



AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca licencjacka

Metoda prostych dla równania przewodnictwa cieplnego

Elwira Szwed

Kierunek: Matematyka

Nr albumu: 238689

Promotor
dr Lucjan Sapa



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2013

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisana Elwira Szwed oświadczam, że praca ta została napisana samodzielnie i wykorzystywała (poza zdobytą na studiach wiedzę) jedynie wyniki prac zamieszczonych w spisie literatury.

.....
(Podpis autora)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymogi stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	4
1. Metoda prostych dla równania przewodnictwa cieplnego	5
2. Aproksymacja	7
3. Słabe zasady minimum, maksimum, nierówności różniczkowe	9
3.1. Słaba zasada minimum	9
3.2. Słaba zasada maksimum	10
3.3. Słabe nierówności różniczkowe	10
4. Zbieżność metody prostych	12
4.1. Twierdzenie 5.	12
Bibliografia	14

Streszczenie

...

Abstract

...

Wstep

...

Metoda prostych dla równania przewodnictwa cieplnego

Rozważmy zagadnienie początkowo-brzegowe dla równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{du}{dt} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

z warunkami początkowo brzegowymi:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l] \\ u(0, t) = \mu_1(t), & t \in [0, T] \\ u(l, t) = \mu_2(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

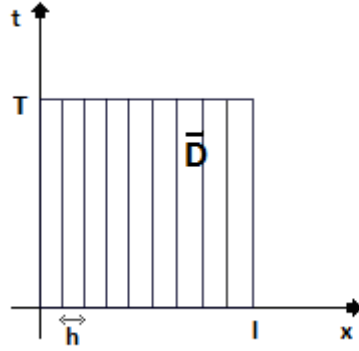
Celem pracy jest zastosowanie metody prostych do znalezienia przybliżonego rozwiązania problemu (1.1), (1.2). Dzielimy odcinek $[0, l]$ na n równych części punktami: $x_i = ih$, gdzie $h := \frac{l}{n}$, $i = 0, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$. Zbiór ciągłych wartości argumentów $[0, l] \times [0, T]$ zastępujemy zbiorem linii $\{(x_i, t) : t \in [0, T], i = 0, \dots, n\}$. Pochodną przestrzenną w równaniu (1.1) aproksymujemy ilorazem różnicowym centralnym. Otrzymujemy układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu

$$\frac{dv_i}{dt} = a^2 \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \quad (1.3)$$

z warunkami początkowymi

$$v_i(0) = \varphi(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (1.4)$$

gdzie $v_i : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym $v_0(t) = \mu_1(t)$, $v_n(t) = \mu_2(t)$. W pracy rozwiązanie problemu (1.1), (1.2) będziemy przybliżać wektorem funkcji $v(t) = (v_0(t), \dots, v_n(t))$. W Rozdziale 4 udowodnimy twierdzenie o zbieżności rozważanej metody numerycznej.



Uwaga 1. Problem (1.3), (1.4) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1(t)}{\partial t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial v_{n-1}(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{a^2}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a^2}{h^2} \mu_1(t) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \frac{a^2}{h^2} \mu_2(t) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

$$v(0) = [\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n-1})]^T, \quad (1.6)$$

gdzie

$$b(t) = \left(\frac{a^2}{h^2} \mu_1(t), 0, \dots, 0, \frac{a^2}{h^2} \mu_2(t) \right)^T, \quad v = (v_1, \dots, v_{n-1})^T. \quad (1.7)$$

Krócej układ (1.5) można zapisać w postaci

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{h^2} Av + b(t),$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Aproksymacja

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $u \in C^{1,2}([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego (1.1), (1.2) to funkcje*

$$Q_i(t) := \frac{d\bar{u}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} \quad (2.1)$$

gdzie

$$\bar{u}_i(t) = u(x_i, t), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

są wspólnie ograniczone przez funkcje $\tilde{Q}(h)$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{Q}(h) = 0$ i jest to zbieżność jednostajna.

Dowód Rozwińmy funkcje $\bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i-1}$ według wzoru Taylora o środku w punkcie (x_i, t) z resztą Lagrange’a

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1}(t) &= u(x_i + h, t) = \\ &= u(x_i, t) + h \frac{du}{dx}(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i + \theta_1 h, t), \quad (0 < \theta_1 < 1), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i-1}(t) &= u(x_i - h, t) = \\ &= u(x_i, t) - h \frac{du}{dx}(x_i, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i - \theta_2 h, t), \quad (0 < \theta_2 < 1). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zauważmy, że

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4)$$

Odejmujemy stronami (2.1) oraz (2.4) i otrzymujemy

$$Q_i(t) = -a^2 \left[\frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \quad (2.5)$$

Wykorzystując rozwinięcie (2.2), (2.3) oraz zależność (2.4) otrzymujemy

$$Q_i(t) = -\frac{a^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i + \theta_1 h, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i - \theta_2, t) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \right]. \quad (2.6)$$

Ponieważ obszar $[0, l] \times [0, T]$ jest domknięty, więc z założonej ciągłości funkcji $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ wynika jej jednostajna ciągłość w tym obszarze. Definiujemy

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(h) &:= \frac{a^2}{2} \sup \left\{ \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i + \theta_1 h, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i - \theta_2, t) - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \right| : \right. \\ &\quad \left. x \in [0, l], t \in [0, T], \theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1) \right\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Wówczas z jednostajnej ciągłości funkcji $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ wynika, że

$$|Q_i(t)| \leq \tilde{Q}(h) \rightarrow 0, (h \rightarrow 0), i = 1, \dots, n-1.$$

Uwaga 1. Jeżeli funkcja $u \in C^{1,4}([0, l] \times [0, T], \mathbb{R})$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego dla (1.1), (1.2), wówczas funkcje $\tilde{Q}(t)$ można zdefiniować następująco

$$\tilde{Q}(t) := \frac{a^2 h^2}{12} U^4, \quad (2.8)$$

gdzie U^4 jest maksimum funkcji $\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) \right|$ w obszarze $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$. Powtarzając rozumowanie z dowodu twierdzenia 1 i korzystając z rozwinięć Taylora:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i+1}(t) &= u(x_i + h, t) = \\ &= u(x_i, t) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta_1 h, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i-1}(t) &= u(x_i - h, t) = \\ &= u(x_i, t) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i - \theta_2 h, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

otrzymujemy

$$Q_i(t) = -\frac{a^2 h^2}{24} \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta_1 h, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i - \theta_2 h, t) \right].$$

a stąd

$$|Q_i(t)| \leq \frac{a^2 h^2}{12} U^4 = \tilde{Q}(h).$$

Słabe zasady minimum, maksimum, nierówności różniczkowe

3.1. Słaba zasada minimum

Twierdzenie 2 . *Minimalna wartość rozwiązania w układzie równań*

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - a^2 \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = R_i(t) \quad (3.1)$$

gdzie

$$R_i(t) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

nie może być mniejsza niż minimum wartości początkowych $w_i(0)$, $i = 1, \dots, n-1$ oraz minimum funkcji $w_0(t)$ i $w_n(t)$, $t \in [0, T]$.

Dowód. Rozważmy 2 przypadki. W pierwszym przypadku niech układ funkcji $w_i(t)$ osiąga minimum dla

$$i_0 \in \{0, n\} \quad \text{lub} \quad t = t_0 = 0,$$

Wtedy teza oczywiście zachodzi. Teraz rozpatrzmy drugi przypadek

$$i_0 \in \{1, \dots, n-1\} \quad i \quad t = t_0 > 0.$$

Czyli mamy, że $w_i(t) \geq w_{i_0}(t_0)$, $i = 0, \dots, n$, $t \in [0, T]$. Wówczas z warunku koniecznego minimum wynika

$$\frac{\partial w_{i_0}(t_0)}{\partial t} \leq 0. \quad (1)$$

Z faktu, że w punkcie t_0 układ funkcji $\{w_0, \dots, w_n\}$ osiąga minimum dla $i = i_0$ otrzymujemy:

$$w_{i_0+1}(t_0) \geq w_{i_0}(t_0), \quad (2)$$

$$w_{i_0-1}(t_0) \geq w_{i_0}(t_0).$$

Na podstawie nierówności (2) otrzymujemy

$$a^2 \frac{w_{i_0+1}(t_0) - 2w_{i_0}(t_0) + w_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0. \quad (3)$$

Łącząc (1), (3), (3.1) oraz założenie $R_{i_0}(t_0) \geq 0$ od razu otrzymujemy równość

$$R_{i_0}(t_0) = 0. \quad (4)$$

Następnie na podstawie (1), (3), (4), (3.1) otrzymujemy

$$0 \geq \frac{\partial w_{i_0}(t_0)}{\partial t} = a^2 \frac{w_{i_0+1}(t_0) - 2w_{i_0}(t_0) + w_{i_0-1}(t_0)}{h^2} \geq 0. \quad (5)$$

Zatem na podstawie (5) musi zachodzić

$$(w_{i_0+1}(t_0) - w_{i_0}(t_0)) + (w_{i_0-1}(t_0) - w_{i_0}(t_0)) = 0. \quad (6)$$

Na podstawie (2) obydwie nawiasy w powyższym wzorze są nieujemne. Stąd wniosek, że muszą być one równe 0. Wobec tego otrzymujemy

$$(8) \quad w_{i_0+1}(t_0) = w_{i_0}(t_0) = w_{i_0-1}(t_0).$$

Powtarzając rozumowanie dla $k = 1, 2, \dots, n - i_0$ stwierdzamy, że

$$(9) \quad w_{i_0}(t_0) = w_{i_0+1}(t_0) = \dots = w_{i_0+k}(t_0) = \dots = w_n(t_0).$$

Skąd wynika, że minimum układu funkcji $w_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n - 1$ nie może być mniejsze niż minimum funkcji $w_n(t)$.

3.2. Słaba zasada maksimum

Twierdzenie 3. *Maksymalna wartość rozwiązania układu równań*

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - a^2 \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = R_i(t) \quad (3.2)$$

gdzie

$$R_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

nie może być mniejsza niż maksimum wartości początkowych $w_i(0)$, $i = 1, \dots, n - 1$ oraz maksimum funkcji $w_0(t)$ i $w_n(t)$, $t \in [0, T]$.

Dowód. Dowód jest analogiczny jak dowód twierdzenia 2.

3.3. Słabe nierówności różniczkowe

Twierdzenie 4. Jeżeli układ funkcji $\bar{w}_i(t)$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$ spełnia układ równań

$$\frac{d\bar{w}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{w}_{i+1} - 2\bar{w}_i + \bar{w}_{i-1}}{h^2} = \bar{R}_i(t) \quad (3.3)$$

a układ funkcji $\bar{\bar{w}}_i(t)$ dla $i = 1, 2, \dots, n - 1$ spełnia układ równań

$$\frac{d\bar{\bar{w}}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{\bar{w}}_{i+1} - 2\bar{\bar{w}}_i + \bar{\bar{w}}_{i-1}}{h^2} = \bar{\bar{R}}_i(t). \quad (3.4)$$

oraz

$$\overline{R}_i(t) \leq \overline{\overline{R}}_i(t),$$

$$\overline{w}_0(t) \leq \overline{\overline{w}}_0(t), \quad \overline{w}_i(0) \leq \overline{\overline{w}}_i(0), \quad \overline{w}_n(t) \leq \overline{\overline{w}}_n(t), \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

to

$$\overline{w}_i(t) \leq \overline{\overline{w}}_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Dowód. Po wymnożeniu nierówności przez minus jeden i dodaniu nierówności (3.3), (3.4) stronami otrzymujemy

$$\frac{dw_i}{dt} - a^2 \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \geq \overline{\overline{R}}_i(t) - \overline{R}_i(t) \geq 0.$$

$$w_i := \overline{\overline{w}}_i - \overline{w}_i$$

Korzystając z faktu, że $w_0(t) \geq 0$, $w_n(t) \geq 0$, $w_i(0) \geq 0$, $i = 1, \dots, n-1$, $t \in [0, T]$ oraz z Twierdzenia 2 (o słabej zasadzie minimum), w zastosowaniu do funkcji $w_i(t)$ wynika, że $w_i(t) \geq 0$, $i = 0, \dots, n$.

Zbieżność metody prostych

4.1. Twierdzenie 5.

Jeżeli $u \in C^{1,2}([0, l] \times [0, T], R)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowo-brzegowego (1.1), (1.2), to metoda prostych jest zbieżna oraz

$$|\bar{u}_i(t) - \bar{v}_i(t)| \leq \tilde{Q}(h)t, \quad i = 0, \dots, n, te \in [0, T], \quad (4.1)$$

Dowód. Rozważmy różnice funkcji $\overline{u_i(t)} = u(x_i, t)$ oraz $v_i(t)$

$$\overline{w_i(t)} = \overline{u_i(t)} - v_i(t).$$

Na podstawie (1.1), (1.3), (1.4), (2, 1), funkcje te spełniają układ równań

$$\frac{d\bar{w}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{w}_{i+1} - 2\bar{w}_i + \bar{w}_{i-1}}{h^2} = Q_i(t), i = 1, \dots, n-1 \quad (4.2)$$

$$\bar{w}_i(0) = 0, \quad \bar{w}_0(t) = 0, \quad \bar{w}_n(t) = 0, \quad (4.3)$$

gdzie $Q_i(t)$ jest błędem aproksymacji. Zauważmy, że na podstawie twierdzenia 1

$$|Q_i(t)| \leq \tilde{Q}(h), \quad \tilde{Q}(h) \rightarrow 0(h \rightarrow 0), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Udowodnimy, że

$$|\bar{w}_i(t)| \leq \tilde{Q}(h)t \quad i = 1, \dots, n-1,$$

korzystając z twierdzenia 4. Rozważmy pomocniczy układ funkcji $\bar{\bar{w}}_i(t) := (h)t$ dla $i = 0, \dots, n, t \in [0, T]$. Zauważmy, że $\frac{d\bar{w}_i}{dt} = \tilde{Q}(h)$ oraz $\bar{\bar{w}}_i = \bar{\bar{w}}_{i+1} = \bar{\bar{w}}_{i-1}$. Układ ten spełnia więc równanie

$$\frac{d\bar{\bar{w}}_i}{dt} - a^2 \frac{\bar{\bar{w}}_{i+1} - 2\bar{\bar{w}}_i + \bar{\bar{w}}_{i-1}}{h^2} = \tilde{Q}(h)$$

z warunkami dodatkowymi

$$\bar{\bar{w}}_i(0) = 0, \quad \bar{\bar{w}}_0(t) = \tilde{Q}(h)t, \quad \bar{\bar{w}}_n(t) = \tilde{Q}(h)t, te \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Na mocy twierdzenia 4 otrzymujemy

$$\overline{w}_i(t) \leq \overline{\overline{w}}_i(t) = \tilde{Q}(h)t.$$

Rozważając układ funkcji $\overline{\overline{w}}_i(t) := -\tilde{Q}(h)t$ stwierdzamy podobnie, że

$$\overline{w}_i(t) \geq \overline{\overline{w}}_i(t) = -\tilde{Q}(h)t, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wynika stąd, że

$$|\overline{w}_i(t)| \leq \tilde{Q}(h)t, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ponieważ

$$\tilde{Q}(h)t \leq \tilde{Q}(h)T, \quad t \in [0, T]$$

oraz z twierdzenia 1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{Q}(h) = 0,$$

to

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{w}_i(t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, n-1.$$

W ten sposób zakonczyliśmy dowód twierdzenia 5.

Bibliografia

- [1] M. Dryja, J. Jankowska, M. Jankowski, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, Część 1,2, WNT, Warszawa 1982.
- [2] Z. Fortuna, M. Macukow, J. Wąsowski, *Metody numeryczne*, WNT, Warszawa 1998.
- [3] A.N. Tichonow, A.A. Samarski, *Równania fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1963.