + p)Ce^{-p}.$$

2.7. Przykłady wyznaczania rozwiązań w postaci parametrycznej

Przykład 2.12. Rozważmy równanie

$$x = x' + \ln x'.$$

Podstawiając $p = x'(t)$, otrzymamy

$$x = p + \ln p.$$

Jeśli wyznaczymy również t jako funkcję zmiennej p , rozwiązanie równania możemy podać w postaci parametrycznej

$$t = t(p), \quad x = x(p).$$

Wykorzystując różniczkę

$$dx = \left(1 + \frac{1}{p}\right)dp$$

oraz podstawienie $x' = p$ w wyrażeniu

$$dx = x'(t)dt,$$

otrzymamy równanie

$$pdt = \left(1 + \frac{1}{p}\right)dp,$$

którego całką jest funkcja

$$t = \ln |p| - 1/p + C.$$

Rozwiązanie parametryczne ma więc postać

$$t = \ln |p| - 1/p + C, \quad x = p + \ln p.$$

Przykład 2.13. Rozważmy równanie

$$e^{x'} + x' = t.$$

Podstawiając $p = x'(t)$ mamy

$$t = e^p + p.$$

Aby znaleźć postać parametryczną rozwiązania, musimy wyznaczyć x jako funkcję p . Oczywiście

$$dt = (e^p + 1)dp.$$

Wykorzystując tę równość oraz podstawienie $x' = p$ w wyrażeniu

$$dx = x'(t)dt,$$

otrzymamy

$$dx = p(e^p + 1)dp.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$x = (p - 1)e^p + p^2/2 + C.$$

Rozwiązanie parametryczne ma zatem postać:

$$t = e^p + p, \quad x = (p - 1)e^p + p^2/2 + C.$$

Przykład 2.14. Rozważmy równanie

$$(x')^3 - x^2(1 - x') = 0.$$

Podstawiając $p = x/x'$ mamy

$$\frac{x^3}{p^3} - x^2\left(1 - \frac{x}{p}\right) = 0,$$

a po stosownych przekształceniach

$$x - p^3 + p^2x = 0.$$

Stąd

$$x = \frac{p^3}{1 + p^2}.$$

Z drugiej strony

$$dx = x'(t)dt,$$

lub

$$dt = \frac{1}{x'(t)}dx.$$

Podstawiając do ostatniego wzoru wyrażenia

$$\frac{1}{x'} = \frac{p}{x} = p \frac{1 + p^2}{p^3} = \frac{1 + p^2}{p^2}, \quad dx = \left(\frac{p^3}{1 + p^2}\right)' dp = \frac{p^4 + 3p^2}{(1 + p^2)^2} dp,$$

otrzymamy

$$dt = \frac{3 + p^2}{1 + p^2} dp.$$

Stąd

$$t = p + 2\operatorname{arctg} p + C.$$

Szukane rozwiązanie można teraz wyrazić w postaci parametrycznej

$$t = p + 2\operatorname{arctg} p + C, \quad x = \frac{p^3}{1 + p^2}.$$

2.8. Równanie jednorodne względem szukanej funkcji i jej pochodnych

I. Funkcje F zmiennych $t, u_1, \dots, u_n$ nazywamy *jednorodną* względem zmiennych $u_1, \dots, u_n$, jeśli istnieje $\alpha \in \mathbb{R}$ takie, że

$$F(t, ru_1, \dots, ru_n) = r^\alpha F(t, u_1, \dots, u_n) \quad \text{dla } r \in \mathbb{R}.$$

Rozważmy równanie

$$F(t, x, x', \dots, x^n) = 0. \quad (2.18)$$

Jeśli F jest funkcją jednorodną względem x i jej pochodnych, to rząd równania możemy obniżyć, podstawiając

$$y = \frac{x'}{x}. \quad (2.19)$$

Oczywiście x i y są funkcjami zmiennej t .

Przykład 2.15. Rozważmy równanie

$$txx'' + t(x')^2 - xx' = 0.$$

W każdym składniku suma wykładników funkcji x i jej pochodnych wynosi dwa. Jest to zatem równanie jednorodne względem szukanej funkcji i jej pochodnych. Zgodnie ze wzorem (2.19) przyjmujemy

$$x' = xy.$$

Wówczas

$$x'' = x'y + xy' = (y^2 + y')x.$$

Podstawiając uzyskane wyrażenia do rozważanego równania, otrzymamy

$$tx^2(y^2 + y') + tx^2y^2 - x^2y = 0,$$

a po podzieleniu przez x^2

$$ty' - y = -2ty^2.$$

Jest to równanie Bernoulliego, a jego całką ogólną jest funkcja

$$y = \frac{t}{t^2 + C}.$$

Korzystając z równości $x' = xy$, otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2 + C_1}.$$

Rozwiązując ostatnie równanie, mamy

$$x = C_2 \sqrt{t^2 + C_1}.$$

II. Równanie (2.16) nazywamy *uogólnionym równaniem jednorodnym*, jeśli istnieje stała $k \geq n$ taka, że funkcja F jest jednorodna względem wszystkich swoich argumentów przy założeniu, że $t, x, x', \dots, x^{(n)}$ mają odpowiednio wymiar $1, k, k-1, \dots, k-n$. Wówczas podstawiając w równaniu wyjściowym

$$t = e^s, \quad x = ye^{sk}, \quad (2.20)$$

sprowadzimy go do równania niezawierającego zmiennej niezależnej.

Przykład 2.16. Rozważmy równanie

$$t^4 x'' + (tx' - x)^3 = 0.$$

Zgodnie z powyższą definicją należy przyjąć, że t, x, x', x'' mają odpowiednio wymiary: $1, k, k-1, k-2$. Wówczas pierwszy składnik ma wymiar $4+k-2$, a drugi $3k$. Z równości

$$4 + k - 2 = 3k$$

wynika, że $k = 1$. Zgodnie ze wzorem (2.20) podstawiamy

$$t = e^s, \quad x = ye^s.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \left(\frac{dy}{ds} e^s + ye^s \right) e^{-s} = \frac{dy}{ds} + y, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{ds} + y \right) = \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \right) e^{-s}. \end{aligned}$$

Przechodząc w rozpatrywanym równaniu do nowych zmiennych, otrzymamy

$$e^{4s} \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \right) e^{-s} + \left(e^s \left(\frac{dy}{ds} + y \right) - ye^s \right)^3 = 0,$$

a po podzieleniu przez e^{3s}

$$\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dy}{ds} + \left(\frac{dy}{ds} \right)^3 = 0.$$

W ostatnim równaniu podstawiamy

$$\frac{dy}{ds} = u$$

i przyjmujemy y za zmienną niezależną. Wówczas

$$\frac{dy^2}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \right) = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{ds} = u \frac{du}{dy}.$$

Podstawiając wyznaczone wielkości w miejsce $y'(s)$ oraz $y''(s)$, otrzymamy

$$u \frac{du}{dy} + u + u^3 = 0,$$

lub po podzieleniu przez u

$$\frac{du}{dy} + u^2 + 1 = 0.$$

Całkując ostatnie równanie, otrzymamy

$$\operatorname{arctg} u = -y + C_1.$$

Stąd

$$u = \operatorname{tg}(C_1 - y).$$

Zatem

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{tg}(C_1 - y),$$

a po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu

$$\sin(C_1 - y) = C_2 e^s.$$

Uwzględniając związki $t = e^s$, $y = x/t$, otrzymamy

$$\sin(C_1 - x/t) = C_2 t.$$

Stąd

$$x = t(C_1 - \arcsin(C_2 t)).$$

2.9. Równanie Riccatiego

Równaniem różniczkowym Riccatiego nazywamy równanie postaci

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad (2.21)$$

gdzie $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami, I przedziałem zbioru $\mathbb{R}$.

Założmy, że φ jest całką równania (2.21) w przedziale $J \subset I$. Wówczas funkcja $y = x - \varphi$ jest rozwiązaniem równania Bernoulliego

$$y' = (2a(t)\varphi(t) + b(t))y + a(t)y^2 \quad (2.22)$$

w przedziale J . Na odwrót, jeśli y jest rozwiązaniem równania (2.22) w przedziale $J \subset I$ to funkcja $x = y + \varphi$ jest rozwiązaniem równania (2.21) w przedziale J .

Istotnie, niech φ będzie rozwiązaniem równania (2.21). Wówczas

$$\begin{aligned} (x - \varphi)' &= x' - \varphi' = ax^2 + bx + c - (a\varphi^2 + b\varphi + c) = a(x^2 - \varphi^2) + b(x - \varphi) \\ &= (a(x + \varphi) + b)(x - \varphi) = (ax - a\varphi + 2a\varphi + b)(x - \varphi) \\ &= (a(x - \varphi) + 2a\varphi + b)(x - \varphi) = (2a\varphi + b)(x - \varphi) + a(x - \varphi)^2, \end{aligned}$$

co oznacza, że funkcja $y = x - \varphi$ jest rozwiązaniem równania (2.22).

Założmy teraz, że y jest rozwiązaniem równania (2.22). Wówczas

$$\begin{aligned} (y + \varphi)' &= y' + \varphi' = (2a\varphi^2 + b)y + ay^2 + a\varphi^2 + b\varphi + c \\ &= a(y^2 + 2a\varphi + \varphi^2) + b(y + \varphi) + c = a(y + \varphi)^2 + b(y + \varphi) + c, \end{aligned}$$

co oznacza, że $x = y + \varphi$ jest rozwiązaniem równania (2.21).

Przykład 2.17. Rozważmy równanie

$$x' = x^2 + \frac{1}{4t^2}.$$

Postać równania sugeruje, że rozwiązaniem szczególnym może być funkcja postaci $x = A/t$. Po podstawieniu do równania mamy

$$-\frac{A}{t^2} = \frac{A^2}{t^2} + \frac{1}{4t^2}.$$

Stąd

$$4A^2 + 4A + 1 = 0.$$

Zatem $A = -1/2$, a szukana całka szczególna

$$\varphi = -\frac{1}{2t}.$$

Podstawiając do równania wyjściowego

$$x = y - \frac{1}{2t},$$

otrzymamy równanie Bernoulliego

$$y' + \frac{y}{t} = y^2,$$

którego całką ogólną jest funkcja

$$y = \frac{1}{t(C - \ln |t|)}.$$

Zgodnie z powyższymi obserwacjami szukaną całką równania wyjściowego jest funkcja

$$x = y + \varphi = \frac{1}{t(C - \ln |t|)} - \frac{1}{2t}.$$

2.10. Równania drugiego rzędu sprowadzalne do równań pierwszego rzędu

Ograniczymy się do trzech typów równań drugiego rzędu, które łatwo możemy sprowadzić do równań pierwszego rzędu.

I. Równania postaci

$$x'' = f(t)$$

rozwiążemy, całkując dwukrotnie.

Przykład 2.18. Znaleźć całkę równania

$$x'' = \frac{1}{t}.$$

Oczywiście

$$x' = \ln |t| + C_1, \quad x = t \ln |t| + C_1 t + C_2.$$

II. Rozważmy równanie niezawierające bezpośrednio poszukiwanej funkcji, czyli równanie postaci

$$F(t, x', x'') = 0,$$

gdzie F jest funkcją znaną.

Podstawiając

$$y = x'(t),$$

otrzymamy równanie pierwszego rzędu

$$F(t, y, y') = 0.$$

Po znalezieniu całki $y = y(t)$ ostatniego równania szukane rozwiązanie x znajdziemy, całkując równanie $x' = y(t)$.

Przykład 2.19. Znaleźć całkę równania

$$t^2 x'' + tx' = 1.$$

Podstawiając $y = x'$, otrzymamy

$$t^2 y' + ty = 1,$$

którego całką jest funkcja

$$y = \frac{\ln |t| + C_1}{t}.$$

Zatem

$$x' = \frac{1}{t} \ln |t| + \frac{C_1}{t}.$$

Po scałkowaniu

$$x = \frac{1}{2} \ln^2 |t| + C_1 \ln |t| + C_2.$$

III. Rozważmy teraz równanie niezawierające zmiennej niezależnej, czyli równanie postaci

$$F(x, x', x'') = 0,$$

gdzie F jest znaną funkcją.

Przejdźmy do nowej funkcji u związanej z funkcją x zależnością

$$\frac{dx}{dt} = (u \circ x)(t).$$

Wówczas

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx}.$$

Podstawiając do równania wyjściowego wielkości $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{d^2 x}{dt^2} = u \frac{du}{dx}$, otrzymamy równanie pierwszego rzędu

$$F\left(x, u, u \frac{du}{dx}\right) = 0.$$

Zauważmy, że w równaniu tym zmienną niezależną jest x . Po wyznaczeniu całki $u = u(x)$ ostatniego równania, szukane rozwiązanie znajdziemy całkując równanie

$$\frac{dx}{dt} = u(x).$$

Przykład 2.20. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego

$$xx'' + (x')^2 = (x')^3, \quad x(1) = 1, \quad x'(1) = 2.$$

Podstawiając

$$x'(t) = u(x(t)),$$

otrzymamy

$$xu \frac{du}{dx} + u^2 = u^3,$$

a przy założeniu, że $u \neq 0$, dostajemy

$$x \frac{du}{dx} + u = u^2.$$

Jest to równanie Bernoulliego. Po podstawieniu $v = 1/u$ otrzymamy równanie liniowe

$$xv' - v = -1,$$

którego całką ogólną jest funkcja

$$v = 1 + C_1 x.$$

Ponieważ $u = 1/v$, wracając do funkcji x , mamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{C_1 x + 1}.$$

Stąd

$$t = C_1 x^2 + x + C_2.$$

Aby znaleźć całkę spełniającą zadane warunki początkowe, zróżniczkujemy ostatni związek względem t (jeśli chcemy skorzystać ze wzoru na pochodną wyznaczoną powyżej, musimy pamiętać, że w miejscu stałej C_1 winna być $C_1/2$). Otrzymamy

$$1 = 2C_1 x x' + x'.$$

Uwzględniając warunki początkowe, otrzymamy układ równań

$$1 = C_1 + 1 + C_2, \quad 1 = 4C_1 + 2.$$

Stąd $C_1 = -1/4$, $C_2 = 1/4$. Szukane rozwiązanie problemu początkowego jest zadane funkcją

$$x^2 - 4x + 4t - 1 = 0.$$

Zauważmy na koniec, że przypadek $u = 0$ dostarcza rozwiązań postaci $x = C$, $C \in \mathbb{R}$, z których żadne nie spełnia warunków początkowych.

2.11. Zadania

1. Znaleźć rozwiązanie równania o zmiennych rozdzielonych:

- a) $tx' + x - x^2 = 0$; b) $tx' + 1 = e^x$;
- c) $(x+1)x' = t$; d) $(1-t^2)x' = x^2 - 1$;
- e) $2(1+x^2) + 3tx^2x' = 0$, $x(1) = \pi/4$.

2. Znaleźć rozwiązanie równania jednorodnego:
 - a) $(t+x)x' = x - t$; b) $t^2x' = tx - x^2$;
 - c) $tx' = x(\ln x - \ln t)$; d) $x' = \frac{2tx}{t^2+x^2}$;
 - e) $tx' = x - \sqrt{t^2+x^2}$, $x(0) = 1$;
 - f) $tx' \cos \frac{x}{t} = x \cos \frac{x}{t} - t$, $x(\pi) = 1$;
 - g) $t^2x' + x^2 = txx'$, $x(1) = 1$.
3. Przesuwając stosownie układ współrzędnych, rozwiązać równania:
 - a) $2t + x + (t+5x-9)x' = 0$; b) $(t+2x+1)x' = 2t+x+2$;
 - c) $(t-2x+1)x' = 2t-x+1$; d) $x' = 2\left(\frac{t+1}{t-x-1}\right)^2$.
4. Znaleźć rozwiązanie równania liniowego:
 - a) $x' + \frac{t}{1+t^2}x = \frac{1}{t(1+t^2)}$; b) $tx' + x = e^t$;
 - c) $(t+e^{-x})x' + 1 = 0$; d) $x' = \frac{1}{e^x-t}$;
 - e) $x + (x^2-t)x' = 0$; f) $(t-2tx-x^2)x' + x^2 = 0$.
5. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego dla równania liniowego:
 - a) $x' - 2tx = t - t^3$, $x(0) = 2$;
 - b) $(\cos t)x' - (\sin t)x = \cos^2 t$, $x(0) = 1$;
 - c) $tx' - \frac{x}{t+1} = t$, $x(1) = 0$;
 - d) $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$, $x(\pi) = 0$;
 - e) $(t-2tx-x^2)x' + x^2 = 0$, $x(1) = 2$;
 - f) $x^2 - 1 + 2(t - (1+x)^2)x' = 0$, $t(3) = 1$.
6. Znaleźć rozwiązanie równania Bernoulliego:
 - a) $x' + \frac{2x}{t} = \frac{2\sqrt{x}}{t^2}$; b) $x' + 2tx = 2t^3x^3$;
 - c) $tx' + x = tx^2 \ln t$; d) $x + t(1+tx^4)x' = 0$;
 - e) $tx' = tx\sqrt{x} + x$; f) $x^3 - t^2/x)x' + t = 0$.
7. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego dla równania Bernoulliego:
 - a) $x' = tx^2 + t^2x$, $x(1) = 2$; b) $tx' + x = t^2x^2$, $x(1) = 1$;
 - c) $tx' + x = tx^2 \ln t$, $x(e) = 1$; d) $tx' - 4x - t^2\sqrt{x} = 0$, $x(0) = 1$;
 - e) $x' + 2tx = 2t^3x^2$, $x(0) = 0$; f) $(t^2x^3 + tx)x' = 1$, $x(1) = 0$;
 - g) $x + t(1+tx^4)x' = 0$, $x(1) = 3$.
8. Znaleźć rozwiązanie równania zupełnego:
 - a) $\frac{2t}{x^3}dt + \frac{x^3-3t^2}{x^4}dx = 0$; b) $e^x dt + (te^x - 2x)dx = 0$;
 - c) $1 + e^{\frac{1}{x}} + \frac{1-t}{x^2}e^{\frac{1}{x}}x' = 0$; d) $4x + 2te^x + t(4+te^x)x' = 0$;
 - e) $\left(\frac{1}{x} \sin \frac{t}{x} - \frac{x}{t^2} \cos \frac{t}{x} + 1\right)dt + \left(\frac{1}{t} \cos \frac{x}{t} - \frac{t}{x^2} \sin \frac{t}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = 0$;
 - f) $\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{(t-x)^2}\right)dt + \left(\frac{t^2}{(t-x)^2} - \frac{1}{x}\right)dx = 0$;
 - g) $(xe^{tx} + 4x^3) + (te^{tx} + 12tx^2 - 2x)x' = 0$.
9. Wyznaczyć czynnik całkujący i rozwiązać równanie:
 - a) $(t^2 + x^2 + 2t)dt + 2xdx = 0$; b) $\frac{x}{t}dt + (x^3 - \ln t)dx = 0$;

- c) $(t^2x^2 - 1)dx + 2tx^2dt = 0$; d) $(2tx^2 - x)dt + (x^2 + t + x)dx = 0$;
 e) $(t \cos x - x \sin x)dx + (t \sin x + x \cos x)dt = 0$;
 f) $3tx + x^2 + (3tx + x^4)x' = 0$, $\mu = \mu(t + x)$;
 g) $t + t^4 + 2t^2x^2 + x^4 + xx' = 0$, $\mu = \mu(t^2 + x^2)$.
10. Wyznaczyć całki równania Clairauta oraz równania Lagrange'a:
 a) $x = tx' + (x')^2$; b) $x = tx' + x' - (x')^3$;
 c) $x = tx' + 4\sqrt{x'}$; d) $x = t(x')^2 + (x')^3$;
 e) $x = tx' + 3\ln|x'|$; f) $x' - \ln(tx' - x) = 0$;
 g) $x = 2tx' + (x')^2$; h) $2xx' = t((x')^2 + 4)$.
11. Znaleźć rozwiązania równań:
 a) $x^2dt + 2(t^2 - tx^2)dx = 0$; b) $(\sin x \cos y)y' = \cos x \sin y + \operatorname{tg}^3 x$;
 c) $y - y' \cos x = y^2(1 - \sin x) \cos x$.
12. Wyznaczyć parametryczną postać rozwiązania równania:
 a) $t(x')^3 = 1 + x'$, $(x' = p)$; b) $(x')^3 - t^3(1 - x') = 0$, $(x' = p)$;
 c) $x = e^{x'}(x')^2$, $(x' = p)$; d) $x = -tx' + 3\ln|x'|$, $(x' = p)$;
 e) $x(1 + (x')^2) = 4$, $(x' = p)$; f) $(x')^3 + t^3 - 3tx' = 0$, $(x' = tp)$.
13. Stosując odpowiednie podstawienie, rozwiązać równania:
 a) $x' = 1 + t^2 - 2tx + x^2$, $(x = t + y^{-1})$;
 b) $x' - e^{-t}x^2 - x - e^t = 0$, $(x = e^ty)$.
14. Wyznaczyć całkę szczególną postaci $x = at + b$, a następnie znaleźć rozwiązanie ogólne równania Riccatiego:
 a) $x' = x^2 - 2tx + t^2 + 1$; b) $x' = x^2 - tx + 2t - 3$;
 c) $tx' = x^2 - (2t + 1)x + t^2 + 2t$.
15. Znaleźć rozwiązanie równań drugiego rzędu:
 a) $tx'' = x'$; b) $tx'' = x' \ln \frac{x'}{t}$;
 c) $xx'' = (x')^2$; d) $xx'' - (x')^2 = 3x^2x'$;
 e) $x'' - 2x' \operatorname{tg} t = \sin^3 t$.
16. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego dla równania drugiego rzędu:
 a) $2x'' = 3x^2$, $x(-2) = 1$, $x'(-2) = -1$;
 b) $xx'' + (x')^2 = (x')^3$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;
 c) $(x')^2 + 4x' = 4tx''$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$;
 d) $2x'' + tx''' = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x'''(0) = 3$;
 e) $x'' - 2x' \operatorname{ctg} t = \sin^3 t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$;
 f) $2xx'' + (x')^2 = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

Rozdział 3

Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu

3.1. Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \quad (3.1)$$

oraz skojarzone z nim równanie różniczkowe liniowe jednorodne

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0, \quad (3.2)$$

gdzie $a_1, \dots, a_n, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ ($J \subset \mathbb{R}$) są zadanymi funkcjami. Nietrudno sprawdzić, że prawdziwe są następujące uwagi.

Uwaga 3.1. *Jeśli funkcja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset J$) jest rozwiązaniem równania (3.2) w przedziale I , to funkcja $C\varphi$, gdzie C jest dowolną stałą, jest również rozwiązaniem równania (3.2) w przedziale I .*

Uwaga 3.2. *Jeśli funkcje $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset J$) są rozwiązaniami równania (3.2) w przedziale I , to funkcja $\varphi_1 + \varphi_2$ jest również rozwiązaniem równania (3.2) w przedziale I .*

Uwaga 3.3. *Jeśli funkcja φ jest rozwiązaniem równania (3.2) w przedziale I ($I \subset J$), a funkcja ψ rozwiązaniem równania (3.1) w przedziale I , to funkcja $\varphi + \psi$ jest rozwiązaniem równania (3.1) w przedziale I .*

Uwaga 3.4. *Jeśli funkcje $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ są rozwiązaniami równania (3.1) w przedziale I ($I \subset J$), to funkcja $\varphi_1 - \varphi_2$ jest rozwiązaniem równania (3.2) w przedziale I .*

Uwaga 3.5. *Jeśli $\psi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (3.1) z prawą stroną $f = f_1$, a $\psi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem równania (3.1) z prawą stroną $f = f_2$, to $\psi_1 + \psi_2$ jest rozwiązaniem równania (3.1) z prawą stroną $f = f_1 + f_2$.*

Należy podkreślić, że nawet dla równania liniowego drugiego rzędu nie mamy ogólnego sposobu na znalezienie rozwiązań. Co więcej, równanie to potrafimy rozwiązać tylko w nielicznych przypadkach. Niemniej, na temat ogólnej struktury zbioru rozwiązań równania różniczkowego n -tego rzędu posiadamy dość dużo informacji. Niektóre z nich sformułujemy poniżej.

Definicja 3.1. Niech $x_1, \dots, x_n$ będą całkami równania (3.2) w przedziale I ($I \subset J$). Wyrażenie

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nazywamy wrońskianem równania (3.2).

Twierdzenie 3.1 (Liouville'a.) Niech $x_1, \dots, x_n$ będą rozwiązaniami równania (3.2) w przedziale I ($I \subset J$), a $W(t)$ odpowiadającym im wrońskianem. Wówczas

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds} \quad \text{dla } t \in I,$$

gdzie t_0 jest dowolnie ustalonym punktem w I .

Dowód. Korzystając z faktu, że wyznacznik, który ma dwa wiersze identyczne, jest równy zero, nietrudno sprawdzić (zob. wzór (4.23) w następnym rozdziale), że

$$W'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-2)}(t) & x_2^{(n-2)}(t) & \dots & x_n^{(n-2)}(t) \\ x_1^{(n)}(t) & x_2^{(n)}(t) & \dots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

Zastępując n -te pochodne w ostatnim wierszu wyrażeniami

$$x_i^{(n)} = -a_1(t)x_i^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(t)x_i' - a_n(t)x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

i ponownie wykorzystując fakt zerowania się wyznaczników o identycznych wierszach, otrzymamy

$$W'(t) = -a_1(t)W(t).$$

Mnożąc ostatnią równość przez $e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds}$, mamy

$$e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds} W'(t) + a_1(t)e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds} W(t) = 0.$$

Ostatnią równość możemy zapisać w postaci

$$\left(e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds} W(t) \right)' = 0,$$

a stąd

$$e^{\int_{t_0}^t a_1(s)ds} W(t) = C.$$

W konsekwencji

$$W(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}.$$

Z twierdzenia 3.1 wynika natychmiast następująca uwaga:

Definicja 3.2. Mówimy, że całki $x_1, \dots, x_n$ równania (3.2) określone w przedziale I ($I \subset J$) tworzą układ fundamentalny (podstawowy) równania (3.2), jeśli odpowiadający im wronskian jest różny od zera.

$$x^{(k)}(t_0) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad k \neq i-1, \quad x^{(i-1)}(t_0) = 1,$$
$$W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Twierdzenie 3.2. Załóżmy, że funkcje $x_1, \dots, x_n$ tworzą układ fundamentalny równania (3.2) na przedziale I . Wówczas całka ogólna równania (3.2) ma postać

$$x = C_1x_1 + \dots + C_nx_n.$$

$$\varphi(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) \quad \text{dla } t \in I.$$
[illegible]
$$C_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$W_i(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_{i-1}(t) & \varphi(t) & x_{i+1}(t) & \dots & x_n(t) \\ x'_1(t) & \dots & x'_{i-1}(t) & \varphi'(t) & x'_{i+1}(t) & \dots & x'_n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_{i-1}^{(n-1)}(t) & \varphi^{(n-1)}(t) & x_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$
$$C_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} = \frac{W_i(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}}{W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a_1(s)ds}} = \frac{W_i(t_0)}{W(t_0)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Definicja 3.3. Funkcje $x_1, \dots, x_n$ określone na przedziale I nazywamy liniowo niezależnymi, jeśli z równości

wynika, że $C_1 = 0, \dots, C_n = 0$.

Twierdzenie 3.3. *Założmy, że funkcje $x_1, \dots, x_n$ są całkami równania (3.2) w przedziale I . Wówczas funkcje te tworzą układ fundamentalny wtedy i tylko wtedy, gdy są liniowo niezależne.*

Dowód. *Warunek konieczny.* Załóżmy, że funkcje $x_1, \dots, x_n$ tworzą układ fundamentalny równania (3.2). Przypuśćmy, że zachodzi warunek (3.4). Różniczkując kolejno do rzędu $n - 1$ równość (3.4), otrzymamy układ równań

[illegible]

Ponieważ wrońskian $W(t) \neq 0$, na mocy twierdzenia Cramera $C_1 = 0, \dots, C_n = 0$ dla dowolnego $t \in I$, co oznacza, że funkcje $x_1, \dots, x_n$ są liniowo niezależne.

Warunek wystarczający. Przypuśćmy, że rozwiązania $x_1, \dots, x_n$ równania (3.2) są funkcjami liniowo niezależnymi. Wówczas układ (3.5) posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe. Z teorii układów równań liniowych wynika, że wyznacznik współczynników tego układu jest różny od zera, co oznacza, że wronskian jest różny od zera. Zatem rozważane rozwiązania stanowią układ fundamentalny.

Z uwag 3.1–3.4 oraz twierdzeń 3.2 i 3.3 wynika następująca ważna uwaga.

Uwaga 3.7. Aby wyznaczyć całkę ogólną równania (3.1), wystarczy znaleźć n liniowo niezależnych całek równania (3.2) oraz jedną całkę szczególną równania (3.1).

3.2. Przykłady równań całkowalnych

Przykład 3.1. Rozważmy tzw. *równanie Cauchy'ego–Eulera*

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0, \quad t > 0,$$

gdzie a, b są dowolnymi stałymi. Szukamy rozwiązania postaci $x = t^m$, gdzie m jest wartością, którą należy wyznaczyć. Podstawiając przewidywaną postać rozwiązania do równania wyjściowego, otrzymamy

$$t^2 m(m-1)t^{m-2} + atmt^{m-1} + bt^m = 0,$$

a po redukcji i podzieleniu przez t^m

$$m^2 + (a-1)m + b = 0.$$

Niech m_1, m_2 będą pierwiastkami otrzymanego równania kwadratowego.

Jeśli $m_1 \neq m_2$ są liczbami rzeczywistymi, szukanymi całkami szczególnymi są funkcje $x_1 = t^{m_1}$ oraz $x_2 = t^{m_2}$, a całka ogólna ma postać

$$x = C_1 t^{m_1} + C_2 t^{m_2}.$$

Jeśli $m_1 = m_2$, całką szczególną jest oczywiście funkcja $x_1 = t^{m_1}$. Pokażemy, że całką szczególną jest również funkcja $x_2 = t^{m_1} \ln t$. Istotnie

$$t^2 x_2'' + atx_2' + bx_2 = [(m_1^2 + (a-1)m_1 + b) \ln t + 2m_1 - 1 + a] t^{m_1} = 0,$$

bowiem m_1 jest pierwiastkiem równania kwadratowego, a ponadto $m_1 = (1-a)/2$. W konsekwencji rozwiązanie ogólne ma postać

$$x = C_1 t^{m_1} + C_2 t^{m_1} \ln t.$$

Jeśli pierwiastki są liczbami zespolonymi, tzn. $m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$, wówczas całkami równania są funkcje zespolone $z_1 = t^{m_1}$, $z_2 = t^{m_2}$. Zauważmy, że

$$t^{m_1} = t^{\alpha+i\beta} = t^\alpha (t^\beta)^i = t^\alpha e^{i\beta \ln t} = t^\alpha (\cos(\beta \ln t) + i \sin(\beta \ln t))$$

Przyjmując

$$x_1 = t^\alpha \cos(\beta \ln t) \quad \text{oraz} \quad x_2 = t^\alpha \sin(\beta \ln t),$$

rozwiązanie $z_1 = t^{m_1}$ równania wyjściowego możemy zapisać w postaci

$$z_1 = x_1(t) + i x_2(t).$$

Zatem

$$t^2(x_1''(t) + ix_2''(t)) + at(x_1'(t) + ix_2'(t)) + b(x_1(t) + ix_2(t)) = 0,$$

lub równoważnie

$$t^2 x_1''(t) + atx_1'(t) + bx_1(t) + i(t^2 x_2''(t) + atx_2'(t) + bx_2(t)) = 0.$$

Funkcja zespolona jest równa zeru tylko wtedy, gdy jej część rzeczywista i część urojona są równe zeru, wynika stąd, że całkami szczególnymi naszego równania są funkcje rzeczywiste x_1 i x_2 . Całka ogólna ma zatem postać

$$x = C_1 t^\alpha \cos(\beta \ln t) + C_2 t^\alpha \sin(\beta \ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Korzystając z powyższych obserwacji, nietrudno sprawdzić, że całką ogólną równania

$$t^2 x'' + tx' - \lambda^2 x = 0$$

jest funkcja

$$x = C_1 t^\lambda + C_2 t^{-\lambda}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

całką ogólną równania

$$t^2 x'' + 3tx' + x = 0$$

jest funkcja

$$x = (C_1 + C_2 \ln t)/t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

a całką ogólną równania

$$t^2 x'' - tx' + 2x = 0$$

jest funkcja

$$x = C_1 t \cos(\ln t) + C_2 t \sin(\ln t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uwaga 3.8. Jeśli x_1 jest rozwiązaniem równania liniowego, to oczywiście Cx_1 jest również rozwiązaniem tego równania. Zastępując stałą C funkcją $C(t)$ i podstawiając do równania wyjściowego $x = C(t)x_1(t)$ możemy wyznaczyć funkcję $C(t)$ tak, aby wyrażenie $x = C(t)x_1(t)$ było całką ogólną rozważanego równania. W szczególności metodą tą często udaje się wyznaczyć rozwiązania liniowo niezależne od x_1 .

Przykład 3.2. Widać, że funkcja $x_1 = t^2$ jest całką równania

$$t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0.$$

Oczywiście $x = Ct^2$ jest również całką tego równania. Po zastąpieniu stałej funkcją $u(t)$ i podstawieniu wyrażen $x' = t^2 u'(t) + 2tu(t)$ oraz $x'' = t^2 u''(t) + 4tu'(t) + 2u(t)$ do równania wyjściowego, po stosownej redukcji otrzymamy

$$tu''(t) + 2u'(t) = 0.$$

Całką ostatniego równania jest funkcja $u(t) = \frac{C_1}{t} + C_2$. Rozwiązanie ogólne naszego równania ma postać

$$x = \left(\frac{C_1}{t} + C_2\right)t^2 = C_1 t + C_2 t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Całkami liniowo niezależnymi są funkcje $x_1 = t^2$ oraz $x_2 = t$.

Przykład 3.3. Widać, że funkcja $x_1 = t^2$ jest całką równania

$$t^2 x'' + 3tx' - 8x = 0.$$

Oczywiście $x = Ct^2$, gdzie C jest stałą dowolną, jest również całką tego równania. Zastosujmy teraz metodę *uzmiennienia stałej*, czyli zastępujemy stałą C funkcją u zmiennej t , którą będziemy się starali dobrać tak, aby funkcja $x = u(t)t^2$ była rozwiązaniem ogólnym równania wyjściowego. Po podstawieniu wyrażeń $x' = u't^2 + 2tu$ oraz $y'' = t^2 u'' + 4tu' + 2u$ do równania wyjściowego otrzymamy po stosownej redukcji

$$tu'' + 7u' = 0.$$

Całką ostatniego równania jest funkcja $u(t) = C_1 t^{-6} + C_2$. Szukana całka ogólna równania wyjściowego ma zatem postać

$$x = (C_1 t^{-6} + C_2) t^2 = C_1 t^{-4} + C_2 t^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście całkami liniowo niezależnymi rozważanego równania są funkcje $x_1 = t^2$ oraz $x_2 = t^{-4}$.

3.3. Równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

Rozważmy równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (3.6)$$

oraz skojarzone z nim równanie liniowe jednorodne

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0, \quad (3.7)$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są stałymi, f funkcją zmiennej t .

Zgodnie z wynikami poprzedniej sekcji, aby wyznaczyć całkę ogólną równania (3.6), należy wyznaczyć całkę ogólną równania (3.7) oraz całkę szczególną równania (3.6).

Szukamy całek równania (3.7) postaci

$$x = e^{\lambda t},$$

gdzie λ jest stałą, którą należy wyznaczyć.

Podstawiając wielkości

$$x' = \lambda e^{\lambda t}, \quad x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad x^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t}$$

do równania (3.7), a następnie dzieląc przez czynnik $e^{\lambda t}$, otrzymamy tzw. *równanie charakterystyczne*

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3.8)$$

Wiadomo, że równanie to posiada n pierwiastków, przy czym mogą to być pierwiastki rzeczywiste pojedyncze, pierwiastki zespolone, jak również pierwiastki wielokrotne. Pierwiastki te nazywamy *wartościami własnymi* równania (3.7). Pokażemy, że w każdym z tych przypadków jesteśmy w stanie znaleźć n liniowo niezależnych rozwiązań równania (3.7).

Przyjmijmy oznaczenia

$$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x$$

oraz

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Oczywiście $\mathcal{L}$ jest operatorem liniowym na klasie funkcji n -krotnie różniczkowalnych.

Równanie (3.7) można teraz zapisać w postaci

$$\mathcal{L}(x) = 0, \quad (3.9)$$

a równanie charakterystyczne (3.8) w postaci

$$P(\lambda) = 0. \quad (3.10)$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} P(\lambda).$$

Zatem, jeśli λ_0 jest wartością własną równania (3.7) to $\mathcal{L}(e^{\lambda_0 t}) = 0$, co oznacza, że funkcja $x = e^{\lambda_0 t}$ jest rozwiązaniem równania (3.7).

W szczególności, jeśli λ_0 jest rzeczywistą wartością własną, to funkcja

$$x = e^{\lambda_0 t}$$

jest rozwiązaniem równania (3.7).

Wynika stąd, że jeśli $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są jednokrotnymi rzeczywistymi wartościami własnymi, to odpowiadające im rozwiązania $x_1 = e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n = e^{\lambda_n t}$ stanowią układ fundamentalny.

Przypuśćmy, że $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ jest liczbą zespoloną. Wówczas

$$0 = \mathcal{L}(e^{(\alpha+i\beta)t}) = \mathcal{L}(e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)) = \mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos \beta t) + i \mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin \beta t),$$

skąd wynika natychmiast, że $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cos \beta t) = 0$ oraz $\mathcal{L}(e^{\alpha t} \sin \beta t) = 0$. Zatem funkcje

$$x_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{oraz} \quad x_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$$

są całkami równania (3.7). Oczywiście funkcje te są liniowo niezależne.

Jeśli λ_0 jest pierwiastkiem m -krotnym równania (3.8), to funkcje

$$x_j = t^j e^{\lambda_0 t}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1,$$

są całkami równania (3.7).

Sprawdźmy ostatnie stwierdzenie dla $m = 2$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(te^{\lambda t}) &= \mathcal{L}\left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\right) = \frac{d}{d\lambda} \mathcal{L}(e^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda} (e^{\lambda t} P(\lambda)) \\ &= te^{\lambda t} P(\lambda) + e^{\lambda t} \frac{d}{d\lambda} P(\lambda). \end{aligned}$$

Jeśli λ_0 jest pierwiastkiem dwukrotnym równania (3.8), to $P(\lambda_0) = 0$ oraz $\frac{d}{d\lambda} P(\lambda_0) = 0$. W konsekwencji $\mathcal{L}(e^{\lambda_0 t}) = 0$ oraz $\mathcal{L}(te^{\lambda_0 t}) = 0$, co oznacza, że funkcje $x = e^{\lambda_0 t}$ oraz $x = te^{\lambda_0 t}$ są rozwiązaniami równania (3.7). Analogicznie możemy sprawdzić powyższe stwierdzenie dla $m > 2$.

Dla lepszego wyjaśnienia sytuacji powtórzmy powyższe rozważania dla równania drugiego rzędu

$$ax'' + bx' + cx = 0, \quad a \neq 0. \quad (3.11)$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (3.12)$$

Przypadek $\Delta > 0$. Pierwiastkami równania (3.12) są liczby

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

a szukane rozwiązania mają postać

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}.$$

Ponieważ wrońskian

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}e^{-\frac{b}{a}t} \neq 0,$$

funkcje x_1, x_2 tworzą układ podstawowy równania (3.11). Zgodnie z twierdzeniem 3.2 całka ogólna tego równania ma postać

$$x_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi (tym razem zamiast C_1, C_2).

Przypadek $\Delta = 0$. Wówczas

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a},$$

i uzyskamy całkę równania (3.11)

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}.$$

Rozwiązania równania (3.11) szukamy teraz w postaci

$$x = u(t)e^{\lambda_1 t},$$

gdzie u jest funkcją, którą należy wyznaczyć.

Podstawiając tak określoną funkcję do równania (3.11), otrzymamy

$$a(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u)e^{\lambda_1 t} + b(u' + \lambda_1 u)e^{\lambda_1 t} + c u e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Stąd

$$au'' + (2a\lambda_1 + b)u' + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)u = 0.$$

Ponieważ λ_1 jest pierwiastkiem równania (3.12), trzeci wyraz po lewej stronie ostatniej równości jest równy zeru, a z równości $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ wynika, że również drugi wyraz jest równy zeru. Zatem $u'' = 0$. Stąd $u = C_1 + C_2 t$, a szukana całka ogólna ma postać

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t},$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

Zauważmy, że funkcje $x_1 = e^{\lambda_1 t}$ oraz $x_2 = t e^{\lambda_1 t}$ tworzą układ fundamentalny.

Przypadek $\Delta < 0$. Równanie (3.12) posiada dwa pierwiastki zespolone sprzężone

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{-b}{2a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Odpowiadające im rozwiązania w zbiorze liczb zespolonych mają postać:

$$z_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad z_2 = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

Kładąc

$$\varphi(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad \psi(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

mamy

$$z_1(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \quad z_2(t) = \varphi(t) - i\psi(t).$$

Podstawiając funkcję z_1 do równania (3.11), otrzymamy

$$a(\varphi''(t) + i\psi''(t)) + b(\varphi'(t) + i\psi'(t)) + c(\varphi(t) + i\psi(t)) = 0,$$

lub

$$(a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t)) + (a\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t))i = 0.$$

Ponieważ liczba zespolona jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy jej część urojona i rzeczywista jest równa zero, ostatnia równość jest równoważna warunkom:

$$a\varphi''(t) + b\varphi'(t) + c\varphi(t) = 0, \quad a\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) = 0,$$

co oznacza, że funkcje φ i ψ są całkami równania (3.11). Ponieważ tworzą one układ podstawowy (sprawdzić!), całka ogólna równania (3.11) ma postać

$$x = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem całki ogólnej liniowego równania niejednorodnego

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad a \neq 0. \quad (3.13)$$

Metoda uzmiennienia stałych. Jeśli x_1, x_2 są całkami szczególnymi równania jednorodnego

$$ax'' + bx' + cx = 0,$$

skojarzonego z równaniem (3.13), to całka ogólna tego równania ma postać

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi. Powstaje pytanie: można stałe C_1 i C_2 zastąpić odpowiednio funkcjami $A(t)$ i $B(t)$ (zmiennej t) tak dobranymi, aby wyrażenie

$$x(t) = A(t)x_1(t) + B(t)x_2(t)$$

było całką ogólną równania (3.13)? Operację tę niezbyt poprawnie zwyczajowo nazywamy *uzmiennieniem stałych*.

Oczywiście

$$x'(t) = A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) + A(t)x_1'(t) + B(t)x_2'(t).$$

Aby uprościć rachunki, założmy dodatkowo, że

$$A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) = 0.$$

Wówczas

$$x' = Ax'_1 + Bx'_2, \quad x'' = A'x'_1 + B'x'_2 + Ax''_1 + Bx''_2.$$

Podstawiając ostatnie wzory do równania (3.10), otrzymamy

$$a(A'x'_1 + B'x'_2 + Ax''_1 + Bx''_2) + b(Ax'_1 + Bx'_2) + c(Ax_1 + Bx_2) = f(t),$$

a po uporządkowaniu

$$A(ax''_1 + bx'_1 + cx_1) + B(ax''_2 + bx'_2 + cx_2) + a(A'x'_1 + B'x'_2) = f(t).$$

Ponieważ pierwszy i drugi wyraz lewej strony jest równy zeru, uzyskana równość redukuje się do postaci

$$a(A'x'_1 + B'x'_2) = f(t).$$

Tak więc funkcje A i B winny spełniać układ równań

$$\begin{aligned} A'x_1 + B'x_2 &= 0, \\ A'x'_1 + B'x'_2 &= \frac{f(t)}{a}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Z otrzymanego układu równań możemy wyznaczyć A' i B' , a po scałkowaniu otrzymamy szukane funkcje $A(t)$ i $B(t)$.

Przykład 3.4. Znaleźć całkę ogólną równania

$$2x'' + x' - x = t.$$

Układ podstawowy skojarzonego równania jednorodnego tworzą funkcje

$$x_1 = e^{-t}, \quad x_2 = e^{\frac{1}{2}t}.$$

Odpowiednik układu równań (3.14) ma postać

$$\begin{aligned} A'e^{-t} + B'e^{\frac{1}{2}t} &= 0, \\ -A'e^{-t} + \frac{1}{2}B'e^{\frac{1}{2}t} &= \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

Stąd

$$A' = -\frac{1}{3}te^t, \quad B' = \frac{1}{3}te^{-\frac{1}{2}t}.$$

Po scałkowaniu

$$A(t) = \frac{1}{3}(1-t)e^t + C_1, \quad B(t) = -\frac{2}{3}(t+2)e^{-\frac{1}{2}t} + C_2.$$

Szukana całka ogólna ma postać

$$x = \left(\frac{1}{3}(1-t)e^t + C_1\right)e^{-t} + \left(-\frac{2}{3}(t+2)e^{-\frac{1}{2}t} + C_2\right)e^{\frac{1}{2}t} = C_1e^{-t} + C_2e^{\frac{1}{2}t} - t - 1.$$

Metoda przewidywań. Zgodnie z uwagą 3.8, aby wyznaczyć całkę ogólną równania (3.13), wystarczy znaleźć całkę ogólną jednorodnego równania skojarzonego oraz jedną całkę równania (3.13). Często prawa strona równania (3.13) sugeruje postać tej całki. Poniższa tabela podaje postać spodziewanego rozwiązania w zależności od funkcji f .

Tabela 3.1
Postać przewidywanego rozwiązania

$f(t)$	Przewidywana postać	Stałe do wyznaczenia
$e^{\lambda t}$	$Ae^{\lambda t}$	A
$\sin \alpha t$	$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$	A, B
$\cos \alpha t$	$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$	A, B
$a_0 t^n + \dots + a_n$	$A_0 t^n + \dots + A_n$	$A_0, \dots, A_n$
$(a_0 t^n + \dots + a_n)e^{\lambda t}$	$(A_0 t^n + \dots + A_n)e^{\lambda t}$	$A_0, \dots, A_n$
$(at + b) \sin \alpha t$	$(At + B) \sin \alpha t + (Ct + D) \cos \alpha t$	A, B, C, D
$(at + b) \cos \alpha t$	$(At + B) \sin \alpha t + (Ct + D) \cos \alpha t$	A, B, C, D
$e^{\lambda t} \sin \alpha t$	$(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t)e^{\lambda t}$	A, B
$e^{\lambda t} \cos \alpha t$	$(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t)e^{\lambda t}$	A, B

Przykład 3.5. Znaleźć całkę szczególną równania

$$2x'' + 3x' - x = t^2 + 3.$$

Zgodnie z powyższą tabelą szukamy całki postaci

$$x = At^2 + Bt + C.$$

Podstawiając do równania, otrzymamy

$$2(2A) + 3(2At + B) - (At^2 + Bt + C) = t^2 + 3.$$

Ostatnia równość zachodzi, jeśli

$$-A = 1, \quad 6A - B = 0, \quad 4A + 3B - C = 3.$$

Stąd

$$A = -1, \quad B = -6, \quad C = -25,$$

a szukana całka ma postać

$$x = -t^2 - 6t - 25.$$

Przykład 3.6. Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^4 - x = \sin 2t.$$

Równanie charakterystyczne skojarzonego równania różniczkowego jednorodnego ma postać

$$\lambda^4 - 1 = 0.$$

Pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -i, \quad \lambda_4 = i,$$

a całkami równania jednorodnego funkcje:

$$x_1 = e^{-t}, \quad x_2 = e^t, \quad x_3 = \sin t, \quad x_4 = \cos t.$$

Zgodnie z sugestią zawartą w tabeli przewidujemy całkę szczególną równania niejednorodnego postaci

$$x = A \sin 2t + B \cos 2t.$$

Podstawiając do równania wyjściowego, otrzymamy

$$15A \sin 2t + 15B \cos 2t = \sin 2t.$$

Stąd $A = 1/(15)$, $B = 0$, a całka szczególna

$$x = \frac{1}{15} \sin 2t.$$

Zatem szukana całka ogólna ma postać

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 \sin t + C_4 \cos t + \frac{1}{15} \sin 2t,$$

gdzie $C_1, \dots, C_4$ są stałymi dowolnymi.

Przykład 3.7. Znaleźć całkę ogólną równania

$$x'' + x = \sin t.$$

Całkami skojarzonego równania jednorodnego są funkcje:

$$x_1 = \sin t, \quad x_2 = \cos t.$$

Zgodnie z sugestią winniśmy szukać rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego postaci

$$x = A \sin t + B \cos t,$$

Oczywiście jest to niemożliwe, bowiem powyższa funkcja jest rozwiązaniem równania jednorodnego. Musimy zatem skorzystać z metody uzmienniania stałych. Rachunki pozostawiamy czytelnikowi.

Przykład 3.8. Znaleźć całkę ogólną równania

$$x'' + x = \operatorname{tg}^3 t + \sin(2t/3).$$

Zgodnie z uwagą 3.5 szukane rozwiązanie jest sumą całki ogólnej równania

$$x'' + x = \operatorname{tg}^3 t$$

oraz całki szczególnej równania

$$x'' + x = \sin(2t/3).$$

Całkę ogólną znajdziemy metodą uzmienniania stałych, a całkę szczególną metodą przewidywań.

3.4. Postać całkowa rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu

Rozważmy liniowe niejednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \quad (3.15)$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, f : J \rightarrow \mathbb{R}$ są zadanymi funkcjami ciągłymi. Niech φ i ψ będą liniowo niezależnymi całkami skojarzonego z nim równania jednorodnego

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0. \quad (3.16)$$

Oczywiście całka ogólna równania (3.16) ma postać

$$x = C_1\varphi(t) + C_2\psi(t). \quad (3.17)$$

Aby znaleźć całkę ogólną równania (3.15), stałe C_1 i C_2 we wzorze (3.17) zastępujemy stosownie dobranymi funkcjami $u(t)$ i $v(t)$, czyli szukamy całki równania (3.15) postaci

$$x = u(t)\varphi(t) + v(t)\psi(t), \quad (3.18)$$

gdzie u i v są funkcjami, które należy wyznaczyć. Mamy

$$x' = u'\varphi + u\varphi' + v'\psi + v\psi'.$$

Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy

$$\varphi u' + \psi v' = 0. \quad (3.19)$$

Wówczas

$$x' = \varphi' u + \psi' v, \quad x'' = \varphi'' u + \varphi' u' + \psi'' v + \psi' v'.$$

Podstawiając ostatnie wielkości do równania (3.15), otrzymamy

$$a_0(\varphi'' u + \varphi' u' + \psi'' v + \psi' v') + a_1(\varphi' u + \psi' v) + a_2(\varphi u + \psi v) = f,$$

lub w postaci równoważnej

$$(a_0\varphi'' + a_1\varphi' + a_2\varphi)u + (a_0\psi'' + a_1\psi' + a_2\psi)v + a_0(\varphi' u' + \psi' v') = f.$$

Ponieważ φ i ψ są całkami równania (3.16), pierwsze dwa wyrazy się zerują. Otrzymamy zatem

$$\varphi' u' + \psi' v' = \frac{f}{a_0}.$$

Stąd i z warunku (3.19) otrzymujemy

$$u' = -\frac{\psi f}{a_0 W}, \quad v' = \frac{\varphi f}{a_0 W}, \quad (3.20)$$

gdzie

$$W = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix},$$

Po podstawieniu do (3.18) funkcji u i v otrzymanych po scałkowaniu wzorów (3.20) otrzymamy

$$x(t) = -\varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\psi(s)f(s)}{a_0(s)W(s)} ds + \psi(t) \int_{t_0}^t \frac{\varphi(s)f(s)}{a_0(s)W(s)} ds = \int_{t_0}^t H(s, t) \frac{f(s)}{a_0(s)} ds,$$

gdzie

$$H(s, t) = \begin{vmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi(t) & \psi(t) \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \varphi(s) & \psi(s) \\ \varphi'(s) & \psi'(s) \end{vmatrix},$$

a $t_0 \in J$ jest dowolnie ustalone.

Nietrudno sprawdzić, że zachodzą następujące warunki:

- (i) Funkcja H jest określona na zbiorze $J \times J$.
- (ii) W każdym punkcie zbioru $J \times J$ funkcja H ma ciągle pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu względem t .
- (iii) $H(t, t) = 0$ oraz $\frac{\partial H}{\partial t}(t, t) = 1$ dla $t \in J$.
- (iv) Dla dowolnego $s \in J$ funkcja $y(t) = H(s, t)$ jest rozwiązaniem równania (3.16) spełniającym warunki $y(s) = 0, y'(s) = 1$.
- (v) Funkcja

$$x(t) = \int_{t_0}^t H(s, t) \frac{f(s)}{a_0(s)} ds$$

jest rozwiązaniem równania (3.15) spełniającym warunki $x(t_0) = x'(t_0) = 0$.

Zastosowany tutaj pomysł wyrażenia rozwiązania problemu początkowego za pomocą wzoru całkowego (którego jądrem w naszym przypadku jest funkcja H), jest szeroko stosowany w teorii problemów brzegowych. W szczególności na tym pomysśle opiera się tak zwana metoda funkcji Greena.

3.5. Zadania

1. Pokazać, że problem początkowy

$$x'' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą, jest równoważny równaniu całkowemu

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)x_1 + \int_{t_0}^t (t - s)f(s, x(s))ds.$$

Wskazówka: Połóżmy $F(s) = s \int_{t_0}^s f(\tau, x(\tau))d\tau$. Po zrózniczkowaniu względem s otrzymamy $\int_{t_0}^s f(\tau, x(\tau))d\tau = F'(s) - sf(s, x(s))$. Całkując ostatnią równość w przedziale $[t_0, t]$, otrzymamy $\int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^s f(\tau, x(\tau))d\tau = \int_{t_0}^t (t - s)f(s, x(s))ds$. Całkując dwukrotnie równania wyjściowe i wykorzystując ostatni wzór, otrzymamy tezę.

2. Mając dane rozwiązanie x_1 , wyznaczyć rozwiązanie liniowo niezależne od x_1 :
 - a) $(t^2 - t)x'' + (3t - 1)x' + x = 0$ ($t \neq 0, t \neq 1$), $x_1 = 1/(t - 1)$;
 - b) $t(t - 1)x'' + 2(t - 1)x' - 2x = 0$ ($t \neq 0, t \neq 2$), $x_1 = 1 - t$;
 - c) $tx'' - x' - 4t^3x = 0$ ($t \neq 0$), $x_1 = e^{t^2}$;
 - d) $tx'' - (t + 2)x' + 2x = 0$, $x_1 = e^t$;
 - e) $x'' + \alpha(tx' + x) = 0$, $x_1 = e^{-\alpha t^2/2}$;
 - f) $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$, $x_1 = t$.
3. Znaleźć całkę ogólną równania Cauchy–Eulera:
 - a) $t^2x'' - 5tx' + 8x = 0$; b) $t^2x'' - 3tx' + 5x = 0$;
 - c) $t^2x'' - 3tx' + 4x = 0$; d) $t^2x'' + 6tx' + x = 0$.
4. Znaleźć całkę ogólną równania:
 - a) $x'' - 5x' + 6x = 0$; b) $x'' - 6x' + 9x = 0$;
 - c) $x'' - x' + x = 0$; d) $x''' + x' - 2 = 0$.
5. Stosując metodę przewidywań, znaleźć całkę ogólną równania:
 - a) $x'' - 7x' + 6x = \sin t$; b) $x'' + x = 2 \sin t - 2e^{-t}$;
 - c) $x'' + 2x' + x = t \sin t$; d) $x'' + x = e^t \sin t$;
 - e) $x'' - 2x' + 4x = 4e^t \cos t$.
6. Stosując metodę uzmiennienia stałych, znaleźć całkę ogólną równania:
 - a) $x'' + x = \frac{1}{\sin t}$; b) $x'' - x' = e^{2t} \sqrt{1 - e^{2t}}$;
 - c) $x'' - x' = \frac{e^t}{1 + e^t}$; d) $x'' - 2x' + x = \frac{e^t}{t^2 + 1}$;
7. Znaleźć całkę ogólną równania:
 - a) $x''' + 4x' = \sin 2t$; b) $x^{IV} - x''' = \cos t$;
 - c) $x''' - x = t^3 - 1$; d) $x''' + x'' + x' + x = te^t$.
8. Znaleźć rozwiązanie problemu początkowego:
 - a) $x'' - x' = e^t(1 - t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;
 - b) $x'' + 5x' + 4x = e^{-4t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;
 - c) $x'' + x + \operatorname{ctg}^2 t = 0$, $x(\pi/2) = 1$, $x'(\pi/2) = -1$;
 - d) $x''' - x' = 4t - 6e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 3$;
 - e) $x''' + 2x'' + x' + 2e^{-2t} = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$, $x''(0) = 1$.

Układy równań różniczkowych liniowych

Rozważmy układ równań liniowych

[illegible]

gdzie $a_{11}, \dots, a_{nn} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$) są zadanymi funkcjami.

Przyjmując

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

układ równań (4.1) możemy zapisać w równoważnej postaci macierzowej

$$x' = A(t)x, \quad t \in I. \quad (4.2)$$

Ponieważ ostatni zapis jest bardziej ekonomiczny, obecnie jest raczej powszechnie używany. Zgodnie z tym zapisem, zamiast mówić o układzie równań (4.1) możemy mówić o równaniu wektorowym (krótko: równaniu) (4.2).

Definicja 4.1. Funkcje $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy rozwiązaniem (lub całką) równania (4.2) w przedziale I , jeśli funkcja ta jest różniczkowalna w przedziale I i ponadto $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t)$ dla $t \in I$.

Zauważmy, że rozwiązanie układu (4.1) zapisujemy w postaci wektorowej (jako wiersz) $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, natomiast w równaniu (4.2) w postaci kolumny $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$. Ponieważ z kontekstu na ogół wynika, o jaki zapis chodzi, symbol transponowania T w literaturze jest zwykle pomijany.

Uwaga 4.1. Jeśli funkcje $\varphi^1, \dots, \varphi^n : I \rightarrow R^n$ są całkami równania (4.2) w przedziale I , to funkcja $C_1\varphi^1 + \dots + C_n\varphi^n$, gdzie $C_1, \dots, C_n$ są dowolnymi stałymi, jest również całką równania (4.2) w przedziale I .

Niech $\varphi^1, \dots, \varphi^n : I \rightarrow R^n$ będą całkami równania (4.2). Połóżmy

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Jeśli $\varphi^1, \dots, \varphi^n : I \rightarrow R^n$ ($\varphi^k = (\varphi_1^k, \dots, \varphi_n^k)$, $k = 1, \dots, n$) są całkami liniowo niezależnymi, macierz (4.3) nazywamy *macierzą fundamentalną* (lub *podstawową*) równania (4.2).

Położmy

$$W(t) = \det X(t). \quad (4.4)$$

Twierdzenie 4.1 (Abela). Niech $\varphi^1, \dots, \varphi^n : I \rightarrow R^n$ będą całkami równania (4.2). Niech $W(t)$ będzie dane wzorem (4.4) i niech $t_0 \in I$. Wówczas

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{Tr} A(s) ds},$$

gdzie $\text{Tr} A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$.

Dowód. Zauważmy, że

$$W'(t) = \begin{vmatrix} (\varphi_1^1)'(t) & \dots & (\varphi_1^n)'(t) \\ \varphi_2^1(t) & \dots & \varphi_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n-1}^1(t) & \dots & \varphi_{n-1}^n(t) \\ (\varphi_n^1)'(t) & \dots & (\varphi_n^n)'(t) \end{vmatrix}. \quad (4.5)$$

Rozważmy pierwszy składnik sumy po prawej stronie równości (4.5). W miejsce pochodnych wstawmy odpowiadające im – zgodnie z (4.1) – wielkości:

$$(\varphi_1^k)'(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)\varphi_j^k(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Drugi wiersz tego wyznacznika pomóżmy przez $-a_{12}$, trzeci przez $-a_{13}$, ostatni przez $-a_{1n}$, a uzyskane wyrażenia dodajmy do wiersza pierwszego. Jako rezultat tej operacji otrzymamy w pierwszym wierszu pierwszy wiersz wyznacznika (4.4) pomnożony przez $a_{11}(t)$. Zatem uzyskany wyznacznik jest równy $a_{11}(t)W(t)$. Podobne operacje możemy wykonać na drugim składniku sumy (4.5), uzyskując jako wynik $a_{22}(t)W(t)$. Po przekształceniu wszystkich składników sumy po prawej stronie wzoru (4.5) otrzymamy równość

$$W'(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)W(t) = (\text{Tr} A(t))W(t).$$

Całkując ostatnią równość w przedziale $[t_0, t)$, otrzymamy tezę twierdzenia.

Wyrażenie $\text{Tr} A(t)$ nazywa się śladem macierzy $A(t)$,

Twierdzenie 4.2. Niech $\varphi^1, \dots, \varphi^n : I \rightarrow R^n$ ($\varphi^k = (\varphi_1^k, \dots, \varphi_n^k)$, $k = 1, \dots, n$) będą liniowo niezależnymi całkami równania (4.2). Niech $X(t)$ będzie odpowiadającą im macierzą fundamentalną. Wówczas całka ogólna tego równania ma postać

$$x = X(t)C, \quad (4.6)$$

gdzie $C = (C_1, \dots, C_n)^T$ jest jednokolumnową macierzą stałych.

Dowód. Niech $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ będzie dowolną całką równania (4.2). Należy pokazać, że można dobrać stałe $C_1, \dots, C_n$ tak, aby

$$\varphi = C_1\varphi^1 + \dots + C_n\varphi^n.$$

Rozważmy jednorodny układ równań liniowych o stałych współczynnikach

Przyjmując $A = (a_{ij})$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$, $t \in \mathbb{R}$, układ (4.7) możemy zapisać w postaci macierzowej

Rozwiązania równania (4.8) szukamy w postaci

gdzie λ jest szukanym skalar, a $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ szukanym wektorem, zapisanym w postaci macierzy jednokolumnowej.

Oczywiście

Podstawiając ostatnie wyrażenie do wzoru (4.8), otrzymamy

Po podzieleniu przez czynnik $e^{\lambda t}$

lub w postaci równoważnej

Wartość λ , dla której równanie (4.10) ma rozwiązanie niezerowe, nazywamy *wartością własną*, a odpowiadające mu rozwiązanie $w = (w_1, \dots, w_n)$ *wektorem własnym*. Z teorii równań liniowych wiadomo, że układ (4.10) ma względem w rozwiązanie niezerowe tylko wówczas, gdy

Równanie (4.11) nazywamy *równaniem charakterystycznym* układu równań (4.7). Jest to równanie algebraiczne n -tego stopnia, które – zgodnie z podstawowym twierdzeniem algebry – ma dokładnie n pierwiastków, przy czym mogą to być również pierwiastki wielokrotne oraz zespolone. Przypomnijmy też, że jeśli liczba λ_k jest pierwiastkiem zespolonym równania (4.11), to również liczba sprzężona $\bar{\lambda}_k$ jest pierwiastkiem tego równania.

Niech λ_k będzie pierwiastkiem równania (4.11). Rozwiązując układ równań

$$(A - \lambda_k I)w = 0,$$

znajdziemy wektor własny $w^k = (w_1^k, \dots, w_n^k)$ macierzy A , odpowiadający wartości własnej λ_k .

Zauważmy, że zgodnie z (4.9) mamy

$$(e^{\lambda_k t} w^k)' = \lambda_k e^{\lambda_k t} w^k = e^{\lambda_k t} A w^k = A(e^{\lambda_k t} w^k),$$

co oznacza, że funkcja $x^k = e^{\lambda_k t} w^k$ jest rozwiązaniem układu równań (4.7).

Jeśli liczby $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są pierwiastkami jednokrotnymi rzeczywistymi, to odpowiadające im wektory własne $w^1, \dots, w^n$ są rzeczywiste, a rozwiązania

$$x^1 = e^{\lambda_1 t} w^1, \dots, \quad x^n = e^{\lambda_n t} w^n$$

są liniowo niezależne. Tworzą one zatem macierz fundamentalną układu (4.7), a cała ogólna układu równań (4.7) wyraża się wzorem (4.6).

Założmy teraz, że wartość własna λ_k jest liczbą zespoloną, czyli $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$. Odpowiadający jej wektor własny w^k ma również postać zespoloną $w^k = u^k + iv^k$, gdzie u^k i v^k są wektorami o współrzędnych rzeczywistych. Rozwiązanie w przestrzeni zespolonej ma postać

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\lambda_k t} w^k = e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} (u^k + iv^k) = e^{\alpha_k t} (\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t) (u^k + iv^k) \\ &= e^{\alpha_k t} (u^k \cos \beta_k t - v^k \sin \beta_k t) + i e^{\alpha_k t} (v^k \cos \beta_k t + u^k \sin \beta_k t). \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że część rzeczywista i część urojona, czyli

$$x^k = \operatorname{Re} (e^{\lambda_k t} w^k) = e^{\alpha_k t} (u^k \cos \beta_k t - v^k \sin \beta_k t),$$

$$y^k = \operatorname{Im} (e^{\lambda_k t} w^k) = e^{\alpha_k t} (v^k \cos \beta_k t + u^k \sin \beta_k t),$$

są rozwiązaniami układu (4.7). Zauważmy ponadto, że rozwiązania te są liniowo niezależne.

Zatem w przypadku gdy równanie charakterystyczne (4.11) ma jednokrotne własności własne (rzeczywiste lub zespolone), stosunkowo łatwo potrafimy wyznaczyć macierz fundamentalną. W przypadku gdy występują pierwiastki wielokrotne, wyznaczenie macierzy fundamentalnej jest bardziej złożone. W literaturze można znaleźć szereg algorytmów wskazujących sposób wyznaczania macierzy fundamentalnej w każdym z omawianych przypadków. Jeden z takich algorytmów (algorytm Putzera) podaje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.3. *Niech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy A (dopuszczamy wartości wielokrotne). Wówczas macierz fundamentalna równania (4.8) ma postać*

$$X(t) = \sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(t) P_j, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.12)$$

gdzie

$$P_j = \prod_{k=1}^j (A - \lambda_k I) \quad \text{dla } j = 1, \dots, n-1, \quad P_0 = I,$$

a funkcje $u_1, \dots, u_n$ dane są wzorami rekurencyjnymi:

$$u'_1(t) = \lambda_1 u_1(t), \quad u_1(0) = 1, \quad (4.13)$$

$$u'_j(t) = \lambda_j u_j(t) + u_{j-1}(t), \quad u_j(0) = 0, \quad \text{dla } j = 2, \dots, n. \quad (4.14)$$

Dowód. Wystarczy pokazać, że

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = I,$$

gdzie macierz $X(t)$ dana jest wzorem (4.12). Istotnie, pierwsza z tych relacji pokazuje, że kolumny macierzy $X(t)$ są całkami równania (4.8), a relacja druga, że $X(t)$ jest macierzą fundamentalną.

Zauważmy wpierw, że

$$P_{j+1} = (A - \lambda_{j+1}I)P_j, \quad j = 0, \dots, n-2.$$

Ponadto, przyjmując $u_0(t) \equiv 0$, równania występujące we wzorach (4.13) i (4.14) możemy zapisać za pomocą jednej formuły

$$u'_j(t) = \lambda_j u_j(t) + u_{j-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Korzystając z ostatnich wzorów, mamy

$$\begin{aligned} X'(t) - \lambda_n X(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} u_{j+1}(t) + u_j(t)) P_j - \lambda_n \sum_{j=0}^{n-1} u_{j+1}(t) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) u_{j+1}(t) P_j + \sum_{j=1}^{n-1} u_j(t) P_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) u_{j+1}(t) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} u_{j+1}(t) P_{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} (\lambda_{j+1} - \lambda_n) u_{j+1}(t) P_j + \sum_{j=0}^{n-2} u_{j+1}(t) (A - \lambda_{j+1}I) P_j \\ &= (A - \lambda_n I) \sum_{j=0}^{n-2} u_{j+1}(t) P_j = (A - \lambda_n I) (X(t) - u_n(t) P_{n-1}) \\ &= AX(t) - \lambda_n X(t) - u_n(t) (A - \lambda_n I) P_{n-1} = AX(t) - \lambda_n X(t), \end{aligned}$$

bowiem na mocy twierdzenia Caley–Hamiltona (zob. podrozdz. 4.5)

$$(A - \lambda_n I) P_{n-1} = \prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I) = p(A) = 0,$$

gdzie

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k).$$

W konsekwencji $X'(t) = AX(t)$, co należało pokazać. Z warunków początkowych nałożonych na funkcje u_j , $j = 1, \dots, n$, wynika natychmiast, że $X(t_0) = P_0 = I$, co kończy dowód.

Przykład 4.1. Rozważmy równanie

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x.$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 4$.

Dla $\lambda_1 = 1$ układ równań (4.10) ma postać

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Równania te zachodzą, gdy $w_1 - w_2 = 0$. Możemy zatem przyjąć $w = (1, 1)^T$. Odpowiadające rozwiązanie ma więc postać

$$x^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Dla $\lambda_2 = 4$ układ równań (4.10) ma postać

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd $w_1 + 2w_2 = 0$. Przyjmując $w = (-2, 1)^T$, mamy

$$x^2 = e^{4t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x = \begin{pmatrix} e^t & -2e^{4t} \\ e^t & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

lub

$$x_1 = C_1 e^t - 2C_2 e^{4t}, \quad x_2 = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Przykład 4.2. Rozważmy równanie

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Wartościami własnymi macierzy współczynników są liczby $\lambda_1 = 1 - 2i$ oraz $\lambda_2 = 1 + 2i$. Dla $\lambda_1 = 1 - 2i$ układ równań (4.10) ma postać

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 \\ -2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a po wymnożeniu

$$2(u_2 - v_1) + 2(u_1 + v_2)i = 0,$$

$$-2(u_1 + v_2) + 2(u_2 - v_1)i = 0.$$

Równanie to jest spełnione, jeśli $u_2 - v_1 = 0$, $u_1 + v_2 = 0$. Przyjmując $u_1 = 1$, $v_1 = 1$, otrzymamy $u_2 = 1$, $v_2 = -1$. Zatem wektor własny $w = (1 + i, 1 - i)$. W dziedzinie zespolonej rozwiązaniem naszego równania jest funkcja

$$z(t) = e^t (\cos 2t - i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t + (\cos 2t - \sin 2t)i \\ \cos 2t - \sin 2t + (\cos 2t + \sin 2t)i \end{pmatrix}.$$

Ponieważ część rzeczywista i część urojona jest również rozwiązaniem, otrzymamy dwie całki liniowo niezależne

$$x^1 = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}, \quad x^2 = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ -\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Całka ogólna w przestrzeni rzeczywistej ma postać

$$x = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Przykład 4.3. Rozważmy równanie

$$x' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} x.$$

Założmy, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Zgodnie z twierdzeniem 4.3 macierz fundamentalna rozważanego układu ma postać

$$X(t) = u_1(t)I + u_2(t)(A - \lambda I),$$

gdzie funkcje u_1 i u_2 są rozwiązaniami problemów:

$$u_1'(t) = \lambda u_1(t), \quad u_1(0) = 1,$$

$$u_2'(t) = \lambda u_2(t) + u_1(t), \quad u_2(0) = 0.$$

Rozwiązując ostatnie równania, otrzymamy:

$$u_1(t) = e^{\lambda t}, \quad u_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Zatem szukana macierz fundamentalna ma postać

$$X(t) = u_1(t)I + u_2(t)(A - \lambda I) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 + (a_{11} - \lambda)t & a_{12}t \\ a_{21}t & 1 + (a_{22} - \lambda)t \end{pmatrix}.$$

4.3. Niejednorodny układ równań liniowych

Rozważmy równanie

$$x' = A(t)x + f(t), \quad (4.15)$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))^T$.

Rozważmy wprawdzie równanie jednorodne

$$x' = A(t)x, \quad (4.16)$$

skojarzone z równaniem (4.15). Niech $X(t) = (\varphi_i^k)$ będzie macierzą fundamentalną równania jednorodnego (4.16). Zgodnie z twierdzeniem 4.2 całka ogólna równania (4.16) ma postać

$$x = X(t)C,$$

gdzie $C = (C_1, \dots, C_n)^T$ jest jednokolumnową macierzą stałych.

Powstaje pytanie, czy można macierz C zastąpić macierzą funkcji

$$C(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))^T$$

tak dobraną, aby funkcja

$$x = X(t)C(t) \quad (4.17)$$

była całką ogólną równania (4.15). Zauważmy (zob. wzór (4.22) następnego podrozdziału), że

$$x'(t) = X'(t)C(t) + X(t)C'(t). \quad (4.18)$$

Przypuśćmy, że taka funkcja $C(t)$ istnieje. Obliczmy iloczyn macierzy $A(t)X(t)$. Oczywiście będzie to macierz wymiaru $n \times n$. Element leżący w i -tym wierszu i k -tej kolumnie, na mocy (4.3), (4.21) oraz faktu, że φ^k jest rozwiązaniem równania (4.16), wyraża się wzorem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_j^k(t) = (\varphi_i^k)'(t).$$

Zatem

$$A(t)X(t) = X'(t). \quad (4.19)$$

Podstawiając funkcje (4.17) do równania (4.15), po uwzględnieniu związków (4.18) i (4.19), otrzymamy

$$A(t)X(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + f(t),$$

a po redukcji

$$X(t)C'(t) = f(t). \quad (4.20)$$

Stąd

$$C'(t) = X^{-1}(t)f(t),$$

gdzie $X^{-1}(t)$ oznacza macierz odwrotną do $X(t)$. Po scałkowaniu ostatniej równości w przedziale $[t_0, t]$ otrzymamy

$$C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Podstawiając uzyskaną wielkość $C(t)$ do (4.17), otrzymamy szukany wzór na całkę ogólną równania (4.15)

$$x(t) = X(t)C(t_0) + \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Przykład 4.4. Rozważmy równanie

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Skojarzone z nim równanie jednorodne ma postać

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x,$$

a jego równanie charakterystyczne

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda) = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są liczby $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$.

Układ równań (4.10) odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = 1$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wynika stąd, że $w_2 = 0$, a w_1 jest dowolne. Możemy więc przyjąć $w = (1, 0)^T$. Odpowiadające rozwiązanie ma postać

$$x^1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Układ równań (4.10) odpowiadający wartości własnej $\lambda_2 = 2$ ma postać

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd jako w możemy przyjąć wektor $(1, -1)$. Rozwiązanie x^2 odpowiadające wartości własnej λ_2 ma postać

$$x^2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Macierz fundamentalna układu jednorodnego

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Aby wyznaczyć macierz $C(t)$, należy rozwiązać – zgodnie ze wzorem (4.20) – układ

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1(t) \\ C'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ e^t \end{pmatrix},$$

czyli

$$e^t C'_1(t) + e^{2t} C'_2(t) = t, \quad -e^{2t} C'_2(t) = e^t.$$

Stąd

$$C'_1(t) = te^{-t} + 1, \quad C'_2(t) = -e^{-t}.$$

W konsekwencji

$$C_1(t) = -te^{-t} - e^{-t} + t + K_1, \quad C_2(t) = e^{-t} + K_2.$$

Rozwiązanie ogólne równania wyjściowego ma więc postać

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} e^t & e^{2t} \\ 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -te^{-t} - e^{-t} + t + K_1 \\ e^{-t} + K_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (t+1+K_1)e^t + K_2e^{2t} - t - 1 \\ -e^t - K_2e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.4. Zamiana układu równań na równanie wyższego rzędu

Układ n równań liniowych o stałych współczynnikach nietrudno sprowadzić do liniowego równania n -tego rzędu. Zobaczmy to na przykładach.

Przykład 4.5. Rozważmy układ równań z przykładu 4.1

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y, \\ y' &= -x + 2y. \end{aligned}$$

Z równania drugiego możemy wyznaczyć x . Podstawiając uzyskane wyrażenie do równania pierwszego, otrzymamy po redukcji

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że całka ogólna tego równania ma postać

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{4t}.$$

Z równości $x = -y' + 2y$ otrzymamy

$$x = C_1 e^t - 2C_2 e^{4t}.$$

Uzyskaliśmy analogiczną postać rozwiązania jak w przykładzie 4.1.

Przykład 4.6. Rozważmy układ równań z przykładu 4.4

$$\begin{aligned} x' &= x - y + t, \\ y' &= 2y + e^t. \end{aligned}$$

Podstawiając y wyliczone z pierwszego równania do równania drugiego, otrzymamy

$$x'' - 3x' + 2x = 1 - 2t - e^t.$$

Całka ogólna skojarzonego równania jednorodnego ma postać

$$x = Ae^t + Be^{2t}.$$

Aby wyznaczyć rozwiązanie równania wyjściowego, zastosujemy metodę uzmiennienia stałych. Stosowny układ równań ma postać

$$\begin{aligned} A'e^t + B'e^{2t} &= 0, \\ A'e^t + 2B'e^{2t} &= 1 - 2t - e^t. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} A' &= -e^{-t} + 2te^{-t} + 1, \\ B' &= e^{-2t} - 2te^{-t} - e^{-t}, \end{aligned}$$

a po scałkowaniu

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + t + C_1, \\ B(t) &= te^{-2t} + e^{-t} + C_2. \end{aligned}$$

Podstawiając uzyskane funkcje do wzoru na funkcję x , otrzymamy

$$x = (t + 1 + C_1)e^t + C_2 e^{2t} - t - 1.$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do równości $y = x - x' + t$, otrzymamy

$$y = -e^t - C_2 e^{2t}.$$

Zauważmy, że aby znaleźć rozwiązanie rozważanego układu, wystarczy wpierv rozwiązać bezpośrednio drugie równanie, a uzyskane wyrażenie na y podstawić do równania pierwszego, skąd z kolei można wyznaczyć x .

Przykład 4.7. Rozważmy układ równań

$$x' = x - 2y + e^t, \quad y' = x + 4y.$$

Zauważmy, że układ ten możemy rozwiązać, przekształcając go na równanie drugiego rzędu. W tym celu podstawiając uzyskaną z drugiego równania równość $x = y' - 4y$ do pierwszego równania otrzymamy

$$y'' - 5y' + 6y = e^t.$$

Całką ogólną tego równania jest wyrażenie

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^t,$$

a rozwiązaniem układu wyjściowego układ funkcji

$$x = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - \frac{3}{2} e^t, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2} e^t.$$

4.5. Wiadomości pomocnicze z teorii macierzy i wyznaczników

Macierzą $m \times n$ wymiarową nazywamy tablicę

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Krótko macierz oznaczamy symbolicznie $A = (a_{ij})$, gdzie i oznacza numer wiersza, a j numer kolumny. Jeśli $m = n$, macierz nazywamy kwadratową. Jeśli wyrazy a_{ij} są liczbami rzeczywistymi, macierz $m \times n$ - wymiarowa definiuje odwzorowanie liniowe przestrzeni R^n w przestrzeń R^m . Odwzorowanie to określone jest wzorem $R^n \ni x \rightarrow Ax \in R^m$. Co więcej, istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między zbiorem macierzy $m \times n$ wymiarowych o wyrazach rzeczywistych a przestrzenią odwzorowań liniowych $L(R^n, R^m)$.

Macierz powstała z macierzy A przez zamianę wierszy na kolumny nazywamy macierzą *transponowaną* i oznaczamy symbolem A^T . Jeśli $A = (a_{ij})$, to $A^T = (a_{ji})$. W szczególności, jeśli A jest macierzą jednowierszową, to A^T jest macierzą jednokolumnową. Jeśli A jest macierzą kwadratową i $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$, macierz nazywamy *diagonalną*. Jeśli ponadto $a_{ii} = 1$ dla $i = 1, \dots, n$, macierz nazywamy *jednostkową*.

Sumą macierzy $A = (a_{ij})$ oraz $B = (b_{ij})$ tego samego wymiaru $m \times n$, nazywamy macierz $C = (c_{ij})$ wymiaru $m \times n$, gdzie $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, tzn. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Jeśli α jest stałą, $A = (a_{ij})$ macierzą, to symbolem αA oznaczamy macierz (αa_{ij}) .

Jeśli $A = (a_{ij})$ jest macierzą $m \times n$ wymiarową, a $B = (b_{ij})$ macierzą $n \times l$ wymiarową, to iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = (c_{ij})$ o wymiarze $m \times l$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (4.21)$$

Śladem macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})$ nazywamy sumę elementów leżących na przekątnej macierzy, czyli wielkość

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Jeśli elementy macierzy $A(t) = (a_{ij}(t))$ są funkcjami różniczkowalnymi w przedziale I , to symbolem $A'(t)$ oznaczamy macierz

$$A'(t) = (a'_{ij}(t)),$$

to znaczy macierz, której elementami są pochodne elementów macierzy A .

Jeśli $A(t)$ jest macierzą $m \times n$ wymiarową, a $B(t)$ macierzą $n \times l$ wymiarową, przy czym elementy obu macierzy są funkcjami różniczkowalnymi w przedziale I , to

$$(A(t) B(t))' = A'(t) B(t) + A(t) B'(t). \quad (4.22)$$

Istotnie, różniczkując (4.21), mamy

$$\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(t) b_{kj}(t) \right)' = \sum_{k=1}^n a'_{ik}(t) b_{kj}(t) + \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) b'_{kj}(t),$$

skąd wzór (4.22) wynika natychmiast.

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})$ nazywamy liczbę

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{k_{j_1} \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

gdzie suma rozciąga się po wszystkich permutacjach $j_1, \dots, j_n$ ciągu $1, \dots, n$, a $k_{j_1 \dots j_n}$ oznacza liczbę inwersji w permutacji $j_1, \dots, j_n$ (liczby leżące w ciągu tworzą inwersje, jeśli liczba większa poprzedza liczbę mniejszą).

Zauważmy, że wyznacznik, w którym dwa wiersze lub kolumny są identyczne, jest równy zeru. Jeśli w wierszu lub kolumnie powtarza się ten sam czynnik, to możemy go wyciągnąć przed wyznacznik. Wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie, jeśli do wiersza (lub kolumny) dodamy inny wiersz (lub kolumnę), pomnożony przez dowolną liczbę.

Niech $A(t) = (a_{ij}(t))$ będzie macierzą, której elementami są funkcje różniczkowalne. Wówczas

$$\begin{aligned} (\det A(t))' &= \left(\sum (-1)^{k_{j_1 \dots j_n}} a_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \cdots a_{nj_n}(t) \right)' \\ &= \sum (-1)^{k_{j_1 \dots j_n}} a'_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \cdots a_{nj_n}(t) + \dots \\ &\quad + \sum (-1)^{k_{j_1 \dots j_n}} a_{1j_1}(t) a_{2j_2}(t) \cdots a'_{nj_n}(t) \\ &= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Twierdzenie Caley–Hamiltona. Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarze $n \times n$. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy A , czyli pierwiastkami równania $\det(A - \lambda I) = 0$. Niech $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Wówczas $p(A) = 0$.

4.6. Zadania

1. Znaleźć rozwiązanie problemu:

- a) $x' = 5x - 2y + t, \quad y' = 4x - y + e^t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0;$
- b) $x' = 2x - 3y + te^t, \quad y' = x - 2y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1;$
- c) $x' = 8x - 8y + 2, \quad y' = x + 4y - t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1;$
- d) $x' = x - y + z, \quad y' = x + y - z, \quad z' = 2x - y, \quad x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = 0.$

2. Znaleźć całkę ogólną równania $u' = Au$ jeśli macierz A ma postać:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Znaleźć rozwiązanie problemu $u' = Au, u(0) = u_0$ jeśli macierz A oraz wektor u_0 mają postać:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Znaleźć rozwiązanie problemu

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. Znaleźć całkę ogólną równania $u' = Au + f(t)$, jeśli macierz A oraz wektor f mają następującą postać:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ -2-4t \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+4t \\ 3t^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

7. Znaleźć rozwiązanie problemu:

$$\text{a) } x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozdział 5

Zależność rozwiązań od warunków początkowych, nierówności różniczkowe, twierdzenia porównawcze

5.1. Zależność rozwiązań od warunków początkowych oraz prawych stron równania

Lemat 5.1 (Gronwall). *Niech $u, v : [\alpha, \beta) \rightarrow [0, +\infty)$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że*

$$v(t) \leq c + \int_{\alpha}^t u(s)v(s)ds \quad \text{dla } t \in [\alpha, \beta), \quad (5.1)$$

gdzie $c \geq 0$.

Wówczas

$$v(t) \leq ce^{\int_{\alpha}^t u(s)ds} \quad \text{dla } t \in [\alpha, \beta). \quad (5.2)$$

W szczególności, jeśli $c = 0$, to $v(t) \equiv 0$.

Dowód. Załóżmy wpraw, że $c > 0$. Połóżmy

$$w(t) = c + \int_{\alpha}^t u(s)v(s)ds.$$

Po zróżniczkowaniu ostatniej równości i wykorzystaniu założeń lematu otrzymamy

$$w'(t) = u(t)v(t) \leq u(t)w(t).$$

Ponieważ $w(t) \geq c > 0$ dla $t \in [\alpha, \beta)$, ostatnią nierówność możemy zapisać w postaci

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \leq u(t).$$

Całkując teraz w przedziale $[\alpha, t]$, otrzymamy

$$\ln w(t) - \ln w(\alpha) \leq \int_{\alpha}^t u(s)ds.$$

Stąd

$$w(t) \leq w(\alpha)e^{\int_{\alpha}^t u(s)ds},$$

a uwzględniając przyjęte założenia, otrzymamy

$$v(t) \leq w(\alpha)e^{\int_{\alpha}^t u(s)ds}.$$

Ponieważ $w(\alpha) = c$, uzyskaliśmy żadaną nierówność, dla $c > 0$.

Rozpatrzmy teraz przypadek $c = 0$. Jeśli całka $\int_{\alpha}^{\beta} u(s)ds$ jest skończona, przechodząc z c do zera w nierówności (5.2), otrzymamy $v = 0$. Przypuśćmy teraz, że całka z funkcji u w przedziale $[\alpha, \beta)$ jest nieskończona. Ponieważ dla dowolnego $\alpha < T < \beta$ całka z funkcji u w przedziale $[\alpha, T]$ jest skończona, na mocy poprzednich uwag funkcja $v(t) = 0$ dla $t \in [\alpha, T]$. Ponieważ $T \in [\alpha, \beta)$ było dowolne, wynika stąd, że $v = 0$ w przedziale $[\alpha, \beta)$. Zatem nierówność (5.2) zachodzi również dla $c = 0$, co kończy dowód.

Wniosek 5.1. *Jeśli $v : [\alpha, \beta) \rightarrow [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą i ponadto*

$$v(t) \leq c + K \int_{\alpha}^t v(s)ds \quad \text{dla } t \in [\alpha, \beta),$$

gdzie $c \geq 0$, $K > 0$, to

$$v(t) \leq ce^{K(t-\alpha)}.$$

Inna wersja twierdzenia typu Gronwalla została sformułowana w zadaniu 11.

Wniosek 5.2. *Jeśli funkcja $f(t, x)$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej x , to problem początkowy $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie.*

Istotnie, przypuśćmy, że problem początkowy ma rozwiązania x_1 oraz x_2 określone w przedziale I . Oczywiście dla $t \in I$

$$x_i(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_i(s))ds, \quad i = 1, 2.$$

Po odjęciu stronami, uwzględniając warunek Lipschitza, dostajemy

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)))ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)|ds \right|,$$

skąd na podstawie wniosku 5.1 (ze stałą $c = 0$) mamy $|x_1(t) - x_2(t)| = 0$ dla $t \in I$.

Twierdzenie 5.1. *Niech $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^2$, będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że g spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej ze stałą L . Niech $(t_0, x_0), (t_1, y_1) \in U$. Załóżmy ponadto, że*

$$|x_0 - y_1| \leq \delta_1, \quad \left| \int_{t_1}^{t_0} g(s, y(s))ds \right| < \delta_2 \quad \text{oraz} \quad \sup_{(t,x) \in U} |f(t, x) - g(t, x)| \leq \delta_3.$$

Jeśli $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($t_1 \in I$, $I = (t_0 - h, t_0 + h)$, $h > 0$) są odpowiednio rozwiązaniami problemu

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5.3}$$

oraz

$$y' = g(t, y), \quad y(t_1) = y_1, \tag{5.4}$$

to

$$|y(t) - x(t)| \leq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 h)e^{L|t-t_0|} \quad \text{dla } t \in I.$$

Dowód. Zgodnie z uwagą 1.1 (zob. wzór (1.7))

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \text{dla } t \in I$$

oraz

$$y(t) = y_1 + \int_{t_1}^t g(s, y(s)) ds \quad \text{dla } t \in I.$$

Założmy, że $t \in [t_0, t_0 + h]$ (dla $t \in (t_0 - h, t_0]$ dowód jest analogiczny). Korzystając z ostatnich równości, mamy

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq |y_1 - x_0| + \left| \int_{t_1}^{t_0} g(s, y(s)) ds \right| + \left| \int_{t_0}^t [g(s, y(s)) - f(s, x(s))] ds \right| \\ &\leq \delta_1 + \delta_2 + \int_{t_0}^t |g(s, x(s)) - f(s, x(s))| ds + \int_{t_0}^t |g(s, y(s)) - g(s, x(s))| ds \\ &\leq \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 h + L \int_{t_0}^t |y(s) - x(s)| ds. \end{aligned}$$

Na mocy nierówności Gronwalla (zob. wniosek 5.1)

$$|y(t) - x(t)| \leq (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 h) e^{L(t-t_0)} \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + h],$$

co kończy dowód.

Z twierdzenia 5.1 wynika, że rozwiązanie problemu początkowego zależy w sposób ciągły od warunków początkowych oraz prawej strony równania. Istotnie, dla danego $\varepsilon > 0$ możemy dobrać δ_1 , δ_2 oraz δ_3 tak, aby $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$ dla $t \in I$, gdzie x i y są odpowiednio rozwiązaniami problemu (5.3) i (5.4).

Przykład 5.1. W zbiorze $P = \{(t, x) : |t| \leq 1/2, |x - 1| \leq 1/2\}$ rozważmy problemy

$$x' = \sin tx, \quad x(0) = 1$$

oraz

$$y' = ty, \quad y(0) = 1, 1.$$

Na mocy twierdzenia 1.1 oba powyższe problemy posiadają w zbiorze $[-1/2, 1/2] \times [1/2, 3/2]$ rozwiązania określone jednoznacznie (sprawdzić!). Oznaczmy je odpowiednio przez x oraz y . Ponieważ

$$\sin tx = tx + \frac{(tx)^3}{6} + o(tx),$$

w zbiorze $[-1/2, 1/2] \times [1/2, 3/2]$ mamy oszacowanie

$$|\sin tx - tx| \leq \left| \frac{(tx)^3}{6} + o(tx) \right| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{3}{2} \right)^3 + o(tx) \leq \frac{9}{128} + 0,007 = 0,0773.$$

Na mocy twierdzenia 5.1 różnicę między rozwiązaniami x i y w przedziale $[-1/2, 1/2]$ możemy oszacować następująco

$$|x(t) - y(t)| \leq \left(0,1 + \frac{0,0773}{2} \right) e^{1/4} < 0,177 \quad \text{dla } t \in [-1/2, 1/2].$$

Uwaga 5.1. Twierdzenie 5.1 możemy sformułować dla równania wektorowego. Dowód przebiega analogicznie, przy czym wartość bezwzględną należy zastąpić normą przestrzeni R^n .

5.2. Nierówności różniczkowe

Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) będzie funkcją ciągłą. Funkcje $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = (a, b)$, nazywamy rozwiązaniem nierówności różniczkowej

$$x' < f(t, x) \quad (5.5)$$

w przedziale I , jeśli φ jest różniczkowalna w przedziale I , $(t, \varphi(t)) \in U$ dla $t \in I$ i ponadto

$$\varphi'(t) < f(t, \varphi(t)) \quad \text{dla } t \in I. \quad (5.6)$$

Funkcję $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy rozwiązaniem nierówności różniczkowej

$$x' > f(t, x) \quad (5.7)$$

w przedziale I , jeśli ψ jest różniczkowalna w przedziale I , $(t, \psi(t)) \in U$ dla $t \in I$ i ponadto

$$\psi'(t) > f(t, \psi(t)) \quad \text{dla } t \in I. \quad (5.8)$$

Nierówności silne: $<$, $>$ mogą być zastąpione przez nierówności słabe: $\leq$, $\geq$.

Twierdzenie 5.2. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) będzie funkcją ciągłą. Niech $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $J = (t_0 - h, t_0 + h)$, będzie rozwiązaniem nierówności (5.5), a funkcja $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ rozwiązaniem nierówności (5.7).

(i) Jeśli $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + h). \quad (5.9)$$

(ii) Jeśli $\varphi(t_0) > \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) > \psi(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0]. \quad (5.10)$$

(iii) Jeśli $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) < \psi(t) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h) \quad \text{oraz} \quad \varphi(t) > \psi(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0). \quad (5.11)$$

Dowód. Ad (i) Przypuśćmy, że warunek (5.9) nie zachodzi. Wówczas zbiór

$$\Delta = \{t \in [t_0, t_0 + h) : \varphi(t) \geq \psi(t)\}$$

jest niepusty. Oznaczmy przez t^* kres dolny zbioru Δ , czyli $t^* = \inf \Delta$. Oczywiście $t^* > t_0$, $\varphi(t) < \psi(t)$ dla $t \in [t_0, t^*)$ oraz $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Zatem

$$\varphi'(t^* - 0) = \lim_{t \rightarrow t^*, t < t^*} \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*} \geq \lim_{t \rightarrow t^*, t < t^*} \frac{\psi(t) - \psi(t^*)}{t - t^*} = \psi'(t^* - 0).$$

Stąd i z faktu, że $\varphi'(t^* - 0) = \varphi'(t^*)$, $\psi(t^* - 0) = \psi(t^*)$ oraz nierówności (5.8) i (5.6) otrzymamy

$$f(t^*, \psi(t^*)) < \psi'(t^* - 0) \leq \varphi'(t^* - 0) < f(t^*, \varphi(t^*)),$$

co przeczy równości $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Zatem zbiór Δ jest pusty, a to oznacza, że warunek (5.9) jest spełniony.

Ad (ii) Przypuśćmy teraz, że warunek (5.10) nie zachodzi. Wówczas zbiór

$$\Delta = \{t \in (t_0 - h, t_0] : \varphi(t) \leq \psi(t)\}$$

jest niepusty. Oznaczmy przez t^* kres górny zbioru Δ , czyli $t^* = \sup \Delta$. Oczywiście $t^* < t_0$, $\varphi(t) > \psi(t)$ dla $t \in (t^*, t_0]$ oraz $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Zatem

$$\varphi'(t^* + 0) = \lim_{t \rightarrow t^*, t > t^*} \frac{\varphi(t) - \varphi(t^*)}{t - t^*} \geq \lim_{t \rightarrow t^*, t > t^*} \frac{\psi(t) - \psi(t^*)}{t - t^*} = \psi'(t^* + 0).$$

Stąd oraz z nierówności (5.8) i (5.6) otrzymamy

$$f(t^*, \psi(t^*)) < \psi'(t^* + 0) \leq \varphi'(t^* + 0) < f(t^*, \varphi(t^*)),$$

co ponownie przeczy równości $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$. Zatem zbiór Δ jest pusty, a to oznacza, że warunek (5.10) jest również spełniony.

Ad (iii) Połóżmy $u(t) = \psi(t) - \varphi(t)$. Oczywiście $u(t_0) = 0$ oraz

$$u'(t_0) = \psi'(t_0) - \varphi'(t_0) > f(t_0, \psi(t_0)) - f(t_0, \varphi(t_0)) = 0.$$

Wnioskujemy stąd, że $u(t) > 0$ w pewnym prawostronnym otoczeniu oraz $u(t) < 0$ w pewnym otoczeniu lewostronnym punktu t_0 . Rozważmy wpierw przypadek $t \in [t_0, t_0 + h)$. Połóżmy

$$\Delta = \{t \in [t_0, t_0 + h) : u(s) > 0 \text{ dla } s \in [t_0, t]\}.$$

Na mocy poprzedniej obserwacji $\Delta \neq \emptyset$. Oznaczmy przez t^* kres górny zbioru Δ . Jeśli $t^* = t_0 + h$ dowód jest zakończony. Przypuśćmy, że $t^* < t_0 + h$. Oczywiście $\varphi(t^*) = \psi(t^*)$, a rozumowanie analogiczne jak dla t_0 pokazuje, że $u'(t^*) > 0$. Wynika stąd, że istnieje $\delta > 0$ takie, że $u(t) < 0$ dla $t \in (t^* - \delta, t^*)$, co przeczy definicji liczby t^* .

Rozważmy teraz przypadek $t \in (t_0 - h, t_0]$. Połóżmy

$$\Delta = \{t \in (t_0 - h, t_0] : u(s) < 0 \text{ dla } s \in (t, t_0]\}.$$

Oczywiście $\Delta \neq \emptyset$. Oznaczmy przez t_* kres dolny zbioru Δ . Jeśli $t_* = t_0 - h$ dowód jest zakończony. Przypuśćmy, że $t_* > t_0 - h$. Oczywiście $\varphi(t_*) = \psi(t_*)$ oraz $u'(t_*) > 0$. Wynika stąd, że istnieje $\delta > 0$ takie, że $u(t) > 0$ dla $t \in (t_*, t_* + \delta)$, co przeczy definicji liczby t_* . Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Uwaga 5.2. Teza twierdzenia 5.2 pozostanie prawdziwa, jeśli jedną z nierówności (5.5) lub (5.6) zastąpimy nierównością słabą, czyli zażądamy, aby funkcje φ i ψ spełniały nierówności

$$\varphi'(t) < f(t, \varphi(t)), \quad \psi'(t) \geq f(t, \psi(t)) \quad \text{dla } t \in I,$$

lub

$$\varphi'(t) \leq f(t, \varphi(t)), \quad \psi'(t) > f(t, \psi(t)) \quad \text{dla } t \in I.$$

Ponadto w powyższych definicjach i stwierdzeniach przedziały otwarte I i J możemy zatępić przedziałami domkniętymi.

Rozważmy problem Cauchy'ego

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (5.12)$$

gdzie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) jest funkcją ciągłą, $(t_0, x_0) \in U$.

Twierdzenie 5.3. Niech x będzie rozwiązaniem problemu (5.12) w przedziale $J = (t_0 - h, t_0 + h)$ ($h > 0$), φ rozwiązaniem nierówności różniczkowej (5.5), a ψ rozwiązaniem nierówności różniczkowej (5.7) w przedziale J .

(i) Jeśli $\varphi(t_0) \leq x_0 \leq \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) < x(t) < \psi(t) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h).$$

(ii) Jeśli $\varphi(t_0) \geq x_0 \geq \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) > x(t) > \psi(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0).$$

Dowód. Teza twierdzenia wynika natychmiast z uwagi 5.2 (wystarczy odpowiednio przyjąć $\varphi(t) = x(t)$ lub $\psi(t) = x(t)$, gdzie x jest rozwiązaniem problemu (5.12)).

Przykład 5.2. Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem problemu

$$x' = x^2 + t^2, \quad x(0) = 1, \quad t \in (-\pi/4, \pi/4).$$

Położmy

$$\varphi(t) = 1 + t^3/3, \quad \psi(t) = \operatorname{tg}(t + \pi/4), \quad t \in (-\pi/4, \pi/4).$$

Oczywiście $\varphi(0) = 1$ oraz $\psi(0) = 1$. Ponadto dla $t \in (-\pi/4, \pi/4)$, $t \neq 0$, mamy:

$$\varphi'(t) = t^2 < (1 + t^3/3)^2 + t^2 = \varphi^2(t) + t^2,$$

$$\psi'(t) = 1/(\cos^2(t + \pi/4)) = \operatorname{tg}^2(t + \pi/4) + 1 > \psi^2(t) + t^2.$$

Stąd oraz z twierdzenia 5.3 otrzymamy

$$1 + t^3/3 < x(t) < \operatorname{tg}(t + \pi/4) \quad \text{dla } t \in (0, \pi/4)$$

oraz

$$1 + t^3/3 > x(t) > \operatorname{tg}(t + \pi/4) \quad \text{dla } t \in (-\pi/4, 0).$$

Twierdzenie 5.4. Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) będzie funkcją ciągłą, taką, że dla dowolnych (t, x) , $(t, y) \in U$, $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$, $y \geq x$, spełniona jest nierówność

$$f(t, y) - f(t, x) \leq L(y - x), \quad (5.13)$$

gdzie $L > 0$. Niech x będzie rozwiązaniem problemu (5.12) w przedziale $(t_0 - h, t_0 + h)$. Załóżmy, że funkcje φ i ψ spełniają nierówności różniczkowe:

$$\varphi'(t) \leq f(t, \varphi(t)), \quad \psi'(t) \geq f(t, \psi(t)), \quad t \in (t_0 - h, t_0 + h). \quad (5.14)$$

(i) Jeśli $\varphi(t_0) \leq x_0 \leq \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) \leq x(t) \leq \psi(t), \quad t \in [t_0, t_0 + h]. \quad (5.15)$$

(ii) Jeśli $\varphi(t_0) \geq x_0 \geq \psi(t_0)$, to

$$\varphi(t) \geq x(t) \geq \psi(t), \quad t \in (t_0 - h, t_0]. \quad (5.16)$$

Dowód. Ad (i) Połóżmy

$$y(t) = \varphi(t) - \varepsilon e^{\lambda(t-t_0)},$$

gdzie $\varepsilon > 0$, $\lambda > L$. C, Wykorzystując (5.14) i (5.13) oraz nierówność $y(t) \leq \varphi(t)$, otrzymamy

$$\begin{aligned} y'(t) &= \varphi'(t) - \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \leq f(t, \varphi(t)) - \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \\ &\leq f(t, y(t)) + L(\varphi(t) - y(t)) - \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \\ &= f(t, y(t)) + \varepsilon(L - \lambda)e^{\lambda(t-t_0)} < f(t, y(t)). \end{aligned}$$

Podobnie dla funkcji

$$z(t) = \psi(t) + \varepsilon e^{\lambda(t-t_0)},$$

wykorzystując (5.14) i (5.13) oraz nierówność $z(t) \geq \psi(t)$, otrzymamy

$$\begin{aligned} z'(t) &= \psi'(t) + \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \geq f(t, \psi(t)) + \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \\ &\geq f(t, z(t)) - L(z(t) - \psi(t)) + \varepsilon \lambda e^{\lambda(t-t_0)} \\ &= f(t, z(t)) + \varepsilon(\lambda - L)e^{\lambda(t-t_0)} > f(t, z(t)). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$y(t_0) = \varphi(t_0) \leq x_0 \leq \psi(t_0) = z(t_0).$$

Na mocy twierdzenia 5.3 mamy

$$y(t) < x(t) < z(t), \quad t \in (t_0, t_0 + h).$$

Kładąc $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymamy oszacowania (5.15).

Analogiczny dowód dla przypadku (ii) pozostawiamy czytelnikowi.

Twierdzenie 5.5. Przyjmijmy założenia twierdzenia 5.4, przy czym warunek (5.13) zastąpmy warunkiem Lipschitza: dla dowolnych $(t, x), (t, y) \in U$, gdzie $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$, spełniona jest nierówność

$$|f(t, y) - f(t, x)| \leq L|y - x|. \quad (5.17)$$

Niech x będzie rozwiązaniem problemu (5.12) w przedziale $(t_0 - h, t_0 + h)$. Niech funkcje φ i ψ spełniają nierówności (5.14). Przyjmijmy ponadto, że $\varphi(t_0) = x_0 = \psi(t_0)$.

Wówczas:

- (i) Jeśli $\varphi(t_1) < x(t_1)$ dla pewnego $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$, to $\varphi(t) < x(t)$ dla $t \in [t_1, t_0 + h]$. Jeśli $\varphi(t_1) = x(t_1)$, to $\varphi(t) = x(t)$ dla $t \in [t_0, t_1]$.
- (ii) Jeśli $\psi(t_1) > x(t_1)$, dla pewnego $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$, to $\psi(t) > x(t)$ dla $t \in [t_1, t_0 + h]$. Jeśli $\psi(t_1) = x(t_1)$, to $\psi(t) = x(t)$ dla $t \in [t_0, t_1]$.
- (iii) Jeśli $\varphi(t_1) > x(t_1)$ dla pewnego $t_1 \in (t_0 - h, t_0)$, to $\varphi(t) > x(t)$ dla $t \in (t_0 - h, t_1]$. Jeśli $\varphi(t_1) = x(t_1)$, to $\varphi(t) = x(t)$ dla $t \in [t_1, t_0]$.
- (iv) Jeśli $\psi(t_1) < x(t_1)$, dla pewnego $t_1 \in (t_0 - h, t_0)$, to $\psi(t) < x(t)$ dla $t \in (t_0 - h, t_1]$. Jeśli $\psi(t_1) = x(t_1)$, to $\psi(t) = x(t)$ dla $t \in [t_1, t_0]$.

Dowód. Zauważmy że, dla $y \geq x$, warunek Lipschitza (5.17) możemy zapisać w postaci

$$-L(y - x) \leq f(t, y) - f(t, x) \leq L(y - x). \quad (5.18)$$

Zauważmy też, że założenia twierdzenia 5.4 są wówczas spełnione, a zatem zachodzą warunki (5.15) i (5.16).

Ad (i). Niech $t \in [t_0, t_0 + h)$. Z (5.14) i (5.15) oraz lewej części nierówności (5.18) wynika, że

$$\varphi'(t) - x'(t) \leq f(t, \varphi(t)) - f(t, x(t)) = -(f(t, x(t)) - f(t, \varphi(t))) \leq L(x(t) - \varphi(t)).$$

Stąd

$$\varphi'(t) - x'(t) + L(\varphi(t) - x(t)) \leq 0.$$

Mnożąc ostatnią nierówność przez e^{Lt} , otrzymamy

$$e^{Lt}(\varphi'(t) - x'(t)) + Le^{Lt}(\varphi(t) - x(t)) \leq 0.$$

Ostatnia nierówność jest równoważna warunkowi

$$\frac{d}{dt} \left(e^{Lt}(\varphi(t) - x(t)) \right) \leq 0.$$

Oznacza to, że funkcja $e^{Lt}(\varphi(t) - x(t))$ jest malejąca. Stąd i z nierówności $\varphi(t_1) < x(t_1)$ wynika, że

$$e^{Lt}(\varphi(t) - x(t)) \leq e^{Lt_1}(\varphi(t_1) - x(t_1)) < 0 \quad \text{dla } t > t_1,$$

a w konsekwencji

$$\varphi(t) < x(t) \quad \text{dla } t \in [t_1, t_0 + h).$$

Założmy teraz, że $\varphi(t_1) = x(t_1)$. Przypuśćmy, że istnieje $\tilde{t} \in [t_0, t_1)$ takie, że $\varphi(\tilde{t}) < x(\tilde{t})$. Zgodnie z powyższą obserwacją $\varphi(t) < x(t)$ dla $t \in [\tilde{t}, t_0 + h)$. W szczególności $\varphi(t_1) < x(t_1)$, co jest niemożliwe. Stąd i (5.15) wynika natychmiast, że $\varphi(t) = x(t)$ dla $t \in [t_0, t_1]$.

Ad (ii). Niech $t \in [t_0, t_0 + h)$. Z (5.14) i (5.15) oraz lewej części nierówności (5.18) wynika, że

$$x'(t) - \psi'(t) \leq f(t, x(t)) - f(t, \psi(t)) = -(f(t, \psi(t)) - f(t, x(t))) \leq L(\psi(t) - x(t)).$$

Stąd

$$x'(t) - \psi'(t) + L(x(t) - \psi(t)) \leq 0.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku możemy pokazać, że jeśli $x(t_1) < \psi(t_1)$ dla pewnego $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$, to $x(t) < \psi(t)$ dla $t \in [t_1, t_0 + h)$. Jeśli $x(t_1) = \psi(t_1)$ dla pewnego $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$, to $x(t) = \psi(t)$ dla $t \in [t_0, t_1]$.

Analogicznie można pokazać stwierdzenia (iii) i (iv). Ich dowody pozostawiamy czytelnikowi.

5.3. Twierdzenia porównawcze

W teorii równań różniczkowych często bardzo użytecznym okazuje się oszacowanie rozwiązań jednego równania za pomocą rozwiązań drugiego równania. Rezultaty takie noszą nazwę twierdzeń porównawczych. Poniżej podano przykład takiego twierdzenia.

Twierdzenie 5.6. Niech $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że

$$f(t, x) < g(t, x) \quad \text{dla } (t, x) \in U.$$

Niech $(t_0, x_0) \in U$. Niech $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ($t_0 \in I$) będą odpowiednio rozwiązaniami problemu

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

oraz

$$y' = g(t, y), \quad y(t_0) = x_0.$$

Wówczas

$$x(t) < y(t) \quad \text{dla } t > t_0, t \in I \quad (5.19)$$

oraz

$$x(t) > y(t) \quad \text{dla } t < t_0, t \in I. \quad (5.20)$$

Dowód. Pokażemy nierówność (5.19). Przyjmując $u = y - x$, mamy

$$u'(t_0) = y'(t_0) - x'(t_0) = g(t_0, y(t_0)) - f(t_0, x(t_0)) = g(t_0, x_0) - f(t_0, x_0) > 0.$$

Ponieważ u' jest funkcją ciągłą, istnieje $\delta > 0$ takie, że $u'(t) > 0$ dla $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Stąd i z równości $u(t_0) = 0$ wynika, że $u(t) > 0$ dla $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Niech $(t_0, \tilde{t})$ będzie maksymalnym przedziałem, w którym $u(t) > 0$, czyli

$$\tilde{t} = \sup \{t \in I, t > t_0 : u(s) > 0 \text{ dla } s \in [t_0, t]\}.$$

Jeśli $\tilde{t} = \sup I$, dowód jest zakończony. Przypuśćmy, że $\tilde{t} < \sup I$.

Zauważmy, że

$$u'(\tilde{t}) = y'(\tilde{t}) - x'(\tilde{t}) = g(\tilde{t}, y(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = g(\tilde{t}, x(\tilde{t})) - f(\tilde{t}, x(\tilde{t})) > 0.$$

Ponieważ u' jest funkcją ciągłą, istnieje $\delta_1 > 0$ takie, że $u'(t) > 0$ dla $t \in (\tilde{t} - \delta_1, \tilde{t} + \delta_1)$. Stąd i z warunku $u(\tilde{t}) = 0$ wynika, że $u(t) < 0$ dla $t \in (\tilde{t} - \delta_1, \tilde{t})$, co jest niemożliwe, bowiem $u(t) > 0$ dla $t \in (t_0, \tilde{t})$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. Podobnie można pokazać nierówność (5.20).

5.4. Rozwiązanie górne i dolne problemu Cauchy'ego

Rozważmy problem Cauchy'ego (5.12). Załóżmy, że rozwiązanie tego problemu nie jest określone jednoznacznie.

Definicja 5.1. Rozwiązanie $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ problemu (5.12) nazywamy rozwiązaniem dolnym problemu (5.12) w przedziale I , jeśli dla dowolnego rozwiązania $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ problemu (5.12) mamy

$$\varphi(t) \leq x(t) \quad \text{dla } t \in I \cap J.$$

Rozwiązanie $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ problemu (5.12) nazywamy rozwiązaniem górnym problemu (5.12) w przedziale I , jeśli dla dowolnego rozwiązania $x : J \rightarrow \mathbb{R}$ problemu (5.12) mamy

$$\psi(t) \geq x(t) \quad \text{dla } t \in I \cap J.$$

Twierdzenie 5.7. Niech $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $P = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, będzie funkcją ciągłą i ograniczoną. Wówczas problem (5.12) ma w przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$, gdzie $h = \min\{a, b/(M + 1)\}$, $M = \sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in P\}$, rozwiązanie górne oraz dolne.

Dowód. Dla $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$x' = f(t, x) + \frac{1}{n}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (5.21)$$

Na mocy twierdzenia 1.5 problem (5.21) ma rozwiązanie w przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$. Oznaczmy go symbolem x_n^+ . Oczywiście rodzina $\{x_n^+\}$ jest równocześnie i wspólnie ograniczona. Na mocy twierdzenia Arzela–Ascoli istnieje podciąg $\{x_{n_k}^+\}$ ciągu $\{x_n^+\}$ jednostajnie zbieżny w przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$, powiedzmy do funkcji x^+ . Przechodząc (zob. lemat 1.2) z $n_k \rightarrow \infty$ w równość

$$x_{n_k}^+(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x_{n_k}^+(s)) + \frac{1}{n_k}) ds, \quad t \in I,$$

otrzymamy

$$x^+(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^+(s)) ds, \quad t \in I,$$

co oznacza, że x^+ jest rozwiązaniem problemu (5.12) w przedziale $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Niech $x : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem problemu (5.12). Zgodnie z twierdzeniem 5.6

$$x_{n_k}^+(t) < x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0)$$

oraz

$$x^+(t)_{n_k} > x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h).$$

Przechodząc z n_k do nieskończoności, otrzymamy

$$x^+(t) \leq x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0)$$

oraz

$$x^+(t) \geq x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h).$$

Analogicznie rozważając ciąg problemów

$$x' = f(t, x) - \frac{1}{n}, \quad x(t_0) = x_0,$$

możemy wykazać istnienie rozwiązania x^- takiego, że dla dowolnego rozwiązania $x : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ problemu (5.12) zachodzą warunki:

$$x^-(t) \geq x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0)$$

oraz

$$x^-(t) \leq x(t) \quad \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h).$$

Położmy

$$\varphi(t) = \begin{cases} x^+(t) & \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0], \\ x^-(t) & \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h) \end{cases}$$

oraz

$$\psi(t) = \begin{cases} x^-(t) & \text{dla } t \in (t_0 - h, t_0], \\ x^+(t) & \text{dla } t \in (t_0, t_0 + h). \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określone funkcje φ i ψ są rozwiązaniami równania (5.12) w przedziale $(t_0 - h, t_0 + h)$, przy czym φ jest rozwiązaniem dolnym, a ψ rozwiązaniem górnym problemu (5.12).

Rozwiązanie górne i dolne – podobnie jak każde inne rozwiązanie – można przedłużyć tak, aby było określone w przedziale $[t_0, +\infty)$ lub osiągnęło brzeg obszaru (zob. podrozdz. 1.4).

Przykład 5.3. Rozwiązaniem problemu (zob. przykład 1.1)

$$x' = \sqrt{x}, \quad x(0) = 0, \quad t \geq 0$$

jest rodzina funkcji

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t \leq t_0, \\ (t - t_0)^2/4 & \text{dla } t > t_0. \end{cases}$$

Nietrudno sprawdzić, że w przedziale $[0, +\infty)$ funkcja $x \equiv 0$ jest rozwiązaniem dolnym, a funkcja $x(t) = t^2/4$ rozwiązaniem górnym tego problemu.

5.5. Zadania

1. Korzystając z nierówności Gronwalla, pokazać, że rozwiązanie problemu

$$x' + a(t)x = f(t), \quad x(t_0) = \lambda,$$

gdzie a i f są funkcjami ciągłymi, zależy w sposób ciągły od λ . (*Wskazówka: Teza jest natychmiastową konsekwencją nierówności Gronwalla'a oraz nierówności* $|x(t; t_0, \lambda_2) - x(t; t_0, \lambda_1)| \leq |\lambda_2 - \lambda_1| + \int_{t_0}^t |a(s)| |x(s; t_0, \lambda_2) - x(s; t_0, \lambda_1)| ds$).

2. Dla problemu początkowego

$$x' = t + e^{2t} \sin tx, \quad x(0) = x_0$$

oszacować przyrost rozwiązania na przedziale $[0, 1]$, jeśli wartość początkowa x_0 została zaburzona o wielkość 0.2.

3. Oszacować różnicę rozwiązań problemów

$$x' = a + \sin x, \quad x(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad x' = b + \sin x, \quad x(0) = 0.$$

4. Oszacować różnicę rozwiązań $x(t, \lambda_1), x(t, \lambda_2)$ problemu

$$x' = \cos x + \lambda, \quad x(0) = 0$$

w przedziale $[0, 1]$.

5. Pokazać, że w uwadze 5.2 nierówności silnych nie można zastąpić jednocześnie nierównościami słabymi. (*Wskazówka: Wykorzystać przykład 1.1 lub 1.2*).

6. Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem problemu

$$x' = x - x^2, \quad x(0) = 1/2.$$

Pokazać, że $1/2 < x(t) \leq 1$ dla $t \in (0, \infty)$.

(*Wskazówka: Rozważyć funkcje $\varphi(t) = 1/2$ oraz $\psi(t) = 1 + \varepsilon$ dla $\varepsilon > 0$, wykorzystać twierdzenie 5.3, a następnie przejść z ε do zera*).

7. Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem problemu

$$x' = x^2 - t, \quad x(0) = 1.$$

Pokazać, że

$$1 + t \leq x(t) \leq 1/(1 - t) \quad \text{dla } t \in (-1, 1), \quad t \neq 0.$$

(*Wskazówka: Rozważyć najpierw przypadek $t \in [0, 1)$. Dla $\epsilon > 0$ połóżmy $\varphi(t) = 1 + (1 - \epsilon)t$ oraz $\psi(t) = \frac{1}{1 - (1 + \epsilon)t}$, $t \in [0, \frac{1}{1 + \epsilon})$. Na mocy twierdzenia 5.3 mamy $1 + (1 - \epsilon)t < x(t) < \frac{1}{1 - (1 + \epsilon)t}$ dla $t \in [0, \frac{1}{1 + \epsilon})$. Przechodząc z ϵ do zera, otrzymamy szukane nierówności dla $t \in [0, 1)$. Dla $t < 0$ rozważmy funkcje $\varphi(t) = 1 + (1 + \epsilon)t$ oraz $\psi(t) = \frac{1}{1 - (1 - \epsilon)t}$. Po ponownym wykorzystaniu twierdzenia 5.3 i przejściu z parametrem ϵ do zera otrzymamy drugą część tezy.*)

8. Niech $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że $f(t, x) < g(t, x)$ dla $(t, x) \in U$. Niech $x, y : J \rightarrow \mathbb{R}$ ($J = [t_0, t_0 + h)$), będą rozwiązaniami problemów

$$x' = f(t, x), \quad y' = g(t, y), \quad t \in J.$$

Założmy ponadto, że $x(t_0) < y(t_0)$. Pokazać, że $x(t) < y(t)$ dla $t \in J$.

9. Znaleźć dolne i górne rozwiązanie problemu

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0.$$

10. Rozważyć kwestie istnienia dolnego i górnego rozwiązania problemu

$$tx' = 2x, \quad x(0) = 0.$$

11. Niech $u, v, p : [t_0, t_0 + a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ będą funkcjami ciągłymi. Załóżmy, że

$$u(t) \leq p(t) + \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + a].$$

Wówczas

$$u(t) \leq p(t) + \int_{t_0}^t p(s)v(s)e^{\int_s^t v(\tau)d\tau}ds \quad \text{dla } t \in [t_0, t_0 + a].$$

(Wskazówka: Połóżmy $w(t) = \int_{t_0}^t u(s)v(s)ds$. Oczywiście $w'(t) = u(t)v(t) \leq p(t)v(t) + w(t)v(t)$, $w(t_0) = 0$. Wyraży skrajne ostatniej nierówności pomnóżmy przez $e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}$. Uzyskana nierówność może być zapisana w postaci równoważnej $(w(t)e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau})' \leq p(t)v(t)e^{-\int_{t_0}^t v(\tau)d\tau}$. Po scałkowaniu w przedziale $[t_0, t]$ i skorzystaniu z nierówności $u \leq p + w$ otrzymamy pożądaną wynik).

12. Załóżmy, że funkcje p i v występujące w zadaniu poprzednim są postaci: $p(t) = a + b(t - t_0)$, $v(t) = c$, gdzie a, b, c , są stałymi. Pokazać, że

$$u(t) \leq \left(a + \frac{b}{c}\right)e^{c(t-t_0)} - \frac{b}{c}.$$

Rozdział 6

Stabilność rozwiązań równań różniczkowych

6.1. Wprowadzenie

Rozważmy problem początkowy

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

gdzie $f : U \rightarrow R^n$ jest funkcją ciągłą, $U \subset R^{n+1}$ zbiorem otwartym i spójnym, $x \in R^n$, $(t_0, x_0) \in U$.

Rozwiązanie problemu początkowego (6.1) będziemy oznaczać symbolem $x(\cdot; t_0, x_0)$.

Definicja 6.1. Mówimy, że rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ problemu (6.1) jest stabilne w sensie Lapunowa, jeśli jest określone w przedziale $[t_0, \infty)$ i ponadto, dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że

$$\|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, y_0)\| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad t \geq t_0, \quad y_0 \in B(x_0, \delta),$$

gdzie symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę w przestrzeni R^n , a $B(x_0, \delta)$ kulę w przestrzeni R^n o środku w punkcie x_0 i promieniu δ .

Definicja 6.2. Rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ problemu (6.1) nazywamy asymptotycznie stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli jest ono stabilne i ponadto istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, y_0)\| = 0 \quad \text{dla} \quad y_0 \in B(x_0, \delta).$$

Przykład 6.1. Rozwiązaniem problemu

$$x' = 2t, \quad x(t_0) = x_0$$

jest funkcja $x(\cdot; t_0, x_0) = t^2 + x_0 - t_0^2$. Oczywiście

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, y_0)| = |(t^2 + x_0 - t_0^2) - (t^2 + y_0 - t_0^2)| = |x_0 - y_0|.$$

Rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ jest stabilne, bowiem dla zadanego $\varepsilon > 0$ wystarczy przyjąć $\delta = \varepsilon$. Zauważmy, że rozwiązanie to nie jest asymptotycznie stabilne.

Przykład 6.2. Rozwiązaniem problemu

$$x' = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

jest funkcja

$$x(\cdot; t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Oczywiście

$$|x(t; t_0, y_0) - x(t; t_0, x_0)| = |y_0 - x_0| e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Zauważmy, że rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ jest stabilne, jeśli funkcja

$$t \mapsto e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

jest ograniczona oraz asymptotycznie stabilne, jeśli

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = 0.$$

Przykład 6.3. Rozważmy problem początkowy

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0,$$

gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Załóżmy, że $f(0) = 0$. Oczywiście funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem tego problemu. Pokażemy, że stabilność rozwiązania zerowego zależy od znaku funkcji f .

Przypuśćmy wpierw, że $xf(x) > 0$ dla $0 < |x| < h$. Wówczas dla $x_0 \in (0, h)$ rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ rośnie co najmniej do chwili $\hat{t}$ takiej, że $x(\hat{t}; 0, x_0) = h$. Ponadto łatwo zauważyć, że jeśli $0 < x(\hat{t}; 0, x_0) < h$ dla pewnego $\hat{t} > 0$, to $x(t; 0, x_0) \geq x(\hat{t}; 0, x_0)$ dla $t > \hat{t}$. Podobnie, jeśli $x_0 \in (-h, 0)$ rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ maleje co najmniej do chwili $\hat{t}$ takiej, że $x(\hat{t}; 0, x_0) = -h$. Ponadto, jeśli $-h < x(\hat{t}; 0, x_0) < 0$ dla pewnego $\hat{t} > 0$, to $x(t; 0, x_0) \leq x(\hat{t}; 0, x_0)$ dla $t > \hat{t}$. Oznacza to, że rozwiązanie zerowe nie może być asymptotycznie stabilne.

Przypuśćmy teraz, że $xf(x) < 0$ dla $0 < |x| < h$. Wówczas dla $x_0 \in (0, h)$ rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ maleje tak długo jak $x(t; 0, x_0) > 0$, natomiast dla $x_0 \in (-h, 0)$ rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ rośnie tak długo jak $x(t; 0, x_0) < 0$. Łatwo też zauważyć, że jeśli $0 < x(\hat{t}; 0, x_0) < h$ dla pewnego $\hat{t} \geq 0$, to $x(t; 0, x_0) \leq x(\hat{t}; 0, x_0)$ dla $t > \hat{t}$. Podobnie, jeśli $-h < x(\hat{t}; 0, x_0) < 0$ dla pewnego $\hat{t} \geq 0$, to $x(t; 0, x_0) \geq x(\hat{t}; 0, x_0)$ dla $t > \hat{t}$. Oznacza to, że rozwiązanie zerowe jest stabilne.

6.2. Stabilność układów liniowych

Rozważmy problem początkowy dla układu równań liniowych o stałych współczynnikach

$$x' = Ax, \quad x(t_0) = 0, \tag{6.2}$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $0 = (0, \dots, 0)^T$, $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$.

W rozdziale 4 pokazaliśmy, że jeśli równanie charakterystyczne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ma jednokrotne pierwiastki rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, to całka ogólna równania występującego w problemie (6.2) ma postać

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} w^1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} w^n,$$

gdzie wektor $w^k = (w_1^k, \dots, w_n^k)^T$, $k = 1, \dots, n$, jest rozwiązaniem równania

$$(A - \lambda_k I)w = 0.$$

Jeśli wszystkie wartości własne $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, wówczas $e^{\lambda_k t} \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, n$. W konsekwencji $x(t) \rightarrow 0$, gdy $t \rightarrow \infty$, co oznacza, że rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne. Jeśli $\lambda_k \leq 0$, $k = 1, \dots, n$, rozwiązanie zerowe jest stabilne. Jeśli przynajmniej jedna z wartości własnych jest dodatnia, rozwiązanie zerowe jest niestabilne.

Jeśli λ_k jest pierwiastkiem wielokrotnym, odpowiadające mu rozwiązanie to wielomian zmiennej t pomnożony przez czynnik $e^{\lambda_k t}$. Oczywiście funkcja ta dąży do zera gdy $t \rightarrow \infty$, czyli gdy $\lambda_k < 0$. W konsekwencji, gdy wartości własne są liczbami rzeczywistymi ujemnymi, rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne. Warunek $\lambda_k \leq 0$ nie gwarantuje stabilności.

Jeśli $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, to odpowiadający jej wektor własny $w^k = u^k + iv^k$ jest również liczbą zespoloną, a stosowne rozwiązania mają postać

$$x^1 = e^{\alpha_k t} (u^k \cos \beta_k t - v^k \sin \beta_k t), \quad x^2 = e^{\alpha_k t} (u^k \sin \beta_k t + v^k \cos \beta_k t), \quad t > 0.$$

Jeśli $\alpha_k < 0$, funkcje x_1, x_2 dążą do zera, gdy $t \rightarrow \infty$. Jeśli $\alpha_k = 0$, funkcje te są ograniczone, przy czym norma wektora w jest mała, jeśli punkt początkowy x_0 jest bliski zera. Jeśli $\alpha_k > 0$, funkcje x_1, x_2 są nieograniczone. W konsekwencji rozwiązanie zerowe problemu (6.2) jest asymptotycznie stabilne, gdy $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = 1, \dots, n$; stabilne, gdy $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0$, $k = 1, \dots, n$; niestabilne, gdy $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ dla co najmniej jednego k .

6.3. Metoda Lapunowa dla układów autonomicznych

Rozważmy równanie

$$x' = f(x), \tag{6.3}$$

gdzie $f : U \rightarrow R^n$ jest funkcją ciągłą, $U \subset R^n$ zbiorem otwartym i spójnym. Przypomnijmy, że układ równań różniczkowych, w którym zmienna niezależna nie występuje bezpośrednio, nazywamy *układem autonomicznym*.

Punkt $x_0 \in U$ taki, że $f(x_0) = 0$ nazywamy *punktem stacjonarnym* równania (6.3). Oczywiście funkcja $x(t) \equiv x_0$ jest rozwiązaniem równania (6.3). Jeśli $x_0 = 0$, rozwiązanie $x(t) \equiv 0$ nazywamy *rozwiązaniem zerowym*. Zmiana zmiennych $y = x - x_0$ sprowadza punkt stacjonarny x_0 do początku układu. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy zatem ograniczyć się do badania stabilności rozwiązań zerowych.

Definicja 6.1. Funkcje $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe, nazywamy *funkcją Lapunowa dla układu (6.3) w obszarze U* , jeśli:

- (i) $V(0) = 0, V(x) > 0$ dla $x \in U \setminus \{0\}$;
- (ii) $(V \circ \varphi)'(t) \leq 0$ dla dowolnego rozwiązania φ układu (6.3).

Uwaga 6.1. Pewne rezultaty dotyczące stabilności możemy również uzyskać, jeśli w miejsce warunku (i) założymy warunek nieco słabszy:

(i') $V(0) = 0, V(x) \geq 0$ dla $x \in U \setminus \{0\}$, przy czym równość zachodzi tylko dla ściśle określonych podzbiorów zbioru U .

Przykład 6.4. Nietrudno sprawdzić, że poniższe funkcje spełniają warunek (i):

- (a) $V(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad U = R^n$;
- (b) $V(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - (x_1^4 + \dots + x_n^4), \quad U = \{x : \|x\| < 1\}$;
- (c) $V(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2, \quad \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, \quad U = R^n$;

natomiast warunek (i') spełniają funkcje:

- (d) $V(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^2, \quad \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_{n-1} > 0, \quad U = R^n$;
- (e) $V(x) = \alpha_1 x_1^2 + (\alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1})^2, \quad \alpha_1 > 0, \quad U = R^n$.

Warunek (ii) mówi, że dla dowolnego rozwiązania $\varphi : I \rightarrow R^n$ leżącego w zbiorze U , funkcja $t \mapsto V(\varphi(t))$ jest malejąca. W konsekwencji rozwiązanie φ nie może zbyt oddalać się od początku układu. Ponadto, jeśli uda się wykazać, że $V(\varphi(t))$ dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$, to $\varphi(t)$ musi dążyć do początku układu przy $t \rightarrow \infty$. W literaturze pochodną $(V \circ \varphi)'$ zwykle oznacza się symbolem $\dot{V}(\varphi)$.

Niech $\varphi : I \rightarrow R^n$ będzie rozwiązaniem układu (6.3) leżącym w zbiorze U . Oczywiście

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varphi) &= \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varphi(t)) f_i(\varphi(t)) = \langle \text{grad} V(\varphi(t)), f(\varphi(t)) \rangle, \end{aligned}$$

gdzie symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni R^n .

Uwaga 6.2. Zauważmy, że jeśli

$$\langle \text{grad} V(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \text{dla } x \in U \setminus \{0\},$$

to warunek (ii) jest spełniony.

Warunek (ii) możemy więc sprawdzić bez znajomości rozwiązań równania (6.3). Stąd bierze się praktyczna wartość metody Lapunowa – pozwala ona badać stabilność rozwiązań bez ich znajomości. Natomiast wadą opisanej techniki jest fakt, że nie mamy ogólnej metody wyznaczania funkcji Lapunowa.

Twierdzenie 6.1. Niech $f : U \rightarrow R^n$, gdzie $U \subset R^n$ jest zbiorem otwartym, będzie funkcją ciągłą. Niech $D \subset U$ będzie zbiorem otwartym, spójnym, takim, że $\bar{D} \subset U$. Niech V będzie funkcją Lapunowa dla równania (6.3) w zbiorze U . Załóżmy ponadto, że $V(x) \geq \alpha > 0$ dla $x \in \partial D$. Wówczas, dla $x_0 \in U$ spełniającego warunek $V(x_0) < \alpha$, rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ jest określone dla $t > 0$ i całkowicie leży w zbiorze D . (Symbol $\bar{D}$ oznacza domknięcie zbioru D , symbol ∂D oznacza brzeg obszaru D).

Dowód. Zgodnie z wynikami sekcji 1.6 problem $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ ma rozwiązanie. Dla dowodu nie wprost przypuścimy, że rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ wychodzi ze zbioru D . Niech

$$t_* = \inf \{t > 0 : x(t; 0, x_0) \in \partial D\}.$$

Z ciągłości funkcji $x(\cdot; 0, x_0)$ wynika, że $x(t_*; 0, x_0) \in \partial D$. Zatem $V(x(t_*; 0, x_0)) \geq \alpha$.

Położmy

$$\psi(t) = V(x(t; 0, x_0)).$$

Oczywiście

$$\psi(0) = V(x(0; 0, x_0)) = V(x_0) < \alpha, \quad \psi(t_*) = V(x(t_*; 0, x_0)) \geq \alpha.$$

Zgodnie z warunkiem (ii) definicji 6.1

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}V(x(t; 0, x_0)) \leq 0 \quad \text{dla } t > 0.$$

Funkcja ψ jest zatem malejąca. W konsekwencji

$$\alpha \leq \psi(t_*) \leq \psi(0) < \alpha,$$

co jest niemożliwe. Nasze przypuszczenie było więc fałszywe, rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ nie wychodzi ze zbioru D .

Wniosek 6.1. Niech $f : U \rightarrow R^n$, gdzie $U \subset R^n$ jest zbiorem otwartym, będzie funkcją ciągłą. Załóżmy, że $0 \in U$ oraz $f(0) = 0$, a ponadto istnieje funkcja Lapunowa dla równania (6.3). Wówczas rozwiązanie zerowe równania (6.3) jest stabilne.

Istotnie, ustalmy $r_0 > 0$ tak, aby $B(0, r_0) \subset U$. Niech $0 < \varepsilon < r_0$. Niech $\alpha = \min\{V(x) : \|x\| = \varepsilon\}$. Oczywiście $\alpha > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $V(x) < \alpha$ dla $x \in B(0, \delta)$. Zgodnie z twierdzeniem 6.1 (dla $D = B(0, \varepsilon)$) rozwiązanie startujące z dowolnego punktu $x_0 \in B(0, \delta)$ jest określone dla $t > 0$ i pozostaje w zbiorze $B(0, \varepsilon)$, co oznacza, że rozwiązanie zerowe jest stabilne.

Położmy

$$\mathcal{K} = \{\psi \in C([0, r_0]), \mathbb{R}_+) : \psi(0) = 0, \psi(t) > 0 \text{ dla } t > 0, \psi \text{ funkcja rosnąca}\}.$$

Zauważmy, że jeśli $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ dla $x \in U \setminus \{0\}$ oraz $B(0, r_0) \subset U$, to istnieją funkcje $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{K}$ takie, że

$$\psi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \psi_2(\|x\|) \quad \text{dla } x \in B(0, \rho).$$

Istotnie, wystarczy przyjąć

$$\psi_1(r) = \min \{V(x) : r \leq \|x\| \leq r_0\}, \quad \psi_2(r) = \max \{V(x) : 0 \leq \|x\| \leq r\}.$$

Twierdzenie 6.2. Niech $f : B(0, \rho) \rightarrow R^n$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek $f(0) = 0$. Niech V będzie funkcją Lapunowa dla równania (6.3) w zbiorze $B(0, r_0)$. Załóżmy ponadto, że dla dowolnego rozwiązania φ równania (6.3) o wartościach w zbiorze $B(0, r_0)$ istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{K}$ taka, że

$$(V \circ \varphi)'(t) \leq -\psi(\|\varphi(t)\|) \quad \text{dla } t > 0. \quad (6.4)$$

Wówczas rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne.

Dowód. Na mocy wniosku 6.1 rozwiązanie zerowe jest stabilne. Zatem dla dowolnego $0 < \varepsilon < r_0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|x(t; 0, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{dla } x_0 \in B(0, \delta), \quad t > 0.$$

Pokażemy, że dla każdego $x_0 \in B(0, \delta)$ rozwiązanie $x(\cdot; 0, x_0)$ dąży do zera. Istotnie, niech $x_0 \in B(0, \delta)$. Połóżmy $\varphi = x(\cdot; 0, x_0)$. Niech $\psi \in \mathcal{K}$ będzie funkcją odpowiadającą rozwiązaniu φ zgodnie z założeniem twierdzenia.

Przypuśćmy, że istnieją $r > 0$ oraz $t_0 > 0$ takie, że

$$\|\varphi(t)\| \geq r \quad \text{dla } t > t_0. \quad (6.5)$$

Na mocy warunku (6.4) i własności funkcji ψ

$$(V \circ \varphi)'(t) \leq -\psi(\|\varphi(t)\|) \leq -\psi(r) \quad \text{dla } t > t_0.$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[t_0, t]$, otrzymamy

$$0 \leq V(\varphi(t)) = V(\varphi(t_0)) + \int_{t_0}^t (V \circ \varphi)'(s) ds \leq V(\varphi(t_0)) - \psi(r)(t - t_0).$$

Ponieważ $\psi(r) > 0$, dla t dostatecznie dużych prawa strona jest ujemna, co daje sprzeczność. Zatem przypuszczenie, że istnieje $r > 0$ spełniające warunek (6.5) jest fałszywe. Wynika stąd, że dla dowolnego $r > 0$ oraz $t_0 > 0$ istnieje $t_* > t_0$ takie, że $\|\varphi(t_*)\| < r$. W szczególności dla $r = 1/n$ oraz $t_0 > n$ istnieje $t_n > n$ takie, że $\|\varphi(t_n)\| < 1/n$. Możemy zatem znaleźć ciąg $\{t_n\}$ taki, że $t_n \rightarrow \infty$ oraz $\varphi(t_n) \rightarrow 0$. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} (V \circ \varphi)(t_n) = 0$. Ponieważ $V \circ \varphi$ jest funkcją nieujemną, malejącą względem t , wnosimy stąd, że $\lim_{t \rightarrow \infty} (V \circ \varphi)(t) = 0$. W konsekwencji $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0$, co należało wykazać.

Przykład 6.5. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} x' &= y - x^3 - xy^2, \\ y' &= -x - x^2y - y^3. \end{aligned}$$

Położmy $V(x, y) = x^2 + y^2$. Oczywiście $\text{grad } V(x, y) = (2x, 2y)$ oraz

$$\langle \text{grad } V(x, y), f(x, y) \rangle = (2x, 2y) \begin{pmatrix} y - x^3 - xy^2 \\ -x - x^2y - y^3 \end{pmatrix} = -2(x^2 + y^2)^2 < 0,$$

dla $(x, y) \neq (0, 0)$.

Zgodnie z uwagą 6.2 tak określona funkcja V jest funkcją Lapunowa dla rozważanego układu. Łatwo zauważyć, że warunek (6.4) zachodzi dla funkcji $\psi(r) = 2r^4$. Zatem na mocy twierdzenia 6.2 rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne.

Przykład 6.6. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} x' &= -xy^4, \\ y' &= x^4y. \end{aligned}$$

$$\langle \text{grad } V(x, y), f(x, y) \rangle = (4x^3, 4y^3) \begin{pmatrix} -xy^4 \\ x^4y \end{pmatrix} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0.$$

Przykład 6.7. Rozważmy układ równań

[illegible]

Niech $V(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Mamy

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } V(x), f(x) \rangle &= (2x_1, \dots, 2x_n) \begin{pmatrix} a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n, \\ \vdots \\ a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{pmatrix} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_i x_j = 2 \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)x_i^2. \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.3. *Rozważmy układ równań (6.3), gdzie $f : B(0, r_0) \rightarrow R^n$ jest funkcją ciągłą, spełniającą warunek $f(0) = 0$. Niech $V : B(0, r_0) \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją klasy C^1 taką, że $V(0) = 0$ i taką, że dla dowolnego $0 < r < r_0$ istnieje $x_0 \in B(0, r)$ takie, że $V(x_0) > 0$. Załóżmy ponadto, że dla dowolnego rozwiązania φ równania (6.3) leżącego w zbiorze $B(0, r_0) \setminus \{0\}$ istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{K}$ taka, że*

$$(V \circ \varphi)'(t) \geq \psi(\|\varphi(t)\|) \quad dla \ t > 0. \quad (6.6)$$

Dowód. Ustalmy $0 < \tilde{r} < r_0$ i połóżmy

$$M = \sup_{x \in B(0, \tilde{r})} V(x).$$

$$(V \circ \varphi)(t) \geq (V \circ \varphi)(0) = V(x_0) \quad \text{dla } t > 0.$$

Z drugiej strony, ponieważ $V(0) = 0$, z ciągłości funkcji V wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$V(x) < V(x_0) \quad \text{dla } x \in B(0, \delta).$$

Z ostatnich dwóch nierówności wynika, że $\varphi(t)$ nie leży w kuli $B(0, \delta)$. Oznacza to, że $\|\varphi(t)\| \geq \delta$ dla $t > 0$. Ponieważ ψ jest funkcją rosnącą, zatem $\psi(\|\varphi(t)\|) \geq \psi(\delta) > 0$. Stąd i nierówności (6.6) wynika, że

$$(V \circ \varphi)'(t) \geq \psi(\delta) > 0 \quad \text{dla } t > 0.$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[0, t]$, otrzymamy

$$(V \circ \varphi)(t) - V(x_0) \geq \int_0^t \psi(\delta) ds.$$

Stąd

$$(V \circ \varphi)(t) \geq V(x_0) + \psi(\delta)t.$$

Ponieważ $V(x_0) + \psi(\delta)t > M$ dla dostatecznie dużych t , powiedzmy $t > \hat{t}$, na mocy definicji stałej M wnioskujemy, że $\|\varphi(t)\| \geq \tilde{r}$ dla $t > \hat{t}$. Pokazaliśmy więc, że dla dowolnego $r \in (0, r_0)$ istnieje $x_0 \in B(0, r)$ takie, że rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ wychodzi z kuli $B(0, \tilde{r})$, co oznacza, że rozwiązanie zerowe układu (6.3) nie jest stabilne.

Przykład 6.8. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} x' &= y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' &= -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Niech $V(x, y) = x^2 + y^2$. Oczywiście

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } V(x, y), f(x, y) \rangle &= 2x(y + x(1 - x^2 - y^2)) + 2y(-x + y(1 - x^2 - y^2)) \\ &= 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że założenia twierdzenia 6.3 są spełnione dla $r_0 = 1/\sqrt{2}$ oraz $\psi(r) = r^2(1 - r^2)$. Z twierdzenia 6.4 wnosimy, że rozwiązanie zerowe dla danego układu jest niestabilne.

6.4. Metoda Lapunowa dla układów nieautonomicznych

Rozważmy układ równań

$$x' = f(t, x), \tag{6.7}$$

gdzie $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times U$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$.

Definicja 6.2. Funkcje $V : [t_0, +\infty) \times U \rightarrow \mathbb{R}$ posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe nazywamy funkcją Lapunowa dla układu (6.7), jeśli:

- (i) $V(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$, $V(t, x) > 0$ dla $t \geq t_0$, $x \in U \setminus \{0\}$;
- (ii) Istnieje funkcja $\psi_1 \in \mathcal{K}$ taka, że $V(t, x) \geq \psi_1(\|x\|)$ dla $(t, x) \in [t_0, +\infty) \times U$;

(iii) $\dot{V}(t, \varphi(t)) = \frac{d}{dt}V(t, \varphi(t)) \leq 0$ dla dowolnego rozwiązania φ układu (6.7) i dla dowolnego $t \geq t_0$.

Zauważmy, że jeśli $x = \varphi(t)$ jest rozwiązaniem problemu (6.7), to

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \varphi(t)) &= \frac{dV}{dt}(t, \varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi(t)) \frac{d\varphi_i(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi(t)) f_i(t, \varphi(t)) \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \langle \text{grad } V(t, \varphi(t)), f(t, \varphi(t)) \rangle,\end{aligned}$$

gdzie symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni R^n .

Oczywiście, jeśli

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \text{grad } V(t, x), f(t, x) \rangle \leq 0 \quad \text{dla } (t, x) \in [t_0, \infty) \times U,$$

to warunek (ii) jest w oczywisty sposób spełniony.

Twierdzenie 6.4. Niech $f : [t_0, +\infty) \times U \rightarrow R^n$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek $f(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$.

Jeśli istnieje funkcja Lapunowa V dla układu (6.7), to rozwiązanie zerowe układu (6.7) jest stabilne.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Połóżmy

$$\alpha = \inf \{V(t, x) : \|x\| = \varepsilon, t \geq t_0\}.$$

Na mocy warunku (i) definicji 6.2, $\alpha > 0$. Dobierzmy $\delta > 0$ tak, aby $V(t_0, x) \leq \alpha/2$ dla $\|x\| \leq \delta$. Pokażemy, że każde rozwiązanie $x(t; t_0, x_0)$ spełniające warunek $x(t_0) = x_0$, gdzie $\|x_0\| \leq \delta$, nie wychodzi z kuli o promieniu ε .

Istotnie, przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że istnieją $x_0 \in B(0, \delta)$ oraz $t^* > t_0$ takie, że $\|x(t^*, t_0, x_0)\| = \varepsilon$. Połóżmy

$$\omega(t) = V(t; x(t, t_0, x_0)).$$

Zgodnie z warunkiem (iii) $\omega'(t) \leq 0$ dla $t \geq t_0$. Zatem $\omega(t^*) \leq \omega(t_0)$. W konsekwencji

$$\alpha \leq V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) = \omega(t^*) \leq \omega(t_0) = V(t_0, x_0) \leq \alpha/2.$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że rozwiązanie zerowe jest stabilne.

Twierdzenie 6.5. Niech $f : [t_0, +\infty) \times U \rightarrow R^n$ będzie funkcją ciągłą, spełniającą warunek $f(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$. Podobnie jak w poprzednim twierdzeniu załóżmy, że istnieje funkcja Lapunowa V dla układu (6.7). Załóżmy ponadto, że dla dowolnego rozwiązania φ układu (6.7) o wartościach w zbiorze $U \setminus \{0\}$, istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{K}$ taka, że

$$\dot{V}(t, \varphi(t)) \leq -\psi(\|\varphi(t)\|) \quad \text{dla } t > t_0.$$

Wówczas rozwiązanie zerowe układu (6.7) jest asymptotycznie stabilne.

Dowód. Na mocy twierdzenia 6.4 rozwiązanie zerowe jest stabilne. Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \text{dla } x_0 \in B(0, \delta), \quad t > t_0.$$

Pokażemy, że dla każdego $x_0 \in B(0, \delta)$ rozwiązanie $x(\cdot; t_0, x_0)$ dąży do zera. Istotnie, niech $x_0 \in B(0, \delta)$. Połóżmy $\varphi = x(\cdot; t_0, x_0)$. Niech $\psi \in \mathcal{K}$ będzie funkcją odpowiadającą rozwiązaniu φ zgodnie z założeniem twierdzenia.

Przypuśćmy, że istnieją $r > 0$ oraz $t^* > 0$ takie, że

$$\|\varphi(t)\| \geq r \quad \text{dla } t > t^*. \quad (6.8)$$

Na mocy warunku (iii) i własności funkcji ψ

$$\frac{d}{dt}(V(t, \varphi(t))) \leq -\psi(\|\varphi(t)\|) \leq -\psi(r) \quad \text{dla } t > t^*.$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[t^*, t]$, otrzymamy

$$0 \leq V(t, \varphi(t)) = V(t^*, \varphi(t^*)) + \int_{t^*}^t \frac{d}{ds} V(s, \varphi(s)) ds \leq V(t^*, \varphi(t^*)) - \psi(r)(t - t^*).$$

Ponieważ $\psi(r) > 0$, dla t dostatecznie dużych prawa strona jest ujemna, co daje sprzeczność. Zatem przypuszczenie, że istnieje $r > 0$ spełniające warunek (6.8), jest fałszywe. Wynika stąd, że dla dowolnego $r > 0$ oraz $t^* > 0$ istnieje $\tilde{t} > t^*$ takie, że $\|\varphi(\tilde{t})\| < r$. W szczególności dla $r = 1/n$ oraz $\tilde{t} > n$ istnieje $t_n > n$ takie, że $\|\varphi(t_n)\| < 1/n$. Możemy zatem znaleźć ciąg $\{t_n\}$ taki, że $t_n \rightarrow \infty$ oraz $\varphi(t_n) \rightarrow 0$. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n, \varphi(t_n)) = 0$. Ponieważ $V(t, \varphi(t))$ jest funkcją nieujemną, malejącą względem t , wnosimy stąd, że $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \varphi(t)) = 0$. W konsekwencji $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t)\| = 0$, co należało wykazać.

Przykład 6.9. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -p(t)x, \end{aligned}$$

gdzie $p(t) \geq \delta > 0$, $p'(t) \leq 0$ dla $t \geq 0$.

Jako funkcję Lapunowa weźmy

$$V(t, x, y) = p(t)x^2 + y^2.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{dV(t, x(t), y(t))}{dt} &= p'(t)x^2(t) + 2p(t)x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\ &= p'(t)x^2(t) + 2p(t)x(t)y(t) - 2p(t)x(t)y(t) = p'(t)x^2(t) \leq 0. \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia 6.4 wnioskujemy, że rozwiązanie zerowe jest stabilne.

Przykład 6.10. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned}x' &= -a_{11}(t)x - a_{12}(t)y, \\y' &= a_{21}(t)x - a_{22}(t)y,\end{aligned}$$

gdzie $a_{12}(t) = a_{21}(t)$, $a_{11}(t) \geq \delta > 0$, $a_{22}(t) \geq \delta > 0$. Jako funkcję Lapunowa rozważmy funkcję

$$V(t, x, y) = x^2 + y^2.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{dV(t, x(t), y(t))}{dt} &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) \\&= 2x(t)(-a_{11}(t)x(t) - a_{12}(t)y(t)) + 2y(t)(a_{21}(t)x(t) - a_{22}(t)y(t)) \\&= -2a_{11}(t)x^2(t) - 2a_{12}(t)x(t)y(t) + 2a_{21}(t)x(t)y(t) - 2a_{22}(t)y^2(t) \\&= -2(a_{11}(t)x^2(t) + a_{22}(t)y^2(t)) \leq -2\delta(x^2(t) + y^2(t)).\end{aligned}$$

Zgodnie z twierdzeniem 6.4 rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne (wystarczy wziąć $\psi(r) = 2\delta r^2$).

Twierdzenie 6.6. Niech $f : [t_0, +\infty) \times B(0, r_0) \rightarrow R^n$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek $f(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$. Niech $V : [t_0, \infty) \times B(0, r_0) \rightarrow [0, \infty)$, ($r_0 > 0$) będzie funkcją klasy C^1 taką, że:

- (i) $V(t, 0) = 0$ dla $t \geq t_0$;
- (ii) Istnieje $\psi_0 \in \mathcal{K}$ takie, że

$$V(t, x) \leq \psi_0(\|x\|) \quad \text{dla } (t, x) \in [t_0, +\infty) \times B(0, r_0);$$

- (iii) Dla dowolnego $0 < r < r_0$ istnieje $x_0 \in B(0, r)$ takie, że $V(t_0, x_0) > 0$;
- (iv) Dla dowolnego rozwiązania φ równania (6.7) leżącego w zbiorze $[t_0, \infty) \times (B(0, r_0) \setminus \{0\})$ istnieje funkcja $\psi \in \mathcal{K}$ taka, że

$$\frac{d}{dt}V(t, \varphi(t)) \geq \psi(\|\varphi(t)\|) \quad \text{dla } t > t_0. \quad (6.9)$$

Wówczas rozwiązanie zerowe układu (6.7) jest niestabilne.

Dowód. Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że rozwiązanie zerowe jest stabilne. Zgodnie z definicją stabilności, dla ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon$ dla $x_0 \in B(0, \delta)$, $t > t_0$. Na mocy założenia (ii) i monotoniczności funkcji ψ_0

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq \psi_0(\|x(t; t_0, x_0)\|) \leq \psi_0(\varepsilon) \quad \text{dla } x_0 \in B(0, \delta), \quad t > t_0. \quad (6.10)$$

Dla $0 < r < \delta$, na mocy założenia (iii), istnieje $x_0 \in B(0, r)$ takie, że $V(t_0, x_0) > 0$. Niech γ będzie liczbą rzeczywistą taką, że

$$\psi_0(\gamma) = V(t_0, x_0).$$

Oczywiście $\gamma > 0$. Niech $x = x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (6.7) leżącym w zbiorze $[t_0, \infty) \times (B(0, r_0) \setminus \{0\})$. Na mocy założenia (iv) mamy

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t; t_0, x_0)) \geq 0 \quad \text{dla } t > t_0.$$

W konsekwencji

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \geq V(t_0, x(t_0; t_0, x_0)) = V(t_0, x_0) \quad \text{dla } t \geq t_0.$$

Stąd i z definicji liczby γ oraz warunku (i) mamy

$$\psi_0(\gamma) = V(t_0, x_0) \leq V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq \psi_0(\|x(t; t_0, x_0)\|) \quad \text{dla } t \geq t_0.$$

Ponieważ ψ_0 jest funkcją rosnącą, wynika stąd, że $\|x(t; t_0, x_0)\| \geq \gamma$ dla $t > t_0$.

Niech ψ odpowiada rozwiązaniu $x(t; t_0, x_0)$ zgodnie z założeniami twierdzenia. Na mocy warunku (iv), monotoniczności funkcji ψ oraz ostatniej nierówności, mamy

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t; t_0, x_0)) \geq \psi(\|x(t; t_0, x_0)\|) \geq \psi(\gamma) \quad \text{dla } t > t_0.$$

Całkując ostatnią nierówność w przedziale $[t_0, t]$, otrzymamy

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \geq V(t_0, x(t_0; t_0, x_0)) + \int_{t_0}^t \psi(\gamma) ds = V(t_0, x_0) + \psi(\gamma)(t - t_0).$$

Ponieważ $\psi(\gamma) > 0$, prawa strona dąży do nieskończoności, gdy t dąży do nieskończoności, co daje sprzeczność z (6.10). Ponieważ $r \in (0, \delta)$ było dowolne, oznacza to, że rozwiązanie zerowe nie jest stabilne.

Przykład 6.11. Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)x - a_{12}(t)y, \\ y' &= -a_{21}(t)x - a_{22}(t)y, \end{aligned}$$

gdzie a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} spełniają założenia jak w przykładzie 6.10.

Przyjmijmy $V(t, x, y) = x^2 + y^2$. Nietrudno sprawdzić, że

$$\frac{dV(t, x(t), y(t))}{dt} \geq 2\delta(x^2(t) + y^2(t)).$$

Stąd i twierdzenia 6.6 wynika natychmiast, że rozwiązanie zerowe jest niestabilne.

6.5. Zadania

1. Zbadać rodzaj stabilności rozwiązania zerowego układów:

- $x' = y, \quad y' = -x;$
- $x' = -x + y, \quad y' = -y;$
- $x' = y, \quad y' = z, \quad z' = -x - 6y - 5z;$
- $x' = x + 2y, \quad y' = y + z, \quad z' = x + 3y + z;$
- $x' = x - y - z, \quad y' = -3y + z, \quad z' = x - 3y - 5z.$

2. Dla podanych poniżej układów skonstruować funkcje Lapunowa postaci $V(x, y) = c_1^2 x^2 + c_2^2 y^2$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, a następnie zbadać, czy rozwiązanie zerowe jest stabilne, asymptotycznie stabilne, czy niestabilne:

- a) $x' = -x + ye^x$, $y' = -xe^x - y$;
- b) $x' = -x^3 + x^2 y$, $y' = -x^3 - x^2 y$;
- c) $x' = x/2 - y + xy$, $y' = -y + xy^2$;
- d) $x' = -x - y - x^2$, $y' = x - y - y^3$;
- e) $x' = x^3 - y$, $y' = x + y^3$;
- f) $x' = 2xy + x^3$, $y' = -x^2 + y^5$.

3. Rozważmy układ równań

$$x' = y - xf(x, y), \quad y' = -x - yf(x, y),$$

gdzie $f(0, 0) = 0$. Załóżmy, że f jest funkcją regularną. Pokazać, że rozwiązanie zerowe jest:

- (i) stabilne, jeśli $f(x, y) \geq 0$ w pewnym otoczeniu $B(0, \delta)$ początku układu;
- (ii) asymptotycznie stabilne, jeśli $f(x, y) > 0$ w $B(0, \delta) \setminus \{0\}$;
- (iii) asymptotycznie niestabilne, jeśli w każdym otoczeniu $B(0, \delta)$ istnieje punkt (x, y) taki, że $f(x, y) < 0$.

(Wskazówka: rozważyć funkcje Lapunowa $V(x, y) = x^2 + y^2$).

4. Dla jakich wartości parametrów a i b stan równowagi układu

$$x' = ax + by, \quad y' = -x$$

jest: a) stabilny, b) asymptotycznie stabilny, c) niestabilny.

5. Zbadać, czy rozwiązanie zerowe następujących układów jest stabilne, asymptotycznie stabilne, czy niestabilne:

- a) $x' = y - xe^x \sin^2 y$, $y' = -x - ye^x \sin^2 y$;
- b) $x' = y - x(x^2 + y^3)$, $y' = -x - y(x^3 + y^2)$;
- c) $x' = y - xy^3 \sin x$, $y' = -x - y^3 \sin x$.

6. Pokazać, że rozwiązanie zerowe jest stabilne dla równania

$$x'' + a^2 x = 0$$

oraz asymptotycznie stabilne dla równania

$$x'' + kx' + a^2 x = 0, \quad k > 0$$

(Wskazówka: Zamienić równania na układy równań: $u'_1 = u_2$, $u'_2 = -a^2 u_1$ oraz $u'_1 = u_2$, $u'_2 = -a^2 u_1 - ku_2$, a jako funkcje Lapunowa przyjąć $V(u_1, u_2) = a^2 u_1^2 + u_2^2$).

7. Sprawdzić, że rozwiązanie zerowe równania

$$x' = (\sin(\ln t) + \cos(\ln t) - \sqrt{2})x$$

jest stabilne.

(Wskazówka: Sprawdzić, że funkcja

$$V(t, x) = x^2 e^{(\sqrt{2} - \sin(\ln t))t}$$

spełnia założenia twierdzenia 6.4).

8. Sprawdzić, że rozwiązanie zerowe równania

$$x' = (t \sin t - 2t)x$$

jest asymptotycznie stabilne.

(Wskazówka: Rozważyc funkcję

$$V(t, x) = x^2 e^{\int_0^t (2s - s \sin s) ds}.$$

Z nierówności $V(t, x) \geq x^2$ oraz $\frac{d}{dt}V(t, \varphi(t)) \leq -tV(t, \varphi(t))$ dla $t > 0$ wywnioskować, że funkcja V spełnia założenia twierdzenia 6.5).

Rozdział 7

Klasyfikacja punktów krytycznych. Cykle graniczne

7.1. Zachowanie się rozwiązań w otoczeniu punktów stacjonarnych

Rozważmy autonomiczny układ równań

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \quad (7.1)$$

gdzie x i y są funkcjami zmiennej t , $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^2$) zadanymi funkcjami klasy C^1 .

Punkt $(x_0, y_0) \in U$ taki, że $f(x_0, y_0) = 0$, $g(x_0, y_0) = 0$ nazywamy punktem *stacjonarnym* (albo *krytycznym*) układu (7.1). Oczywiście funkcja stała $(x(t), y(t)) \equiv (x_0, y_0)$ jest rozwiązaniem, tak zwanym *rozwiązaniem stacjonarnym*, układu (7.1). W niniejszym rozdziale zajmiemy się zachowaniem rozwiązań układu (7.1) w otoczeniu punktu stacjonarnego. Dokonując zmiany zmiennych $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, punkt stacjonarny sprowadzimy do początku układu. Dlatego też, bez zmniejszenia ogólności rozważań, wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy punktem stacjonarnym jest początek układu współrzędnych.

Przykład 7.1. Rozważmy układ równań liniowych o stałych współczynnikach

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (7.2)$$

gdzie $ad - bc \neq 0$.

Oczywiście punkt $(0, 0)$ jest punktem stacjonarnym układu (7.2). Rozwiązując równanie charakterystyczne

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

znajdziemy wartości własne, a mając wartości własne λ_1, λ_2 , z układu równań

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_i & b \\ c & d - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $i = 1, 2$, znajdziemy odpowiadające im wektory własne (u_1, v_1) oraz (u_2, v_2) .

Przypadek 1. Wartości własne są liczbami rzeczywistymi różnymi.

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

lub w postaci równoważnej

$$x = C_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 u_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Zauważmy jeszcze, że jeśli $C_1 = 0$, to trajektorią rozwiązania jest prosta $y = (v_2/u_2)x$, a jeśli $C_2 = 0$, prosta $y = (v_1/u_1)x$. Dalszą analizę poprowadzimy w zależności od znaku wartości własnych.

Przypadek 1a. Załóżmy, że $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Wówczas przy $t \rightarrow +\infty$ rozwiązanie dąży do początku układu. Jeśli $C_1 = 0$ lub $C_2 = 0$, rozwiązanie zdąża do początku układu odpowiednio wzdłuż prostej $y = (v_2/u_2)x$ lub $y = (v_1/u_1)x$. Ponieważ $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, dla $C_2 \neq 0$ mamy

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1 v_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 v_2}{C_1 u_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + C_2 u_2} = \frac{v_2}{u_2}.$$

Oznacza to, że rozwiązanie zbliża się do początku układu stycznie względem prostej $y = (v_2/u_2)x$.

Przypadek 1b. Załóżmy, że $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Wówczas przy $t \rightarrow +\infty$ rozwiązanie ucieka do nieskończoności. Jeśli $C_1 = 0$ lub $C_2 = 0$, rozwiązanie zdąża do nieskończoności odpowiednio wzdłuż prostej $y = (v_2/u_2)x$ lub $y = (v_1/u_1)x$. Pozostałe rozwiązania uciekają do nieskończoności asymptotycznie do prostej $y = (v_2/u_2)x$.

Przypadek 1c. Załóżmy, że $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Jeśli $C_2 = 0$, rozwiązanie zdąża do początku układu wzdłuż prostej $y = (v_1/u_1)x$. Jeśli $C_2 \neq 0$, rozwiązanie ucieka do nieskończoności asymptotycznie względem prostej $y = (v_2/u_2)x$.

Przypadek 2. Załóżmy teraz, że wartość własna $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ jest liczbą zespoloną. Oczywiście odpowiadający jej wektor własny $(u, v) = (u_1 + iu_2, v_1 + iv_2)$ jest również liczbą zespoloną, a odpowiadające rozwiązanie zespolone ma postać

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) \begin{pmatrix} u_1 + iu_2 \\ v_1 + iv_2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ część rzeczywista i część urojona spełniają również nasze równanie, uzyskamy rozwiązania rzeczywiste:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 \cos \beta t - u_2 \sin \beta t \\ v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 \sin \beta t + u_2 \cos \beta t \\ v_1 \sin \beta t + v_2 \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Ponieważ rozwiązania te są liniowo niezależne, rozwiązanie ogólne ma postać

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 \cos \beta t - u_2 \sin \beta t \\ v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} u_1 \sin \beta t + u_2 \cos \beta t \\ v_1 \sin \beta t + v_2 \cos \beta t \end{pmatrix}.$$

Po stosownych przekształceniach rozwiązanie to możemy zapisać w postaci

$$x = r_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t - \omega_1), \quad y = r_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t - \omega_2).$$

(Tutaj $r_1 = \sqrt{C_1^2 u_1^2 + C_2^2 u_2^2}$, $\cos \omega_1 = C_1 u_1 / r_1$, $\sin \omega_1 = C_2 u_2 / r_1$). Jeśli $\alpha = 0$, trajektorią rozwiązania jest krzywa zamknięta o środku w początku układu. Jeśli

$\alpha < 0$, rozwiązanie dąży po spirali do zera. Jeśli $\alpha > 0$, rozwiązanie ucieka po spirali do nieskończoności.

Przypadek 3. Rozpatrzmy na koniec przypadek $\lambda_1 = \lambda_2$. Wiadomo (zob. przykład 4.3), że rozwiązanie ogólne możemy wówczas przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 + (a - \lambda_1)t \\ ct \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} bt \\ 1 + (d - \lambda_1)t \end{pmatrix}.$$

Nietrudno zauważyć, że jeśli części rzeczywiste wartości własnych są ujemne, rozwiązanie dąży do zera przy $t \rightarrow +\infty$. Jeśli części rzeczywiste wartości własnych są dodatnie, rozwiązanie ucieka do nieskończoności, asymptotycznie względem prostych, których wyliczenie pozostawiamy czytelnikowi.

7.2. Równania liniowe z perturbacjami

Rozważmy układ równań liniowych z perturbacją

$$x' = ax + by + h(x, y), \quad y' = cx + dy + k(x, y), \quad (7.3)$$

gdzie $h(0, 0) = 0$, $k(0, 0) = 0$. Oczywiście $(0, 0)$ jest punktem stacjonarnym rozważanego układu.

Obok układu (7.3) rozważmy skojarzony z nim układ liniowy

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy. \quad (7.4)$$

Wyrażenia h i k nazywamy *zaburzeniem* lub *perturbacją* układu (7.4).

Twierdzenie 7.1. *Założmy, że*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{k(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

(i) *Jeśli rozwiązanie zerowe jest asymptotycznie stabilne dla układu (7.4), to również jest asymptotycznie stabilne dla układu (7.3).*

(ii) *Jeśli rozwiązanie zerowe jest niestabilne dla układu (7.4), to również jest niestabilne dla układu (7.3).*

(iii) *Stabilność rozwiązania zerowego dla układu (7.4) nie daje informacji o stabilności tego rozwiązania dla układu (7.3).*

Dowód twierdzenia 7.1 pomijamy.

Przykład 7.2. Rozważmy układ

$$x' = 1 - xy, \quad y' = x - y^3.$$

Łatwo sprawdzić, że $(1, 1)$ oraz $(-1, -1)$ są punktami stacjonarnymi naszego układu.

Transformacja $u = x - 1$, $v = y - 1$ przesuwa punkt $(1, 1)$ do początku układu, a rozważany układ równań przyjmuje postać

$$u' = -u - v - uv, \quad v' = u - 3v - 3v^2 - v^3.$$

Ponieważ wartościami własnymi macierzy współczynników skojarzonego układu liniowego

$$u' = -u - v, \quad v' = u - 3v$$

są liczby $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, punkt $(1, 1)$ dla układu wyjściowego jest asymptotycznie stabilny.

Podobnie, transformacja $u = x + 1, v = y + 1$ przesuwa punkt $(-1, -1)$ do początku układu, a rozważany układ przekształca w układ

$$u' = u + v - uv, \quad v' = u - 3v + 3v^2 - v^3.$$

Wartościami własnymi macierzy współczynników układu liniowego

$$u' = u + v, \quad v' = u - 3v$$

są liczby $\lambda_1 = -1 - \sqrt{5} < 0, \lambda_2 = -1 + \sqrt{5} > 0$. Zgodnie z twierdzeniem 7.1 punkt $(-1, -1)$ dla układu wyjściowego jest punktem niestabilnym.

7.3. Układy nieliniowe. Linearyzacja

Rozważmy ponownie układ (7.1), przy dodatkowym założeniu, że funkcje f i g są różniczkowalne w sposób ciągły. Niech (x_0, y_0) będzie punktem stacjonarnym. Zgodnie z twierdzeniem Taylora:

$$f(x, y) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(x - x_0, y - y_0),$$

$$g(x, y) = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x - x_0, y - y_0),$$

gdzie, dla $i = 1, 2$ mamy

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_i(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Układ (7.1) możemy zapisać w postaci równoważnej, tzw. postaci zlinearyzowanej

$$x' = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_1(x - x_0, y - y_0),$$

$$y' = g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R_2(x - x_0, y - y_0).$$

Zauważmy, że macierzą współczynników układu liniowego skojarzonego z ostatnim układem równań jest jacobian

$$J((x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Z poprzednich rezultatów wynika natychmiast następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2. *Załóżmy, że funkcje f i g są klasy C^1 . Załóżmy ponadto, że (x_0, y_0) jest punktem stacjonarnym układu (7.1).*

Jeśli części rzeczywiste wartości własnych macierzy $J((x_0, y_0))$ są ujemne, to (x_0, y_0) jest punktem asymptotycznie stabilnym. Jeśli co najmniej jedna wartość własna ma część rzeczywistą dodatnią, to punkt (x_0, y_0) jest niestabilny.

7.4. Cykle graniczne

Przykład 7.3. Rozważmy układ

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad y' = x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Postać równań sugeruje przejście na współrzędne biegunowe. Wykorzystując równania wyjściowe oraz związki

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x},$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{dt} &= r \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) = r \left(\frac{x}{r} \frac{dx}{dt} + \frac{y}{r} \frac{dy}{dt} \right) = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \\ &= x(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + y(x + y(1 - x^2 - y^2)) \\ &= (x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = r^2(1 - r^2) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\vartheta}{dt} &= r^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) = r^2 \left(\frac{-y}{r^2} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{r^2} \frac{dy}{dt} \right) = -y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \\ &= -y(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + x(x + y(1 - x^2 - y^2)) = (x^2 + y^2) = r^2. \end{aligned}$$

W konsekwencji zadany układ równań we współrzędnych biegunowych ma postać

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 1.$$

Rozwiązując ostatnie równania z warunkami początkowymi $r(0) = r_0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$, otrzymamy

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}, \quad \vartheta(t) = t + \vartheta_0.$$

Wracając do współrzędnych wyjściowych, mamy

$$x(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}} \cos(t + \vartheta_0), \quad y(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}} \sin(t + \vartheta_0).$$

Dla $r_0 = 1$ trajektorią rozwiązania jest koło jednostkowe

$$x = \cos(t + \vartheta_0), \quad y = \sin(t + \vartheta_0).$$

Dla $r_0 < 1$ rozwiązanie leży w kole jednostkowym i ponieważ $r(t) \rightarrow 1$ gdy $t \rightarrow +\infty$, nawija się spiralnie na okrąg jednostkowy. Dla $r_0 > 1$ rozwiązanie leży na zewnątrz koła jednostkowego i również nawija się spiralnie na to koło, gdyż znowu $r(t) \rightarrow 1$, gdy $t \rightarrow +\infty$. Rozwiązanie odpowiadające wartości $r_0 = 1$ nazywamy *cyklem granicznym*.

Twierdzenie 7.3 (Poincaré–Bendixon). Załóżmy, że funkcje f i g są klasy C^1 . Przypuśćmy, że rozwiązanie układu (7.1) pozostaje w obszarze ograniczonym, który

nie zawiera punktów krytycznych. Wówczas albo jest to rozwiązanie okresowe, albo nawija się spiralnie na rozwiązanie okresowe.

Dowód twierdzenia Poincaré'go–Bendixona pominiemy. Podamy natomiast przykład jego zastosowania.

Przykład 7.4. Rozważmy układ równań

$$x' = y, \quad y' = -x + y(1 - x^2 - y^2).$$

Zauważmy, że $(0, 0)$ jest jedynym punktem stacjonarnym tego układu. Ponieważ $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2y^2(1 - x^2 - y^2)$, wyrażenie $x^2 + y^2$ rośnie, gdy $x^2 + y^2 < 1$, maleje gdy $x^2 + y^2 > 1$, ponadto nie może pozostać na żadnym kole o promieniu różnym od 1. Wnosimy stąd, że rozwiązanie startujące z punktu różnego od początku układu nawija się na koło jednostkowe $x^2 + y^2 = 1$. Koło to jest trajektorią rozwiązania okresowego.

Przykład 7.5. Rozważmy równanie

$$u'' + (2u^2 + 3u'^2 - 1)u' + u = 0.$$

Przyjmując $x = u$, $y = u'$, równanie to możemy zamienić na równoważny układ równań

$$x' = y, \quad y' = -x + (1 - 2x^2 - 3y^2)y.$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2xy + 2y(-x + y(1 - 2x^2 - 3y^2)) = 2y^2(1 - 2x^2 - 3y^2).$$

Zauważmy dalej, że jeśli $x^2 + y^2 < 1/3$ to $1 - 2x^2 - 3y^2 > 0$. Stąd i poprzedniego wzoru wnioskujemy, że wyrażenie $x^2 + y^2$ rośnie. Jeśli $x^2 + y^2 > 1/2$ to $1 - 2x^2 - 3y^2 < 0$. W konsekwencji wyrażenie $x^2 + y^2$ maleje. Wnosimy stąd, że rozwiązanie startujące z punktu leżącego w obszarze $1/3 < x^2 + y^2 < 1/2$ pozostaje w tym obszarze. Na mocy twierdzenia Poincaré'go–Bendixona albo jest to rozwiązanie okresowe, albo nawija się spiralnie na rozwiązanie okresowe.

Twierdzenie 7.4 (Bendixon). Załóżmy, że funkcje f i g są klasy C^1 w obszarze U i ponadto wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ jest stale dodatnie lub stale ujemne w tym obszarze. Wówczas układ (7.1) nie ma domkniętych trajektorii w zbiorze U .

Dowód. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że układ (7.1) ma rozwiązanie okresowe o okresie T , którego trajektorią jest krzywa zamknięta Γ : $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, T]$, zawarta w U . Oczywiście

$$\int_{\Gamma} f(x, y)dy - g(x, y)dx = \int_0^T [f(x(t), y(t))y'(t) - g(x(t), y(t))x'(t)]dt = 0.$$

Z drugiej strony, na mocy twierdzenia Greena

$$\int_{\Gamma} f(x, y)dy - g(x, y)dx = \iint_D \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right] dx dy,$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym przez krzywą Γ .

Ponieważ na mocy założeń prawa strona ostatniej równości jest różna od zera, dostajemy sprzeczność, która kończy dowód.

7.5. Zadania

1. Określić rodzaj stabilności punktu stacjonarnego $(0, 0)$ dla układu:

- a) $x' = -2x + y, \quad y' = -5x - 6y$;
- b) $x' = 2y - x, \quad y' = x$;
- c) $x' = -7x + y, \quad y' = 3x - 4y$.

2. Znaleźć punkty stacjonarne oraz określić rodzaj stabilności w tych punktach:

- a) $x' = x + 4y, \quad y' = x + y - x^2$;
- b) $x' = x - y + x^2 + y^2, \quad y' = 12x - 6y$;
- c) $x' = 8x - y^2, \quad y' = y - x^2$.

3. Rozważmy równanie Van der Pola

$$x'' + \alpha(x - 1)x' + x = 0.$$

Podstawiając $u = x, v = u'$ otrzymamy równoważny układ równań $u' = v, v' = -u + \alpha v - \alpha uv$. Pokazać, że $(0, 0)$ jest jedynym punktem stacjonarnym tego układu. Zbadać charakter punktu stacjonarnego w zależności od wielkości α .

4. Podać rodzaj stabilności punktu $(0, 0)$ dla układu:

- a) $x' = (1/2)x - y + xy^2, \quad y' = y + xy$;
- b) $x' = -x + y + y \sin^2 x, \quad y' = x - y - x \sin^2 y$;
- c) $x' = 2y - x + xy^2, \quad y' = x + y - \sin^2 x$.

5. Podać rodzaj stabilności punktu $(0, 0, 0)$ dla układu:

- a) $x' = 2x + y - z + z^2, \quad y' = x + 3y - z^3, \quad z' = 2z + x^2$;
- b) $x' = \ln(1 - z), \quad y' = \ln(1 + y + z), \quad z' = \ln(1 + x - yz)$.
- c) $x' = y - x - 1 + \cos(x + y + z), \quad y' = \sin(x + z), \quad z' = 1 - e^{y+z}$.

6. Rozważmy układ równań

$$x' = y + xf(r)/r, \quad y' = -x + yf(r)/r,$$

gdzie $r = x^2 + y^2$. Pokazać, że zerom funkcji f odpowiadają rozwiązania cykliczne. (Wskazówka: Po przejściu na współrzędne biegunowe otrzymamy układ $\frac{dr}{dt} = f(r), \frac{d\theta}{dt} = -1$. Niech $r_0 < r_1 < \dots$ będą zerami funkcji f . Jeśli $f(r) < 0$ dla $0 < r < r_0$, wówczas $\frac{dr}{dt} < 0$, w konsekwencji rozwiązanie nawija się spiralnie na początek układu. Jeśli $f(r) > 0$ dla $0 < r < r_0$, rozwiązanie nawija się spiralnie na okrąg o promieniu r_0 . Podobną analizę możemy przeprowadzić dla dowolnego przedziału (r_{i-1}, r_i)).

7. Wyznaczyć cykl graniczny układu równań:

$$x' = -y + \frac{x(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y' = x + \frac{y(x^2 + y^2 - 9)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(Wskazówka: Po przejściu na współrzędne biegunowe otrzymamy układ $\frac{dr}{dt} = r^2 - 4$,

$\frac{d\vartheta}{dt} = 1$. Rozwiązując te równania z warunkami $r(0) = r_0$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$, otrzymamy rozwiązania: $r(t) = 2((r_0 + 2)e^{-4t} + r_0 - 2)/((r_0 + 2)e^{-4t} + 2 - r_0)$, $\vartheta(t) = t + \vartheta_0$. Dla $r_0 = 2$ trajektorią jest koło $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$. Dla $r_0 < 2$ rozwiązanie pozostaje w kole i nawija się spiralnie na rozwiązanie okresowe. Dla $r_0 > 2$ rozwiązanie ucieka po spirali do nieskończoności przy $t \rightarrow \frac{1}{4} \ln \frac{r_0 + 2}{r_0 - 2}$.

8. Wykorzystując twierdzenie Poincaré'go–Bendixsona wykazać istnienie rozwiązania okresowego układu równań

$$x' = x - y - x(x^2 + y^2), \quad y' = x + y - y(x^2 + y^2).$$

(Wskazówka: Zauważmy, że $\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$. Zatem, jeśli $x^2 + y^2 < 1$ wyrażenie $x^2 + y^2$ rośnie, jeśli $x^2 + y^2 > 1$ wyrażenie $x^2 + y^2$ maleje. Wynika stąd, że rozwiązanie startujące ze zbioru $1/r < x^2 + y^2 < r$ ($r > 1$) pozostaje w tym zbiorze. Na mocy twierdzenia Poincaré'go–Bendixsona w zbiorze tym istnieje rozwiązanie okresowe, na które nawijają się pozostałe rozwiązania. Postępując jak w przykładzie 7.3, znaleźć to rozwiązanie.)

9. Zbadać istnienie cyklu granicznego dla układu równań:

a) $x' = -y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad y' = x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

b) $x' = -y - x(x^2 + y^2 - 4)^2, \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 4)^2.$

c) $x' = -y, \quad y' = x + y(x^2 + y^2 - 1).$

d) $x' = -y - x(x^2 + y^2 - 4), \quad y' = x - y(x^2 + y^2 - 4).$

Rozdział 8

Problemy brzegowe dla równania drugiego rzędu

8.1. Wprowadzenie do liniowych problemów brzegowych

Rozważmy równanie

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = f(t), \quad (8.1)$$

gdzie a_0, a_1, a_2 i f są zadanymi funkcjami ciągłymi w przedziale $[t_1, t_2]$. Szukamy rozwiązania x określonego w przedziale $[t_1, t_2]$ i spełniającego warunki brzegowe

$$l_1(x) = \gamma_1, \quad l_2(x) = \gamma_2, \quad (8.2)$$

gdzie

$$l_1(x) = \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) + \alpha_3 x(t_2) + \alpha_4 x'(t_2),$$

$$l_2(x) = \beta_1 x(t_1) + \beta_2 x'(t_1) + \beta_3 x(t_2) + \beta_4 x'(t_2),$$

a $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \dots, \alpha_4, \beta_1, \dots, \beta_4$ są liczbami rzeczywistymi.

Jeśli $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, problem brzegowy

$$l_1(x) = 0, \quad l_2(x) = 0, \quad (8.3)$$

nazywamy *jednorodnym*. Jeśli γ_1, γ_2 nie zerują się równocześnie, czyli $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$, problem brzegowy (8.2) nazywamy *niejednorodnym*.

Zauważmy, że operatory l_1, l_2 są operatorami liniowymi (funkcjonałami liniowymi) działającymi na przestrzeni funkcji określonych na przedziale $[t_1, t_2]$. Wartościami tych operatorów są liczby rzeczywiste.

Klasyczne przykłady problemów brzegowych:

Problem Dirichleta:

$$x(t_1) = \gamma_1, \quad x(t_2) = \gamma_2.$$

Problem mieszany:

$$x(t_1) = \gamma_1, \quad x'(t_2) = \gamma_2 \quad \text{lub} \quad x'(t_1) = \gamma_1, \quad x(t_2) = \gamma_2$$

Problem periodyczny:

$$x(t_1) = x(t_2), \quad x'(t_1) = x'(t_2).$$

Warto zaznaczyć, iż poza nielicznymi przypadkami nie mamy metod, które pozwalają wyznaczyć bezpośrednio całki równania (8.1).

Rozważmy równanie jednorodne skojarzone z równaniem (8.1)

$$a_0(t)x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0. \quad (8.4)$$

Wiadomo, że jeśli funkcje $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (8.4), to cała ogólna tego równania ma postać

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t). \quad (8.5)$$

Uwaga 8.1. Niech φ_1 i φ_2 będą liniowo niezależnymi całkami równania (8.4). Wówczas jednorodny problem brzegowy (8.4), (8.3) posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1(\varphi_1) & l_1(\varphi_2) \\ l_2(\varphi_1) & l_2(\varphi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Istotnie, podstawiając do jednorodnych warunków brzegowych (8.3) całkę ogólną równania (8.4), otrzymamy

$$C_1l_1(\varphi_1) + C_2l_1(\varphi_2) = 0,$$

$$C_1l_2(\varphi_1) + C_2l_2(\varphi_2) = 0.$$

Jeśli $\Delta \neq 0$, na mocy twierdzenia Cramera ostatni układ ma względem C_1, C_2 wyłącznie rozwiązanie zerowe.

Uwaga 8.2. Niejednorodny problem brzegowy (8.1), (8.2) ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy problem jednorodny (8.4), (8.3) posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe.

Istotnie, niech φ_1 i φ_2 będą całkami równania (8.4), φ_0 całką równania (8.1). Całka ogólna równania (8.1) ma postać

$$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \varphi_0(t).$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (8.2) otrzymamy układ równań

$$C_1l_1(\varphi_1) + C_2l_1(\varphi_2) + l_1(\varphi_0) = \gamma_1,$$

$$C_1l_2(\varphi_1) + C_2l_2(\varphi_2) + l_2(\varphi_0) = \gamma_2.$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, jeśli $\Delta \neq 0$, skąd i uwagi 8.1 teza uwagi 8.2 wynika natychmiast.

Problem brzegowy nazywamy *regularnym*, jeśli przedział $[t_1, t_2]$ jest skończony oraz $a_0(t) \neq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$. Jeśli przedział jest nieskończony, lub funkcja a_0 przyjmuje wartości zerowe, problem brzegowy nazywamy *singularnym*.

Jeśli współczynniki równania (8.1) zależą od parametru λ , to wartości parametru λ , dla których zadany problem brzegowy posiada niezerowe rozwiązanie, nazywamy *wartościami własnymi*. Zbiór wszystkich wartości własnych nazywamy *spektrum*. Problem (8.1), (8.2), w przypadku gdy współczynniki równania (8.1) zależą od

parametru λ , nazywamy *problemem Sturma–Liouville’a*. Poniżej podamy przykłady takich problemów, natomiast w następnym podrozdziale pokażemy pewne proste własności rozwiązań *regularnego zagadnienia Sturma–Liouville’a*.

Przykład 8.1. Rozważmy problem

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Jeśli $\lambda = 0$, rozwiązanie ogólne rozważanego równania ma postać $x(t) = C_1 + C_2 t$. Warunek brzegowy jest spełniony wyłącznie przez rozwiązanie zerowe. Zatem 0 nie jest wartością własną.

Jeśli $\lambda < 0$, wówczas rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}$. Jedynym rozwiązaniem spełniającym warunki brzegowe jest rozwiązanie zerowe. A więc żadna z liczb ujemnych nie jest wartością własną.

Jeśli $\lambda > 0$, rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}t + C_2 \cos \sqrt{\lambda}t.$$

Z warunków brzegowych wynika, że

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Stąd

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi,$$

a więc

$$\lambda = n^2.$$

Wartościami własnymi są liczby $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, a funkcje $x_n = \sin nt$, odpowiadającymi im funkcjami własnymi.

Przykład 8.2. Rozważmy problem

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) + x'(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

Jeśli $\lambda = 0$, rozwiązanie ogólne rozważanego równania ma postać $x(t) = C_1 + C_2 t$. Warunki brzegowe są spełnione, jeśli $C_1 + C_2 = 0$, czyli $C_2 = -C_1$. Liczba $\lambda = 0$ jest zatem wartością własną, a $x = 1 - t$ odpowiadającą jej funkcją własną.

Jeśli $\lambda < 0$, rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}t} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}t}$, a warunki brzegowe są spełnione wyłącznie przez rozwiązanie zerowe. Oznacza to, że żadna z liczb ujemnych nie jest wartością własną.

Założmy teraz, że $\lambda > 0$. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}t + C_2 \cos \sqrt{\lambda}t.$$

Podstawiając do warunków brzegowych, otrzymamy układ równań

$$\sqrt{\lambda}C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda} = 0.$$

Układ ten ma rozwiązanie niezerowe, gdy

$$\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}.$$

Ostatnie równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań: λ_n , $n = 1, 2, \dots$, przy czym $n\pi < \lambda_n < (2n+1)\pi/2$ dla $n = 1, 2, \dots$. Nietrudno sprawdzić, że funkcjami własnymi są funkcje: $\varphi_n(t) = \sin(\sqrt{\lambda_n}(1-t))$, gdzie $n = 1, 2, \dots$.

Przykład 8.3. Rozważmy problem

$$x'' + \lambda^2 x = 0, \quad x(0) = x(\pi), \quad x'(0) = x'(\pi).$$

Jeśli $\lambda = 0$, rozwiązanie ogólne ma postać $x(t) = C_1 + C_2 t$. Warunki brzegowe są spełnione, jeśli $C_1 = C_1 + C_2 \pi$, $C_2 = C_2$. Stąd $C_2 = 0$, a C_1 może przyjmować wartość dowolną. Liczba $\lambda = 0$ jest wartością własną, a $x = 1$ odpowiadającą jej funkcją własną.

Jeśli $\lambda \neq 0$, pierwiastkami równania charakterystycznego są liczby λi oraz $-\lambda i$, a rozwiązanie ogólne ma postać

$$x(t) = C_1 \sin(\lambda t) + C_2 \cos(\lambda t).$$

Podstawiając to rozwiązanie do warunków brzegowych, otrzymamy

$$\sin(\lambda\pi) C_1 - (1 - \cos(\lambda\pi)) C_2 = 0,$$

$$\lambda(1 - \cos(\lambda\pi)) C_1 + \lambda \sin(\lambda\pi) C_2 = 0.$$

Ostatni układ posiada rozwiązanie niezerowe, jeśli

$$\begin{vmatrix} \sin(\lambda\pi) & -(1 - \cos(\lambda\pi)) \\ \lambda(1 - \cos(\lambda\pi)) & \lambda \sin(\lambda\pi) \end{vmatrix} = 2\lambda(1 - \cos(\lambda\pi)) = 0.$$

Rozwiązując równanie

$$2\lambda(1 - \cos(\lambda\pi)) = 0$$

otrzymamy wartości własne $\lambda_n = 2n$ dla $n = 1, \dots$, przy czym wartości własnej λ_n odpowiadają funkcje własne $x_{n1}(t) = \cos 2nt$ oraz $x_{n2}(t) = \sin 2nt$.

8.2. Regularne zagadnienie Sturma–Liouville’a

Rozważmy równanie (8.1) w przypadku gdy $a_1(t) = a_0'(t)$, $a_2(t) = q(t) + \lambda r(t)$, gdzie q i r są zadanymi funkcjami, λ parametrem, a $f(t) \equiv 0$. Przyjmując $a_0(t) = p(t)$ równanie (8.1), możemy wówczas zapisać w postaci

$$(p(t)x')' + (q(t) + \lambda r(t))x = 0. \quad (8.6)$$

Szukamy rozwiązania spełniającego jednorodne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) &= 0, \\ \beta_1 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) &= 0, \end{aligned} \quad (8.7)$$

lub niejednorodne warunki brzegowe

$$\begin{aligned} \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) &= \gamma_1, \\ \beta_1 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) &= \gamma_2, \end{aligned} \quad (8.8)$$

gdzie wielkości α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 są zadanymi liczbami rzeczywistymi.

Problem (8.6), (8.7) nazywamy *jednorodnym regularnym zagadnieniem Sturma–Liouville’a*, a problem (8.6), (8.8) *niejednorodnym regularnym zagadnieniem Sturma–Liouville’a*.

Jeśli φ_1 i φ_2 są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania (8.6), to – zgodnie z wynikami rozdziału 3 – całka ogólna równania (8.6) ma postać

$$x(t, \lambda) = C_1 \varphi_1(t, \lambda) + C_2 \varphi_2(t, \lambda). \quad (8.9)$$

Podstawiając (8.9) do warunków (8.8) (lub (8.7)), otrzymamy na wyznaczenie stałych C_1 i C_2 układ równań

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \varphi_1(t_1, \lambda) + \alpha_2 \varphi_1'(t_1, \lambda)) C_1 + (\alpha_1 \varphi_2(t_1, \lambda) + \alpha_2 \varphi_2'(t_1, \lambda)) C_2 &= \gamma_1, \\ (\beta_1 \varphi_1(t_2, \lambda) + \beta_2 \varphi_1'(t_2, \lambda)) C_1 + (\beta_1 \varphi_2(t_2, \lambda) + \beta_2 \varphi_2'(t_2, \lambda)) C_2 &= \gamma_2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Oznaczmy przez $D(\lambda)$ wyznacznik współczynników układu (8.10), tzn.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_1 \varphi_1(t_1, \lambda) + \alpha_2 \varphi_1'(t_1, \lambda) & \alpha_1 \varphi_2(t_1, \lambda) + \alpha_2 \varphi_2'(t_1, \lambda) \\ \beta_1 \varphi_1(t_2, \lambda) + \beta_2 \varphi_1'(t_2, \lambda) & \beta_1 \varphi_2(t_2, \lambda) + \beta_2 \varphi_2'(t_2, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Rozważmy w pierwszym przypadku, gdy $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, tzn. przypadek jednorodnych warunków brzegowych. Jeśli $D(\lambda) \neq 0$, układ (8.10), a w konsekwencji problem (8.6), (8.7), posiada wyłącznie rozwiązanie zerowe. Jeśli $D(\lambda) = 0$, układ (8.10), a zatem problem (8.6), (8.7), ma nieskończenie wiele rozwiązań. Wartości λ , dla których $D(\lambda) = 0$, nazywają się *wartościami własnymi*.

Rozważmy teraz przypadek, gdy układ (8.10) jest niejednorodny, co oznacza, że $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$. Jeśli $D(\lambda) \neq 0$, układ (8.10), a zatem problem (8.6), (8.8), ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jeśli $D(\lambda) = 0$, układ (8.10), a zatem problem (8.6), (8.8), może nie mieć rozwiązania albo też mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Twierdzenie 8.1. *Niech λ będzie wartością własną problemu (8.6), (8.7), a φ_1, φ_2 rozwiązaniami odpowiadającymi wartości własnej λ . Wówczas funkcje φ_1, φ_2 są liniowo zależne.*

Dowód. Pierwszy z warunków (8.7) daje równości:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi_1(t_1) + \alpha_2 \varphi_1'(t_1) &= 0, \\ \alpha_1 \varphi_2(t_1) + \alpha_2 \varphi_2'(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ przynajmniej jeden ze współczynników α_1, α_2 jest różny od zera, z twierdzenia Cramera wynika, że

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_1'(t_1) \\ \varphi_2(t_1) & \varphi_2'(t_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Na mocy twierdzenia Liouville’a (twierdzenie 3.1) i wynikających z niego konsekwencji (zob. uwagę 3.5 oraz twierdzenie 3.3) funkcje φ_1 oraz φ_2 są liniowo zależne.

Niech $p : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną, $q : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją ciągłą, $x : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją dwukrotnie różniczkowalną. Niech $\mathcal{P}$ będzie operatorem danym wzorem

$$\mathcal{P}(x)(t) = (p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = p(t)x''(t) + p'(t)x'(t) + q(t)x(t). \quad (8.11)$$

Oczywiście operator $\mathcal{P}$ działa na przestrzeni funkcji dwukrotnie różniczkowalnych w przedziale $[\alpha, \beta]$.

Przyjmując oznaczenie $\mathcal{P}$, równanie (8.6) możemy zapisać w postaci

$$\mathcal{P}(x) + \lambda r x = 0.$$

Lemat 8.1. *Niech $x, y : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi. Wówczas*

$$\int_{t_1}^{t_2} (y\mathcal{P}(x) - x\mathcal{P}(y)) dt = p(t)(x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} y\mathcal{P}(x) - x\mathcal{P}(y) &= y(px'' + p'x' + qx) - x(py'' + p'y' + qy) \\ &= p(x''y - xy'') + p'(x'y - xy') = \frac{d}{dt}(p(x'y - xy')). \end{aligned}$$

Całkując ostatnią równość w przedziale $[t_1, t_2]$, otrzymamy żadaną równość.

Twierdzenie 8.2. *Założmy, że p jest funkcją różniczkowalną, a q funkcją ciągłą w przedziale $[t_1, t_2]$. Założmy ponadto, że $r(t) > 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$, będą wartościami własnymi problemu (8.6), (8.7), a φ_1, φ_2 odpowiadającymi im funkcjami własnymi. Wówczas*

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0. \quad (8.12)$$

Ponadto φ_1, φ_2 są liniowo niezależne.

Dowód. Ponieważ φ_1, φ_2 są rozwiązaniami równania (8.6), zatem

$$\mathcal{P}(\varphi_1) + \lambda_1 r \varphi_1 = 0, \quad \mathcal{P}(\varphi_2) + \lambda_2 r \varphi_2 = 0.$$

Uwzględniając ostatnie równości, łatwo sprawdzić, że

$$\varphi_2 \mathcal{P}(\varphi_1) - \varphi_1 \mathcal{P}(\varphi_2) = (\lambda_2 - \lambda_1) r \varphi_1 \varphi_2.$$

Całkując ostatnią równość w przedziale $[t_1, t_2]$ i uwzględniając lemat 8.1, otrzymamy

$$\begin{aligned} (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{t_1}^{t_2} r \varphi_1 \varphi_2 dt &= \int_{t_1}^{t_2} [\varphi_2 \mathcal{P}(\varphi_1) - \varphi_1 \mathcal{P}(\varphi_2)] dt \\ &= p(t)(\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t)) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Ponieważ funkcje φ_1, φ_2 spełniają jednorodne warunki brzegowe (8.7), zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varphi_1(t_1) + \alpha_2 \varphi_1'(t_1) &= 0, & \text{oraz} & & \beta_1 \varphi_1(t_2) + \beta_2 \varphi_1'(t_2) &= 0, \\ \alpha_1 \varphi_2(t_1) + \alpha_2 \varphi_2'(t_1) &= 0, & & & \beta_1 \varphi_2(t_2) + \beta_2 \varphi_2'(t_2) &= 0. \end{aligned}$$

Z faktu, że co najmniej jeden ze współczynników α_1, α_2 (względnie β_1, β_2) jest różny od zera, na mocy twierdzenia Cramera mamy

$$\varphi_1(t_1)\varphi_2'(t_1) - \varphi_1'(t_1)\varphi_2(t_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi_1(t_2)\varphi_2'(t_2) - \varphi_1'(t_2)\varphi_2(t_2) = 0.$$

Uwzględniając ostatnie równości w (8.13), otrzymamy (8.12).

Przypuśćmy, że $\varphi_2 = c\varphi_1$, $c \neq 0$. Z warunku (8.12) wynika, że

$$\int_{t_1}^{t_2} cr(t)\varphi_1^2 dt = 0.$$

Stąd wnosimy, że $\varphi_1 = 0$, a w konsekwencji $\varphi_2 = 0$. Zatem funkcje φ_1, φ_2 są liniowo niezależne, co kończy dowód.

W języku analizy funkcjonalnej warunek (8.12) oznacza, że funkcje φ_1, φ_2 są ortogonalne z wagą r .

Twierdzenie 8.3. *Dla regularnego problemu Sturma–Liouville’a (8.6), (8.7) gdzie $r(t) > 0$, wartości własne są rzeczywiste.*

Dowód. Przypuśćmy, dla dowodu nie wprost, że wartość własna jest liczbą zespoloną, czyli $\lambda = a + ib$. Niech $\varphi(t) = \mu(t) + i\nu(t)$ będzie odpowiadającą jej funkcją własną. Ponieważ φ jest rozwiązaniem równania (8.6)

$$\mathcal{P}(\varphi) + \lambda r\varphi = 0,$$

lub

$$\mathcal{P}(\mu + i\nu)(t) + (a + ib)r(t)(\mu(t) + i\nu(t)) = 0.$$

Ostatnią równość możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\mathcal{P}(\mu) + (a\mu - b\nu)r + i(\mathcal{P}(\nu) + (a\nu + b\mu)r) = 0.$$

Liczba zespolona jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jej część rzeczywista i urojona jest równa zeru. Stąd

$$\mathcal{P}(\mu) + (a\mu - b\nu)r = 0, \quad \mathcal{P}(\nu) + (a\nu + b\mu)r = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\nu\mathcal{P}(\mu) - \mu\mathcal{P}(\nu) = br(\mu^2 + \nu^2).$$

Całkując ostatnią równość w przedziale $[t_1, t_2]$ i wykorzystując lemat 8.1, otrzymamy

$$b \int_{t_1}^{t_2} (\mu^2 + \nu^2)r dt = \int_{t_1}^{t_2} [\nu\mathcal{P}(\mu) - \mu\mathcal{P}(\nu)] dt = p(\mu'\nu - \mu\nu') \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (8.14)$$

Funkcja φ spełnia warunki brzegowe (8.7), a zatem zarówno jej część rzeczywista jak i urojona spełniają te warunki, czyli

$$\begin{aligned} \alpha_1\mu(t_1) + \alpha_2\mu'(t_1) &= 0, & \alpha_1\mu(t_2) + \alpha_2\mu'(t_2) &= 0, \\ \alpha_1\nu(t_1) + \alpha_2\nu'(t_1) &= 0 & \text{oraz} & \alpha_1\nu(t_2) + \alpha_2\nu'(t_2) = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ α_1 i α_2 nie zerują się równocześnie, z twierdzenia Cramera wynika, że

$$\mu(t_1)\nu'(t_1) - \mu'(t_1)\nu(t_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \mu(t_2)\nu'(t_2) - \mu'(t_2)\nu(t_2) = 0.$$

Na mocy ostatnich równości wnosimy, że prawa strona wzoru (8.14) jest równa zeru.

Ponieważ $x^2(t) + y^2(t) > 0$ wynika stąd, że $b = 0$, co należało pokazać.

8.3. Zadania

1. Znaleźć rozwiązanie problemu:

- a) $x'' + x = 0$, $x(0) + x'(0) = 2$, $x(1) + 3x'(1) = 4$;
 b) $x'' - 6x' + 25x = 0$, $x'(0) = 1$, $x(\pi/4) = 0$.

2. Znaleźć rozwiązanie periodycznego problemu brzegowego:

- a) $x'' + \pi x = 0$, $x(-1) = x(1)$, $x'(-1) = x'(1)$;
 b) $x'' - x = 0$, $x(0) = x(\pi/2)$, $x'(0) = x'(\pi/2)$.

3. Pokazać, że problem brzegowy

$$x'' = 0, \quad \alpha_1 x(t_1) + \alpha_2 x'(t_1) = c_1, \quad \beta_1 x(t_2) + \beta_2 x'(t_2) = c_2$$

ma wyłącznie rozwiązanie zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta = \alpha_1 \beta_1 (t_2 - t_1) + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

4. Znaleźć wartości własne i funkcje własne dla problemu:

$$x'' + \lambda x = 0$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

- a) $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$;
 b) $x'(0) = 0$, $x'(1) = 0$;
 c) $x(0) = 0$, $x(1) + x'(1) = 0$;
 d) $x(0) - x'(0) = 0$, $x'(1) = 0$;
 e) $x(0) - x'(0) = 0$, $x(1) + x'(1) = 0$.

5. Znaleźć wartości własne i funkcje własne dla problemu:

- a) $x'' + \lambda x = 0$, $x(0) = 0$, $x(\pi/2) = 0$;
 b) $x'' + (1 + \lambda)x = 0$, $x(0) = x(\pi) = 0$;
 c) $x'' + 2x' + (1 + \lambda)x = 0$, $x(0) = x(2) = 0$;
 d) $(t^2 x')' + \lambda x/t^2 = 0$, $x(0) = x(1) = 0$.

6. Pokazać, że funkcje własne problemu periodycznego

$$x'' + (\lambda + 16a)x = 0, \quad x(0) = x(\pi), \quad x'(0) = x'(\pi).$$

są ortogonalne. (*Wskazówka: Przyjąć $\mathcal{P}(x) = (x')' + 16ax$, a następnie powtórzyć argumenty twierdzenia 8.2).*)

7. Pokazać, że problem

$$x'' - 4\lambda x' + 4\lambda^2 x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0,$$

gdzie $\lambda > 0$, ma tylko jedną wartość własną i wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję własną.

Rozdział 9

Całki pierwsze układu równań

9.1. Całki pierwsze układu równań

Rozważmy układ równań

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{9.1}$$

gdzie $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ ($U \subset \mathbb{R}^{n+1}$) są funkcjami ciągłymi.

Niech

$$x_1 = \varphi_1(t, C_1, \dots, C_n), \dots, \quad x_n = \varphi_n(t, C_1, \dots, C_n),\tag{9.2}$$

będzie całką ogólną układu (9.1). Przypuśćmy, że z układu (9.2) potrafimy wyznaczyć $C_1, \dots, C_n$, czyli

$$C_1 = g_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \quad C_n = g_n(t, x_1, \dots, x_n).\tag{9.3}$$

Ponieważ ustalonemu zestawowi stałych odpowiada konkretne rozwiązanie układu (9.1), wzdłuż ustalonego rozwiązania $x_1(t), \dots, x_n(t)$ układu równań (9.1) funkcje $g_1, \dots, g_n$ są stałe. W świetle tej uwagi naturalna wydaje się poniższa definicja.

Definicja 9.1. Funkcję $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 nazywamy całką pierwszą układu równań (9.1), jeżeli dla dowolnego rozwiązania

$$x_1 = x_1(t), \dots, \quad x_n = x_n(t), \quad t \in I,$$

układu równań (9.1) mamy

$$g(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{const} \quad \text{dla} \quad t \in I,$$

tzn. funkcja g jest stała wzdłuż dowolnego rozwiązania układu równań (9.1).

Okazuje się, że znajomość całek pierwszych może być bardzo użyteczna (zob. następny rozdział). Ponieważ całka ogólna układu (9.1) zależy od n stałych, powstaje pytanie: czy znajomość n stosownie dobranych całek pierwszych układu równań (9.1) nie wystarcza do wyznaczenia klasy wszystkich całek pierwszych tego układu? Pozytywną odpowiedź na postawiony problem daje sformułowane poniżej twierdzenie 9.1. Wpierw sformułujemy kilka oczywistych własności całek pierwszych.

Uwaga 9.1. Niech $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 , a g całką pierwszą układu (9.1). Wówczas funkcja $h = F \circ g$, czyli

$$h = F(g(t, x_1, \dots, x_n))$$

jest również całką pierwszą układu (9.1).

Podobnie, jeśli funkcje $g_1, \dots, g_k$ są całkami pierwszymi układu (9.1), a funkcja $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^1 , to funkcja $h = F \circ (g_1, \dots, g_k)$, czyli

$$h = F(g_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(t, x_1, \dots, x_n))$$

jest również całką pierwszą układu (9.1).

Definicja 9.2. Funkcje $g_1, \dots, g_m \in C^1(\Omega)$ ($m \leq n$) nazywamy funkcjami niezależnymi w zbiorze U , jeśli dla dowolnego $(t, x_1, \dots, x_n) \in U$ rząd macierzy

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m(t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

wynosi m , tzn., że w każdym punkcie $(t, x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ wiersze tej macierzy są wektorami liniowo niezależnymi. W szczególności, jeśli $m = n$, oznacza to, że wyznacznik powyższej macierzy jest różny od zera.

Zauważmy, że jeśli $g_1, \dots, g_m$ są funkcjami niezależnymi w zbiorze U , to dla dowolnego $(t, x) \in U$ równość

$$\lambda_1 g_1(t, x) + \dots + \lambda_m g_m(t, x) = 0$$

zachodzi tylko wówczas, gdy $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0$.

Przypomnijmy, że punkt $(t_0, \overset{\circ}{x}) \in U$ nazywamy punktem równowagi (lub stacjonarnym) układu (9.1), jeśli prawe strony tego układu zerują się w tym punkcie, czyli $f_1(t_0, \overset{\circ}{x}) = f_2(t_0, \overset{\circ}{x}) = \dots = f_n(t_0, \overset{\circ}{x}) = 0$.

Twierdzenie 9.1. Załóżmy, że prawe strony $f_1, \dots, f_n$ układu równań (9.1) są funkcjami klasy C^1 w obszarze $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Załóżmy ponadto, że w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, \overset{\circ}{x}) = (t_0, \overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n) \in U$, niebędącym punktem równowagi układu (9.1), istnieje n całek pierwszych funkcyjnie niezależnych $g_1, \dots, g_n$ tego układu.

Jeśli g jest dowolną całką pierwszą układu (9.1), to istnieje funkcja F klasy C^1 taka, że w pewnym otoczeniu punktu $(t_0, \overset{\circ}{x})$ mamy

$$g(t, x_1, \dots, x_n) = F(g_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(t, x_1, \dots, x_n)). \quad (9.4)$$

Dowód. Dla $(t_0, x) \in U$ rozwiązanie φ układu (9.1) spełniające warunek $\varphi(t_0) = x$ oznaczmy symbolem $\varphi(\cdot; t_0, x)$. Oczywiście $\varphi(t_0; t_0, x) = x$. Rozpisując ostatnią równość we współrzędnych, otrzymamy

• • • • •

$$\varphi_n(t_0; t_0, x_1, \dots, x_n) = x_n.$$

Zauważmy, że

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1(t_0; t_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(t_0; t_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(t_0; t_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(t_0; t_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right| = 1.$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_1(t_0; t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(t_0; t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(t_0; t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(t_0; t, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{array} \right| \neq 0,$$

Przy przyjętych założeniach o funkcjach $f_1, \dots, f_n$, przez każdy punkt $(t, x) \in I \times V$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(\cdot; t, x)$ układu (9.1). Ponadto, jeśli $y = \varphi(s; t, x)$, to $x = \varphi(t; s, y)$, $s \in I$. Dla $(t, x) \in I \times V$ połóżmy $\tilde{x} = \varphi(t_0; t, x)$. Zgodnie z powyższymi obserwacjami wartość $\tilde{x}$ jest stała na każdej całości układu (9.1) (tzn. jeśli Γ jest wykresem całości układu (9.1), to $\varphi(t_0; t, x) = \text{const}$ dla dowolnego $(t, x) \in \Gamma$). Zatem dla dowolnego $s \in I$ mamy:

.....

$$\varphi(t_0; s, \varphi(s; t, x)) = \varphi_n(t_0; s, y) = \varphi_n(t_0; t, x) = \tilde{x}_n,$$

gdzie $y = \varphi(s; t, x)$.

Wynika stąd, że funkcje $\varphi_1(t_0; \cdot, \cdot), \dots, \varphi_n(t_0; \cdot, \cdot)$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu (9.1) na zbiorze $I \times V$. Połóżmy

$$g_i(s, x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(t_0; s, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Oczywiście $g_1, \dots, g_n$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu (9.1) na zbiorze $I \times V$. Niech $g : I \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną całką pierwszą układu (9.1). Ponieważ całki pierwsze są stałe wzdłuż dowolnego rozwiązania $x = x(s)$, $s \in I$, układu (9.1), różniczkując względem s równości:

$$g_1(s, x(s)) = 0, \dots, g_n(s, x(s)) = 0, \quad g(s, x(s)) = 0$$

Zgodnie z poprzednim twierdzeniem, w otoczeniu dowolnego punktu niebędącego punktem równowagi, układ ten posiada $n-1$ funkcyjnie niezależnych całek pierwszych

$$g_1 = g_1(x_1, \dots, x_{n-1}, s), \quad \dots, \quad g_{n-1} = g_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, s).$$

Ponadto, jeśli g jest całką pierwszą w tym otoczeniu, to $g = F \circ (g_1, \dots, g_{n-1})$, gdzie F jest stosownie dobraną funkcją klasy C^1 .

Uwaga 9.2. *Jeśli (9.1) jest układem autonomicznym, to znaczy niezależnym od zmiennej t i ponadto $f_1 \neq 0$, to układ ten można sprowadzić do równoważnego układu $n-1$ równań*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n}{f_1}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 9.1, aby znaleźć wszystkie całki pierwsze tego układu, wystarczy znać $n-1$ całek pierwszych funkcyjnie niezależnych.

Rozdział 10

Metoda charakterystyk dla równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu

10.1. Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

Równanie różniczkowe cząstkowe to równanie, w którym występuje niewiadoma funkcja dwóch lub więcej zmiennych oraz jej pochodne cząstkowe. Rzędem równania nazywamy najwyższy rząd pochodnej. I tak równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu nazywamy zależność

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (10.1)$$

gdzie $(x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$, $F : U \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją, a u szukaną funkcją zmiennych $x_1, \dots, x_n$.

Funkcje $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ posiadającą pochodne cząstkowe względem zmiennych $x_1, \dots, x_n$ w obszarze U taką, że

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n), \varphi_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{x_n}(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

dla $(x_1, \dots, x_n) \in U$, nazywamy rozwiązaniem równania różniczkowego (10.1) określonym w zbiorze U .

Przykładem równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu jest zależność

$$xu_x + yu_y = u.$$

Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że funkcja

$$u(x, y) = xF(y/x),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, jest rozwiązaniem naszego równania. Tak więc w przypadku równania różniczkowego zwyczajnego całka ogólna zależy od rodziny stałych, a w przypadku równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu całka ogólna zależy od rodziny funkcji.

W rozdziale tym omówimy rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu metodą charakterystyk. Metoda ta polega na sprowadzeniu rozwiązania równania różniczkowego cząstkowego do rozwiązania układu równań różniczkowych zwyczajnych, tak zwanych równań charakterystyk. W tym celu znajduje się rozwiązanie równania wyjściowego wzdłuż pewnych krzywych, a następnie pokazuje się, że powierzchnia utworzona w stosowny sposób z tak skonstruowanych krzywych (tzw. charakterystyk) jest rozwiązaniem równania wyjściowego. Znalezienie rozwiązania równania cząstkowego wzdłuż stosownie dobranych krzywych sprowadza się do rozwiązania układu równań zwyczajnych (równań charakterystyk).

Wpierw sformułujemy idee tej metody na prostym przykładzie równania liniowego o stałych współczynnikach, następnie rozwinie ją dla przypadku równań liniowych o współczynnikach funkcyjnych, jak również równań quasi-liniowych o współczynnikach funkcyjnych.

10.2. Liniowe równanie cząstkowe o stałych współczynnikach

Rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y = c, \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2. \quad (10.2)$$

Niech u będzie rozwiązaniem równania (10.2) w obszarze U . Rozważmy krzywą Γ zawartą w U daną równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I.$$

Oczywiście wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie u przyjmuje wartości

$$z(t) = u(x(t), y(t)), \quad t \in I,$$

a pochodna względem zmiennej t wyraża się wzorem

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (10.3)$$

Założmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b. \quad (10.4)$$

Stąd i z faktu, że u jest rozwiązaniem równania (10.2) wynika, że prawa strona relacji (10.3) jest równa c , czyli

$$\frac{dz}{dt} = c. \quad (10.5)$$

Rozwiązując równania (10.4) z warunkami początkowymi: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = at + x_0, \quad y = bt + y_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t

$$y_0 = y - \frac{b}{a}(x - x_0). \quad (10.6)$$

Zauważmy, że przez każdy punkt obszaru U przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie układu równań (10.4).

Rozwiązanie równania (10.4) ma postać

$$z = ct + K. \quad (10.7)$$

Oczywiście funkcja (10.7) jest rozwiązaniem równania (10.2) wzdłuż krzywej Γ , czyli krzywej danej równaniem (10.6). Mianowicie, $ct + K = u(x(t), y(t))$, gdzie u jest rozwiązaniem równania (10.1), a $x = x(t)$, $y = y(t)$ równaniem krzywej Γ . Jeśli zatem stałą K zastąpimy dowolną funkcją, która na krzywej Γ przyjmuje stałą wartość, co symbolicznie możemy zapisać $K = F(y_0)$, gdzie y_0 jest dane wzorem (10.6), to funkcja

$$z = ct + F(y_0),$$

będzie w dalszym ciągu spełniać równanie (10.2) wzdłuż krzywej Γ . Kładąc

$$t = (x - x_0)/a, \quad y_0 = y - (x - x_0)/a$$

oraz przyjmując u w miejsce z , otrzymamy

$$u(x, y) = \frac{c}{a}(x - x_0) + F\left(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\right).$$

Zakładając, że F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej, nietrudno bezpośrednim rachunkiem sprawdzić, że tak skonstruowana funkcja u jest rozwiązaniem równania (10.2). Istotnie

$$au_x + bu_y = a\left(\frac{c}{a} - \frac{b}{a}F'\left(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\right)\right) + bF'\left(y - \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}x_0\right) = c.$$

Tak więc, aby znaleźć rozwiązania równania (10.2), wystarczy rozwiązać układ równań liniowych (10.4), (10.5). Równania te noszą nazwę *równań charakterystyk*, a ich rozwiązania *charakterystyk* równania (10.2). Warunki początkowe $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ należy dobrać tak, aby krzywe całkowite Γ pokryły cały obszar U . Zazwyczaj jako punkty początkowe wygodnie jest wziąć punkty leżące na stosownie dobranej krzywej, na przykład na osi Ox lub Oy . Często wystarczy ograniczyć się do rozwiązań spełniających warunki: $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$. Zauważmy jeszcze, że ponieważ F jest dowolną funkcją, wygodnie jest uzyskane rozwiązanie równania (10.2) zapisać w postaci równoważnej

$$u(x, y) = \frac{c}{a}x + F\left(y - \frac{b}{a}x\right). \quad (10.8)$$

Warto zrozumieć geometryczną ideę powyższego postępowania. Otóż funkcja F opisuje powierzchnię regularną utworzoną z charakterystyk. Ponieważ wzdłuż każdej charakterystyki równanie (10.2) jest spełnione, ponadto powierzchnia jest klasy C^1 , zatem jest to szukane rozwiązanie.

Przykład 10.1. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 2u_y = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (10.9)$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0, y) = f(y), \quad (10.10)$$

gdzie f jest zadaną funkcją różniczkowalną.

Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t, \quad y = 2t + y_0,$$

lub po wyrugowaniu t ,

$$y = 2x + y_0.$$

Równanie (10.5) przyjmuje postać

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

a jego rozwiązanie możemy zapisać w postaci

$$z = F(y_0),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Zgodnie ze wzorem (10.8) całka ogólna równania (10.9) ma postać

$$u(x, y) = F(y - 2x).$$

Rozwiązanie to winno spełniać warunek początkowy (10.10), czyli

$$u(0, y) = F(y) = f(y).$$

Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (10.9), (10.10) jest funkcja

$$u(x, y) = f(y - 2x).$$

W szczególności, jeśli $f(y) = 1/(1 + y^3)$, to rozwiązaniem tego problemu jest funkcja

$$u(x, y) = \frac{1}{1 + (y - 2x)^3}.$$

Przykład 10.2. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + au_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (a > 0), \quad (10.11)$$

spełniające warunki:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = g(y), \quad (10.12)$$

gdzie f i g są funkcjami różniczkowalnymi i ponadto $f(0) = g(0)$, $f'(0) = -ag'(0)$.

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami całka ogólna równania (10.11) ma postać

$$u(x, y) = F(y - ax),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej.

Rozważmy zbiory $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq ax\}$ oraz $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > ax\}$. Zauważmy, że w zbiorze D_1 rozwiązanie równania (10.11) winno spełniać warunek $u(x, 0) = f(x)$, zaś w zbiorze D_2 warunek $u(0, y) = g(y)$. W pierwszym przypadku $F(-ax) = f(x)$, czyli $F(t) = f(-t/a)$, zaś w drugim $F(y) = g(y)$. Wynika stąd, że rozwiązaniem problemu (10.11), (10.12) jest funkcja

$$u(x, y) = \begin{cases} f(x - \frac{y}{a}), & \text{jeśli } x \geq 0, 0 \leq y \leq ax, \\ g(y - ax), & \text{jeśli } x \geq 0, y > ax. \end{cases}$$

Przykład 10.3. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + 3u_y = 0, \quad x > 0, y > 0,$$

spełniające warunki:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \cos x \quad \text{dla } x > 0, \\ u(0, y) &= \begin{cases} 1, & \text{jeśli } 0 \leq y \leq 1, \\ 2y - 1, & \text{jeśli } y > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Nietrudno sprawdzić, że cała ogólna równania wyjściowego ma postać

$$u(x, y) = F(y - 3x),$$

zaś rozwiązanie spełniające zadane warunki początkowo-brzegowe ma postać

$$u(x, y) = \begin{cases} \cos(x - \frac{y}{3}), & \text{jeśli } x > 0, 0 < y < 3x, \\ 1, & \text{jeśli } x > 0, 3x \leq y \leq 1, \\ 2(y - 3x) - 1, & \text{jeśli } x > 0, y > \max\{1, 3x\}. \end{cases}$$

Opisaną tu metodę możemy stosować również w przypadku, gdy współczynniki a, b, c są funkcjami zmiennych x i y . Równanie tego typu rozwiążemy w następnym przykładzie.

Przykład 10.4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + yu_y = \lambda u, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

spełniające warunek początkowy

$$u(0, y) = f(y),$$

gdzie f jest funkcją różniczkowalną.

Rozwiązując równania charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 0, y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t, \quad y = y_0 e^t.$$

Zauważmy, że rodzina krzywych $x = t$, $y = y_0 e^t$, $y_0 \in \mathbb{R}$, pokrywa całą przestrzeń $\mathbb{R}^2$, na której szukamy rozwiązania. Równanie (10.5) przyjmuje tym razem postać

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy

$$z = K e^{\lambda t}.$$

Ponieważ stała K jest dobrana dla charakterystyki $y_0 = y e^{-x}$, w miejsce K możemy wstawić $F(y_0)$, czyli

$$z = F(y_0) e^{\lambda t},$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami funkcja

$$u(x, y) = F(y e^{-x}) e^{\lambda x}$$

jest rozwiązaniem równania wyjściowego. Uwzględniając warunek początkowy, mamy

$$u(0, y) = F(y) = f(y).$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = f(y e^{-x}) e^{\lambda x}.$$

Przykład 10.5. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + u^2 u_y = 0, \quad x, y \in [0, +\infty)$$

spełniające warunki:

$$u(0, y) = \sqrt{y}, \quad \text{dla } y \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{dla } x \geq 0.$$

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z^2, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

Z równania $\frac{dz}{dt} = 0$ wynika, że funkcja $z = u(x(t), y(t))$ jest stała wzdłuż charakterystyk. Wykorzystując ten fakt, możemy w drugim równaniu potraktować z jako stałą. Po rozwiązaniu równań charakterystyk z warunkami początkowymi $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = t, \quad y = z^2 t + y_0, \quad z = F(y_0).$$

Eliminując z dwóch pierwszych równań t , otrzymamy $y_0 = y - z^2 x$, a wstawiając – podobnie jak poprzednio – w miejsce z funkcję u do równania trzeciego, otrzymamy rozwiązanie równania wyjściowego w postaci uwikłanej

$$u = F(y - x u^2).$$

Wykorzystując warunek początkowy, otrzymamy

$$u(0, y) = F(y) = \sqrt{y}.$$

Zatem rozwiązanie naszego problemu możemy zapisać w postaci uwikłanej

$$u = \sqrt{y - xu^2} \quad \text{dla } y - xu^2 \geq 0.$$

Wyznaczając z ostatniego równania u , mamy

$$u = \sqrt{\frac{y}{1+x}}, \quad \text{dla } x \geq 0, y \geq 0.$$

Zauważmy, że tak otrzymana funkcja u spełnia również drugi z żądanych warunków, bowiem $u(x, 0) = \sqrt{0} = 0$.

Przykład 10.6. Rozważmy teraz liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$au_x + bu_y + cu_z = \alpha, \quad (x, y, z) \in U \subset R^3.$$

Jak poprzednio szukamy rozwiązania wzdłuż krzywej $\Gamma \subset U$ danej równaniami

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad t \in I.$$

Założmy, że krzywa Γ jest tak dobrana, że

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b, \quad \frac{dz}{dt} = c.$$

Rozwiązując ostatni układ równań z warunkami początkowymi: $x(0) = 0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, otrzymamy

$$x = at, \quad y = bt + y_0, \quad z = ct + z_0,$$

lub po wyrugowaniu parametru t równanie krawędziowe krzywej Γ :

$$y - \frac{b}{a}x = y_0, \quad z - \frac{c}{a}x = z_0.$$

(Jeśli punkt $(0, y_0, z_0) \notin U$ lub uzyskana rodzina krzywych nie pokrywa obszaru U , należy wzbogacić warunki początkowe). Zauważmy, że wzdłuż krzywej Γ rozwiązanie równania przyjmuje wartość $v(t) = u(x(t), y(t), z(t))$, przy czym zgodnie z równaniem wyjściowym

$$\frac{dv}{dt} = \alpha.$$

Stąd

$$v = \alpha t + K.$$

Ponieważ stała K jest dobrana do krzywej Γ , możemy fakt ten wyrazić formułą $K = F(y_0, z_0)$, gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych, czyli

$$v = \alpha t + F(y_0, z_0).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych i pamiętając, że $t = x/a$, mamy

$$u(x, y, z) = \frac{\alpha}{a}x + F\left(y - \frac{b}{a}x, z - \frac{c}{a}x\right).$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja jest rozwiązaniem równania wyjściowego.

10.3. Liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

Przeanalizujemy jeszcze raz zaproponowaną w poprzednim paragrafie metodę w wersji nieco zmodyfikowanej. W tym celu rozważmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (10.13)$$

gdzie a, b, c, f są funkcjami ciągłymi w obszarze $U \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy ponadto, że funkcje a i b nie zerują się równocześnie w żadnym punkcie zbioru U .

W celu znalezienia rozwiązań równania (10.13) dokonajmy zmiany zmiennych

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (10.14)$$

tak dobranej, aby po zmianie zmiennych w równaniu (10.13) wyrugować jedną z pochodnych cząstkowych.

Założmy chwilowo, że taka zmiana zmiennych istnieje i ponadto, że z równań (10.14) możemy wyznaczyć x i y jako funkcje zmiennych ξ i η , czyli

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad (10.15)$$

przy czym tak określone funkcje x i y posiadają pochodne cząstkowe względem ξ i η . Odwzorowanie (10.14) jest określone w zbiorze D . Załóżmy, że przekształca ono zbiór D w Δ . Oczywiście odwzorowanie (10.15) przekształca zbiór Δ w D (Odwzorowania (10.14) i (10.15) są względem siebie odwrotne). Połóżmy

$$w(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)).$$

Wracając do zmiennych wyjściowych x i y , otrzymamy

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)).$$

Stąd

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x, \quad u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y.$$

Podstawiając ostatnie związki do równania (10.13), otrzymamy

$$(a\xi_x + b\xi_y)w_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)w_\eta + cw = f.$$

Zauważmy, że założony cel osiągniemy, jeśli funkcje η dobierzemy tak, aby

$$a\eta_x + b\eta_y = 0, \quad (10.16)$$

(lub funkcje ξ tak, aby $a\xi_x + b\xi_y = 0$). Istotnie, przypuśćmy, że krzywe rodziny

$$\eta(x, y) = K,$$

gdzie K jest dowolną stałą, są rozwiązaniami równania (10.16). Oczywiście $d\eta = 0$, czyli

$$\eta_x dx + \eta_y dy = 0. \quad (10.17)$$

Jeśli $\eta_y \neq 0$, z warunków (10.16), (10.17) wynika, że

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}. \quad (10.18)$$

Równanie (10.18) nazywamy *równaniem charakterystyk* równania (10.13), a rodzinę krzywych

$$\psi(x, y) = K,$$

będącą rozwiązaniem ogólnym równania (10.18) *rodziną charakterystyk* równania (10.13).

Przyjmując w podstawieniu (10.14) za η tak uzyskaną funkcję ψ , wyeliminujemy z równania pochodną względem drugiej zmiennej. Funkcję $\xi = \xi(x, y)$ należy dobrać tak, aby uzyskana transformacja zmiennych była odwracalna. W tym celu wystarczy, aby jacobian przekształcenia był różny od zera, czyli

$$\begin{vmatrix} \xi_x(x, y) & \xi_y(x, y) \\ \eta_x(x, y) & \eta_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{dla } (x, y) \in D.$$

Na ogół wystarczy przyjąć $\xi = x$. (Możemy też przyjąć $\xi = \psi(x, y)$, $\eta = y$). Kładąc

$$\xi = x, \quad \eta = \psi(x, y),$$

równanie (10.13) sprowadzimy do równania

$$\tilde{a}(\xi, \eta)w_\xi + \tilde{c}(\xi, \eta)w = \tilde{f}(\xi, \eta), \quad (10.19)$$

gdzie

$$\tilde{a}(\xi, \eta) = a(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = a(\xi, y(\xi, \eta)),$$

$$\tilde{c}(\xi, \eta) = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = c(\xi, y(\xi, \eta)),$$

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = f(\xi, y(\xi, \eta)).$$

Zauważmy, że związek (10.19) możemy traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem zmiennej ξ , zależne od parametru η . Niech $w = w(\xi, \eta)$ będzie rozwiązaniem tego równania. Połóżmy

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja u jest rozwiązaniem równania (10.13).

Zauważmy jeszcze, że równania charakterystyk (10.18) możemy zapisać w postaci układu równań

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad \frac{dy}{dt} = b.$$

Przykład 10.7. Rozwiązać równanie

$$u_x + 2xyu_y = u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (10.20)$$

z warunkiem początkowym

$$u(0, y) = y^3, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (10.21)$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = 2xy,$$

otrzymamy

$$y = Ce^{x^2}$$

lub równoważnie

$$ye^{-x^2} = C.$$

Kładąc

$$\xi = x, \quad \eta = ye^{-x^2},$$

mamy

$$u_x = w_\xi - 2xye^{-x^2}w_\eta, \quad u_y = e^{-x^2}w_\eta,$$

a po podstawieniu do równania wyjściowego

$$w_\xi = w.$$

Rozwiązując ostatnie równanie, dostajemy

$$w = Ke^\xi.$$

Ponieważ stała K może zależeć od η , przyjmijmy $K = F(\eta)$, gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Zatem

$$w = F(\eta)e^\xi.$$

Zgodnie z poprzednimi uwagami funkcja

$$u(x, y) = F(ye^{-x^2})e^x$$

jest rozwiązaniem równania (10.20). Uwzględniając warunek początkowy (10.21), mamy

$$u(0, y) = F(y) = y^3.$$

Zatem rozwiązaniem problemu (10.20), (10.21) jest funkcja

$$u(x, y) = y^3 e^{-3x^2} e^x = y^3 e^{x-3x^2}.$$

Przykład 10.8. Rozwiązać równanie

$$xu_x + 2x^2u_y - u = x^2e^x. \quad (10.22)$$

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

otrzymamy $y = x^2 + C$. Zmiana zmiennych

$$\xi = x, \quad \eta = y - x^2$$

proceedzi do równania

$$w_\xi - \frac{1}{\xi}w = \xi e^\xi.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy

$$w = \xi e^\xi + \xi F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracając do zmiennych wyjściowych, znajdziemy całkę ogólną równania (10.22):

$$u(x, y) = xe^x + xF(y - x^2).$$

Założmy teraz, że szukamy rozwiązania równania (10.22), które na krzywej $y = x^2$ przyjmuje wartość $\sin x$, czyli

$$u(x, x^2) = xe^x + xF(0) = \sin x.$$

Oznacza to, że musimy znaleźć taką stałą C , aby

$$xe^x + xC = \sin x.$$

Ponieważ jest to niemożliwe, postawiony problem nie ma rozwiązania.

Założmy z kolei, że szukamy rozwiązania równania (10.22), które na krzywej $y = x^2$ przyjmuje wartość $xe^x - 4x$, czyli

$$u(x, x^2) = xe^x + xF(0) = xe^x - 4x.$$

Wynika stąd, że $F(0) = -4$. Założony warunek jest więc spełniony, jeśli F jest dowolną funkcją różniczkowalną taką, że $F(0) = -4$. Oznacza to, że problem ten ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Założmy wreszcie, że szukamy rozwiązania równania (10.22), które na krzywej $y = x^2 + x$ przyjmuje wartość $\cos x$, czyli

$$u(x, x^2 + x) = xe^x + xF(x) = \cos x.$$

Zauważmy, że warunek ten zachodzi, jeśli $F(x) = \frac{1}{x} \cos x - e^x$. Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = xe^x + \frac{x}{y - x^2} \cos(y - x^2) - xe^{y - x^2}.$$

Warto odnotować, że krzywa $y = x^2$ jest charakterystyką, natomiast krzywa $y = x^2 + x$ nie jest charakterystyką równania (10.22). Z tym faktem – jak zobaczymy w następnym paragrafie – związana jest kwestia jednoznaczności lub niejednoznaczności rozwiązań problemu początkowego.

I. Liniowe jednorodne równanie różniczkowe czastkowe.

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (10.23)$$

Rozważmy ponadto układ równań

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_1(x_1, \dots, x_n), \\&\dots\dots\dots(10.24)\\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

Twierdzenie 10.1. *Funkcja $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 jest rozwiązaniem równania (10.23) wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkową pierwszą układu równań (10.24).*

$$u(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{const} \quad \text{dla } t \in I.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_1'(t) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) x_n'(t) = 0, \quad t \in I.$$
$$a_1(\overset{\circ}{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1}(\overset{\circ}{x}) + \dots + a_n(\overset{\circ}{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n}(\overset{\circ}{x}) = 0,$$

Warunek konieczny. Niech $u = u(x_1, \dots, x_n)$ będzie rozwiązaniem równania (10.23), a układ funkcji $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), t \in I$, rozwiązaniem układu równań (10.24). Oczywiście

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \quad \text{dla} \quad t \in I.$$

Ponieważ

$$x'_i(t) = a_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, \dots, n,$$

powyższe równanie możemy zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0,$$

czyli

$$\frac{d}{dt}u(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0.$$

Wynika stąd, że

$$u(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{const} \quad \text{dla } t \in I,$$

co oznacza, że u jest całką pierwszą układu równań (10.24).

Uwaga 10.1. Zgodnie z twierdzeniem 10.1, twierdzeniem 9.2 oraz uwagą 9.2, aby znaleźć wszystkie całki równania (10.23), wystarczy znaleźć $n-1$ całek pierwszych $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ układu (10.24) funkcyjnie niezależnych. Całka ogólna równania (10.23) wyrazi się wówczas wzorem

$$u(x_1, \dots, x_n) = F(\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)), \quad (10.25)$$

gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1 zależną od $n-1$ zmiennych.

Z układu (10.24) otrzymamy natychmiast równości:

$$dt = \frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{d(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)}{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n},$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. W szczególności wynika stąd, że układ równań (10.24) możemy zapisać w postaci równoważnej:

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}. \quad (10.26)$$

Uwaga 10.2. Niech rodzina

$$\psi(x_i, x_j) = C,$$

gdzie C jest dowolną stałą, będzie całką ogólną równania

$$\frac{dx_i}{a_i(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_j}{a_j(x_1, \dots, x_n)}.$$

Wówczas funkcja

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_i, x_j), \quad (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

jest całką pierwszą układu równań (10.24).

Ogólnie, jeśli

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = C, \quad (10.27)$$

gdzie C jest stałą dowolną, jest całką ogólną równania

$$\frac{d(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)}{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n} = \frac{d(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n)}{\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n},$$

gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, to funkcja

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \Omega,$$

jest całką pierwszą układu równań (10.24).

Istotnie, niech $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ będzie całką układu (10.24) określoną w przedziale J . Wówczas dla $t \in J$ mamy

$$\frac{d}{dt}(\Psi \circ \varphi)(t) = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))d\varphi_1(t) + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))d\varphi_n(t) = 0,$$

bowiem z (10.27) wynika, że

$$\psi_{x_1} dx_1 + \dots + \psi_{x_n} dx_n = 0.$$

Oznacza to, że funkcja ψ jest całką pierwszą układu (10.24).

Przykład 10.9. Znaleźć całkę ogólną równania

$$xu_x + yu_y + z^2 u_z = 0.$$

Układ równań charakterystyk możemy zapisać w postaci

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2},$$

otrzymujemy:

$$y/x = C_1, \quad xe^{1/z} = C_2.$$

Zgodnie z uwagą 10.2 funkcje:

$$\psi_1 = y/x, \quad \psi_2 = xe^{1/z}$$

są całkami pierwszymi układu równań charakterystyk. Nietrudno pokazać, że są funkcyjnie niezależne. Zatem szukana całka ogólna – zgodnie ze wzorem (10.25) – ma postać

$$u = F(y/x, xe^{1/z}),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych.

Rozważmy teraz równanie niejednorodne

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u), \quad (10.28)$$

gdzie $a_1, \dots, a_n$ są funkcjami klasy C^1 określonymi w zbiorze $U \subset \mathbb{R}^n$.

Szukamy rozwiązania w postaci uwikłanej

$$V(x_1, \dots, x_n, u) = 0, \quad (10.29)$$

gdzie V jest funkcja posiadająca ciągle pochodne czastkowe. Załóżmy ponadto, że

$$\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0.$$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial u}, \quad i = 1, \dots, n$$

Podstawiając ostatnie wielkości do równania (10.28), otrzymamy równanie liniowe jednorodne

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)V_{x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)V_{x_n} + f(x_1, \dots, x_n, u)V_u = 0. \quad (10.30)$$

Równania charakterystyk równania (10.30) mają postać:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, u)} = \frac{du}{f(x_1, \dots, x_n, u)}. \quad (10.31)$$

Niech $\psi_1, \dots, \psi_n$ będą funkcjami niezależnymi całkami pierwszymi układu równań (10.31). Zgodnie ze wzorem (10.25) całka ogólna równania (10.30) ma postać

$$V = F(\psi_1, \dots, \psi_n),$$

gdzie F jest dowolną funkcją posiadającą ciągłe pochodne cząstkowe. Stąd i ze wzoru (10.29) wynika, że całka ogólna równania (10.28) ma postać

$$F(\psi_1, \dots, \psi_n) = 0. \quad (10.32)$$

Uwaga 10.3. Aby znaleźć całkę ogólną równania (10.28), wystarczy więc znaleźć n całek pierwszych funkcyjnie niezależnych układu równań:

[illegible]

Jeśli $\psi_1, \dots, \psi_n$ są szukanymi całkami pierwszymi, to rozwiązanie ogólne równania (10.28) ma postać (10.32), gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1 .

Przykład 10.10. Znaleźć całkę ogólną równania

$$u_x + yu_y + z^2u_z = u^3.$$

Równanie charakterystyk możemy zapisać w postaci

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2} = \frac{du}{u^3}.$$

Rozwiązując równania:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1}, \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{1}, \quad \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{1},$$

otrzymamy:

$$\ln y - x = C_1, \quad 1/z + x = C_2, \quad 1/u^2 + 2x = C_3.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje:

$$\psi_1 = \ln y - x, \quad \psi_2 = 1/z + x, \quad \psi_3 = 1/u^2 + 2x,$$

są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk. Zatem szukana całka ogólna ma postać:

$$F(\ln y - x, 1/z + x, 1/u^2 + 2x) = 0,$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną trzech zmiennych.

10.5. Przykłady

Na poniższym przykładzie prześledzimy różne sposoby praktycznego wykorzystania metody charakterystyk, które umownie nazwiemy metodą charakterystyk, metodą krzywych charakterystycznych, metodą zmiany zmiennych oraz metodą całek pierwszych.

Przykład 10.11. Znaleźć rozwiązanie równania

$$xu_x + yu_y = u,$$

przechodzące przez krzywą $x = s, y = s + 1, z = 2$.

A. Metoda charakterystyk. Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y,$$

z warunkami początkowymi $x(0) = 1$, $y(0) = y_0$, otrzymamy

$$x = e^t, \quad y = y_0 e^t,$$

a po wyrugowaniu t uzyskamy

$$\frac{y}{x} = y_0.$$

Rozwiązując pozostałe równanie charakterystyk

$$\frac{dz}{dt} = z,$$

otrzymamy

$$z = C e^t,$$

gdzie stała C zależy od krzywej $y/x = y_0$. Fakt ten możemy zapisać w postaci

$$z = F(y_0) e^t,$$

gdzie F jest dowolną funkcją klasy C^1 . Wracając do zmiennych x i y , otrzymamy

$$u = F\left(\frac{y}{x}\right)x.$$

Uwzględniając zadane warunki, mamy

$$2 = F\left(1 + \frac{1}{s}\right)s.$$

Podstawiając $\tau = 1 + 1/s$, otrzymamy

$$F(\tau) = 2(\tau - 1).$$

Zatem szukane rozwiązanie ma postać

$$u = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right)x = 2(y - x).$$

B. Metoda krzywych charakterystycznych. Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{du}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = A e^t, \quad y = B e^t, \quad u = C e^t.$$

Założmy, że charakterystyka przechodzi przez punkt $(s, s + 1, 2)$ dla $t = 0$. Wynika stąd, że

$$A = s, \quad B = s + 1, \quad C = 2.$$

Zatem równania charakterystyk przechodzących przez zadaną krzywą mają postać

$$x = s e^t, \quad y = (s + 1) e^t, \quad u = 2 e^t.$$

Eliminując z tego układu s i t , otrzymamy

$$u = 2(y - x).$$

C. Metoda zmiany zmiennych. Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

otrzymamy $y = Cx$. Zmiana zmiennych

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}$$

sprowadza równanie wyjściowe do postaci

$$\xi \frac{dw}{d\xi} = w.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy

$$w = \xi F(\eta),$$

gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej. Wracając do zmiennych wyjściowych, otrzymamy całkę ogólną równania wyjściowego

$$u(x, y) = x F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Uwzględniając warunek początkowy $u(s, s + 1) = 2$, otrzymamy

$$2 = s F\left(\frac{s+1}{s}\right).$$

Kładąc $t = (s + 1)/s$, czyli $s = 1/(t - 1)$, mamy

$$2 = \frac{1}{t - 1} F(t).$$

Zatem $F(t) = 2(t - 1)$. Stąd szukane rozwiązanie ma postać

$$u(x, y) = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right)x = 2(y - x).$$

D. Metoda całek pierwszych. Rozwiązując równania

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{u},$$

otrzymamy rodziny charakterystyk

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{u}{x} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1 = y/x$, $\psi_2 = u/x$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{u},$$

zgodnie ze wzorem (10.30) całka ogólna równania wyjściowego ma postać

$$F(y/x, u/x) = 0,$$

gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych. Zauważmy, że wzór na całkę ogólną możemy formalnie zapisać w postaci $F(C_1, C_2) = 0$, gdzie $C_1 = \psi_1$, $C_2 = \psi_2$. Aby znaleźć całkę szczególną przechodzącą przez zadaną krzywą, należy wyznaczyć funkcję F . W tym celu wystarczy wyznaczyć związek pomiędzy C_1 i C_2 . Możemy go uzyskać, rugując s , x , y oraz u z równań

$$y/x = C_1, \quad u/x = C_2, \quad x = s, \quad y = s + 1, \quad u = 2.$$

Po przeprowadzeniu prostych rachunków otrzymamy

$$C_2 = 2(C_1 - 1).$$

Podstawiając w miejsce C_1 i C_2 stosowne funkcje, mamy

$$\frac{u}{x} = 2\left(\frac{y}{x} - 1\right).$$

Stąd

$$u = 2(y - x).$$

Wykorzystując jedną z omówionych powyżej metod, rozwiążemy poniższe przykłady.

Przykład 10.12. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x + uu_y = u^2,$$

które na krzywej $y = \ln x$ przyjmuje wartość $u = 1$, tzn. $u(x, \ln x) = 1$.

Rozwiązując równanie charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{du}{dt} = u^2, \quad \frac{dy}{dt} = u,$$

otrzymamy

$$x = t + A, \quad u = 1/(C - t) \quad y = -\ln|C - t| + B.$$

Przyjmując, że dla $t = 0$ charakterystyki przechodzą przez punkt $(s, \ln s, 1)$, możemy wyznaczyć stałe

$$A = s, \quad C = 1, \quad B = \ln s.$$

Zatem

$$x = t + s, \quad y = -\ln|1 - t| + \ln s, \quad u = 1/(1 - t).$$

Eliminując z tego układu t i s , otrzymamy szukane rozwiązanie w postaci uwikłanej

$$x + \frac{1}{u} - 1 = \frac{1}{|u|} e^y.$$

Przykład 10.13. Znaleźć całkę ogólną równania

$$(y+z)u_x + yu_y + (x-y)u_z = 0.$$

Równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x-y}.$$

Wykorzystując uwagę 10.2 i rozwiązując równania

$$\frac{d(x+z)}{x+z} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{d(x-y)}{z} = \frac{dz}{x-y},$$

otrzymujemy

$$(x+z)/y = C_1, \quad (x-y)^2 - z^2 = C_2.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcje $\psi_1 = (x+z)/y$, $\psi_2 = (x-y)^2 - z^2$ są liniowo niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk. Zatem – zgodnie z uwagą 10.1 (zob. wzór (10.25)) – całka ogólna równania wyjściowego ma postać:

$$u = F((x+z)/y, (x-y)^2 - z^2),$$

gdzie F jest dowolną różniczkowalną funkcją dwóch zmiennych.

Przykład 10.14. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$yu_x - 4x^3u_y = yu^2.$$

Aby znaleźć całki pierwsze układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3} = \frac{du}{yu^2}$$

rozwiążmy równania

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-4x^3}, \quad \frac{dx}{y} = \frac{du}{yu^2}.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$2x^4 + y^2 = C_1, \quad x + \frac{1}{u} = C_2.$$

Ponieważ funkcje $\psi_1 = 2x^4 + y^2$, $\psi_2 = x + 1/u$ są funkcyjnie niezależnymi całkami pierwszymi układu równań charakterystyk, szukane rozwiązanie ogólne – zgodnie ze wzorem (3.32) – ma postać

$$F(2x^4 + y^2, x + 1/u) = 0.$$

Przykład 10.15. Znaleźć całkę ogólną równania

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y)u.$$

Zgodnie z (10.31) równania charakterystyk mają postać

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

Wykorzystując uwagę 10.2, rozważmy układ równań

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}, \quad \frac{d(y-x)}{y^2-x^2} = \frac{du}{(x+y)u}.$$

Całka pierwszego równania ma postać $1/y - 1/x = C_1$. Zapisując natomiast drugie równanie w postaci równoważnej

$$\frac{d(y-x)}{y-x} = \frac{du}{u},$$

zauważymy łatwo, że jego całka ma postać $u/(y-x) = C_2$. W konsekwencji szukane rozwiązanie zgodnie ze wzorem (10.32) możemy wyrazić w formie

$$F\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{u}{y-x}\right) = 0.$$

Przykład 10.16. Znaleźć rozwiązanie równania

$$(y-z)u_x + (z-x)u_y + (x-y)u_z = 0.$$

Z układu równań charakterystyk

$$\frac{dx}{dt} = y-z, \quad \frac{dy}{dt} = z-x, \quad \frac{dz}{dt} = x-y,$$

otrzymamy zależności

$$dx + dy + dz = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0,$$

spełnione przez rodziny krzywych

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Szukanymi całkami pierwszymi są funkcje $\psi_1 = x + y + z$ oraz $\psi_2 = x^2 + y^2 + z^2$, a całka ogólna ma postać

$$u = F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

10.6. Zadania

1. Znaleźć całki ogólne następujących równań:
 - a) $3u_x + 5u_y - xyu = 0$;
 - b) $u_x - u_y + yu = 0$;
 - c) $u_x + 4u_y - xu = x$;
 - d) $x^2u_x - 2u_y - xu = x^2$;
 - e) $x^2u_x + xyu_y + xu = x - y$;
 - f) $xu_x + u_y = e^u$.
2. Znaleźć rozwiązania następujących problemów:
 - a) $u_x + xu_y = 1, \quad u(0, y) = e^y$;
 - b) $u_x + uu_y = 0, \quad u(x, 0) = x^3$;
 - c) $xu_x + yu_y = 2u, \quad u(x, x^2) = x^3$.
3. Znaleźć rozwiązanie równania

$$3yu_x - 2xu_y = 0$$
 spełniające warunek:
 - a) $u(x, y) = x^2$ na prostej $y = x$;
 - b) $u(x, y) = 1$ na krzywej $3y^2 + 2x^2 = 4$;
 - c) $u(x, y) = 2x$ na krzywej $2x^2 - 3y^2 = 4$.
4. Znaleźć rozwiązanie równania

$$u_x - 6u_y = 2x$$
 spełniające warunek:
 - a) $u(x, y) = 0$ na prostej $y = -6x + 2$;
 - b) $u(x, y) = x^2 + x$ na paraboli $y = -x^2$;
 - c) $u(x, y) = x^2$ na prostej $y = -6x$.
5. Znaleźć rozwiązanie równania

$$4u_x + 8u_y - u = 1$$
 spełniające warunek:
 - a) $u(x, y) = \cos x$ na prostej $y = 3x$;
 - b) $u(x, y) = x$ na prostej $y = 2x$;
 - c) $u(x, y) = xe^{\frac{x}{4}} - 1$ na paraboli $y = x^2$.
6. Znaleźć rozwiązanie równania

$$yu_x + x^2u_y = xy$$
 spełniające warunek:
 - a) $u(x, y) = 4x$ na krzywej $y = x^{3/2}$;
 - b) $u(x, y) = x^3 + \frac{1}{2}x^2$ na krzywej $3y^2 = 2x^3$;
 - c) $u(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ na krzywej $y = 0$.
7. Znaleźć całki ogólne następujących równań
 - a) $y^2u_x - xyu_y = x(u - 2)$;
 - b) $x^2u_x - (y - x)u_y = 3x^2$;

- c) $(x^3 + 3xy^2)u_x + 2y^3u_y + 2y^3zu_z = 0$;
 d) $x(x+y)u_x - y(x+y)u_y = (y-x)(2x+2y+u)$;
 e) $xuu_x - yuu_y = y^2 - x^2$;
 f) $(y+xu)u_x - (x+yu)u_y = x^2 - y^2$.
 (Wskazówka: Zauważyć, że: d) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$ oraz $\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{du}{-(2x+2y+u)}$;
 e) $\frac{xdx+ydy}{u} = -du$ oraz $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$; f) $\frac{xdx+ydy}{u} = du$ oraz $\frac{d(x+y)}{u-1} = \frac{du}{x+y}$).

8. Znaleźć rozwiązania problemów:

- a) $u_x - xu_y = 4$, $u(x, y) = 0$ dla $y = 2x$;
 b) $xu_x + yu_y = xyu$, $u(x, y) = 1$ dla $y = x^2$;
 c) $(x+u)u_x + (y+u)u_y = 0$, $u(x, y) = x+1$ dla $y = 2x$;
 d) $x^3u_x - yu_y = u$, $u(x, y) = 0$ dla $y = x^2 - 1$;
 e) $u_x - y^3u_y = 1/(\sin u)$, $u(x, y) = 0$ dla $y = \sqrt{x}$;
 f) $u_x + y^2u_y = \cos u$, $u(x, y) = 0$ dla $x = y^2$.

9. Znaleźć rozwiązania problemów:

- a) $xu_x + yu_y = yu$, $u(x, x) = x$;
 b) $x^2u_x + y^2u_y = yu^2$, $u(x, x) = 2x$;
 c) $xu_x + yu_y = x+y$, $u(1, y) = y^2$;
 d) $yu_x - xu_y = 0$, $u(0, y) = y^2$;
 e) $(1+x^2)u_x + xyu_y = 0$, $u(x, 2x) = x^2$;
 f) $u_x - y^2u_y = u$, $u(x, 1/x^2) = 1$.

10. Znaleźć rozwiązanie przechodzące przez zadaną krzywą:

- a) $xu_x + yu_y = yu^2$, $x = s$, $y = s^2$, $z = 1$;
 b) $(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = u$, $x = 2s$, $y = s$, $z = 1$;
 c) $\cos y \cdot u_x + \cos x \cdot u_y = \cos x \cdot \cos y$, $x = \pi$, $y = s$, $u = \sin^2 s$;
 d) $2y(x-3)u_x + (2x-y)u_y = y(2x-3)$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$;
 e) $x(y^2 + u)u_x - y(x^2 + u)u_y = (x^2 - y^2)u$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$;
 f) $(x-y)u_x + (y-x-u)u_y = u$, $x = s$, $y = 3s$, $z = 1$.

(Wskazówka: Zauważyć, że: e) $xdx + ydy = du$ oraz $\frac{ydx+xdy}{xy} = \frac{du}{u}$, czyli $\frac{d(xy)}{xy} = \frac{du}{u}$; f) $dx + dy + dz = 0$ oraz $\frac{d(y-x)}{2(x-y)-u} = \frac{du}{u}$).

Bibliografia

- [1] Agarwal R.P., Reagan D.O., *An introduction to ordinary differential equations*, Springer, New York 2008.
- [2] Amann H., *Ordinary differential equations*, Walter & Gruyter, New York 1990.
- [3] Chicaro C., *Ordinary differential equations with applications*, Teksts in Appl. Math. 34, Springer, New York 2006.
- [4] Filippov A.F., *Zbiór zadań z równań różniczkowych*, Izd. Nauka, Moskwa 1973, 2009.
- [5] Hartman P., *Ordinary Differential Equations*, Classics in Appl. Math. 38, SIAM 2002.
- [6] Matwiejew N.M., *Zadania z równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1976.
- [7] O'Malley R.M., *An Introduction to ordinary differential equations*, SIAM Rev. 51, 2009.
- [8] Ombach J., *Wykłady z równań różniczkowych zwyczajnych*, Wyd. UJ, Kraków 1996.
- [9] Pelczar A., Szarski J., *Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1984.
- [10] Pelczar A., *Wstęp do teorii równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1989.
- [11] Robinson J.C., *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2004.