



AGH

Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica
w Krakowie

Praca magisterska

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania klasycznego układu ewolucyjnych równań różniczkowych

Julita Światłowska

Kierunek: Matematyka
Specjalność: Matematyka finansowa

Nr albumu: 273322

Promotor
dr Lucjan Sapa



Wydział Matematyki Stosowanej

Kraków 2017

Oświadczenie autora

Ja, niżej podpisana Julita Światłowska oświadczam, że praca ta została napisana samodzielnie i wykorzystywała (poza zdobytą na studiach wiedzę) jedynie wyniki prac zamieszczonych w spisie literatury.

.....
(Podpis autora)

Oświadczenie promotora

Oświadczam, że praca spełnia wymagania stawiane pracom magisterskim.

.....
(Podpis promotora)

Spis treści

Streszczenie	2
Abstract	3
Wstęp	4
Rozdział 1. Podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze	6
Rozdział 2. Problem różniczkowy	8
Rozdział 3. Rozwiązanie fundamentalne, słaba zasada maksimum dla operatorów liniowych	10
Rozdział 4. Postać całkowa	13
Rozdział 5. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania globalnego	19
5.1. Metoda Picarda	19
5.2. Metoda monotoniczna	28
5.3. Konstrukcja dolnych i górnych rozwiązań, przykłady	37
Spis symboli i oznaczeń	40
Bibliografia	41

Streszczenie

Praca poświęcona jest badaniu istnienia i jednoznaczności globalnego w czasie rozwiązania klasycznego problemu Cauchy'ego dla nieliniowego układu równań różniczkowych. Składa się on z jednego równania cząstkowego drugiego rzędu typu hiperbolicznego i podukładu równań zwyczajnych pierwszego rzędu. W dowodach twierdzeń wykorzystano iteracyjną metodę Picarda i iteracyjną metodę monotoniczną dolnego i górnego rozwiązania. Ponadto skorzystano z postaci całkowitej rozważanego problemu, słabych liniowych nierówności różniczkowych i lematu Arzeli-Ascoliego. Podano przykłady układów równań, do których uzyskane wyniki można zastosować.

Słowa kluczowe

Układ nieliniowych równań różniczkowych, równanie hiperboliczne, równanie telegrafistów, istnienie, jednoznaczność, metoda Picarda, metoda monotoniczna, zasada maksimum.

Abstract

The paper deals with the study of existence and uniqueness of global in time a classical solution to the Cauchy problem for a nonlinear differential system. It is composed from one second-order partial equation of the hyperbolic type and an ordinary first-order subsystem. In the proofs of the theorems the Picard iteration method and the monotone iterative method of lower and upper solutions are used. Moreover, the integral form of the problem considered, weak linear differential inequalities and the Arzeli-Ascola lemma are used. The examples of systems for which the obtained results can be applicable are given.

Key words

Nonlinear differential system, hyperbolic equation, telegraph equation, existence, uniqueness, Picard method, monotone method, maximum principle.

Wstęp

Teoria równań i układów równań różniczkowych, zwyczajnych i cząstkowych, jest działem matematyki mającym bardzo duże zastosowania praktyczne. Równania te opisują modele występujące w fizyce, astronomii, chemii, technice, inżynierii materiałowej, biologii, medycynie, ekonomii i psychologii.

Bardzo ważnym zagadnieniem w teorii równań różniczkowych jest kwestia istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy’ego lub początkowo–brzegowego. Przedmiotem tej pracy jest sformułowanie i dowód dwóch twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności globalnego w czasie rozwiązania klasycznego problemu Cauchy’ego dla nieliniowego układu równań różniczkowych. W dowodach wspomnianych twierdzeń wykorzystano iteracyjną metodę Picarda i iteracyjną metodę monotoniczną dolnego i górnego rozwiązania. Metoda monotoniczna implikuje dodatkowo lokalizację rozwiązania, które jest ograniczone przez funkcję dolną i górną. Używając pierwszej metody, założono, że funkcje generujące prawe strony równań oraz ich niektóre pierwsze pochodne spełniają globalny warunek Lipschitza. Natomiast wykorzystując drugą metodę, przyjęto jedynie taki warunek lokalnie, tj. na pewnych znalezionych przedziałach. Ponadto założono, że funkcje generujące są w odpowiednim sensie monotoniczne na tych przedziałach. W obu metodach w istotny sposób korzysta się z postaci całkowej. Metody monotoniczne dla równań parabolicznych badane były m.in. w monografii [1] i w artykułach [16], [17], a dla równań hiperbolicznych w [11].

Praca napisana jest na podstawie artykułu [20] z 2017 roku. Publikacja ta uogólnia wyniki z 2015 roku dotyczące istnienia, jednoznaczności i oszacowania lokalnego w czasie rozwiązania w przestrzeniach Lipschitza i Höldera [19]. Wykorzystano również twierdzenia podane w monografiach [14], [15], [7].

Studiowany układ składa się z jednego równania cząstkowego drugiego rzędu typu hiperbolicznego, tzw. równania falowego oraz podukładu równań zwyczajnych pierwszego rzędu. Szczególnym przypadkiem równania falowego jest równanie telegrafistów. Równania w układzie są słabo sprzężone, tzn. przez funkcje szukane. Zagadnienie rozpatrywane jest w przypadku jednowymiarowym.

Badany układ opisuje w szczególności propagację impulsów w komórkach nerwowych. Jest on uogólnieniem parabolicznego układu Hodgkina–Huxley’a, FitzHugh–Nagumo i McKearna [2–6], uwzględniającym efekty pamięci związane z wewnętrzną strukturą ośrodka. Matematycznie układ ten jest generowany przez prawo Cattaneo dla strumieni, które jest uogólnieniem prawa Ficka [9]. Dodanie podukładu równań

zwyczajnych pierwszego rzędu zwiększa stabilność rozwiązań stacjonarnych i typu fali biegnącej całego układu [2–6, 8], [10], [12], [18], [22]. Tematyce tej poświęcona jest też monografia [21].

Warty podkreślenia jest fakt, że Hodgkin i Huxley za swój model otrzymali w 1963 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie fizjologii lub medycyny. Na podstawie osiągniętych wyników badań autorzy ci wysunęli hipotezę kanałów jonowych, które zostały wyizolowane wiele lat później.

Praca podzielona jest na pięć rozdziałów. W rozdziale pierwszym sformułowano podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze. W rozdziale drugim zdefiniowano problem różniczkowy. Rozdział trzeci poświęcony jest rozwiązaniu fundamentalnemu i słabej zasadzie maksimum dla operatorów liniowych. Z kolei w rozdziale czwartym sformułowano postać całkową równoważną rozważanemu problemowi różniczkowemu. W rozdziale piątym sformułowano i udowodniono dwa twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności globalnego w czasie rozwiązania klasycznego, podano sposób konstrukcji dolnego i górnego rozwiązania oraz zamieszczono odpowiednie przykłady.

Rozdział 1

Podstawowe definicje i twierdzenia pomocnicze

W tym rozdziale zamieścimy twierdzenia pomocnicze, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy. W szczególności sformułujemy lemat Arzeli-Ascoliego, który odgrywa ważną rolę w dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania badanego problemu początkowego w przypadku zastosowania metody monotonicznej.

Lemat 1.1 (Arzela-Ascoli). *Z każdego ciągu funkcyjnego (f_n) funkcji liczbowych równociągłych i wspólnie ograniczonych w przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ można wybrać podciąg (x_{n_k}) jednostajnie zbieżny w przedziale $[a, b]$.*

Twierdzenie 1.2 (Green). *Niech krzywa K będzie zorientowanym dodatnio brzegiem ∂D obszaru $D \subset \mathbb{R}^2$ i niech $\overline{D} = D \cup K$. Rozważmy dwie funkcje $P, Q : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe w $\overline{D}$ i mające ciągle pochodne cząstkowe w $\overline{D}$. Wtedy*

$$\int_K Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

Twierdzenie 1.3 (kryterium d'Alemberta). *Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są różne od zera i*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q \in [0, 1),$$

to szereg ten jest zbieżny bezwzględnie. Natomiast jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

to szereg ten jest rozbieżny.

Twierdzenie 1.4 (uogólnione twierdzenie o wartości średniej). Niech $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem otwartym, będzie różniczkowalna i niech punkty $x, x+h$ będą takie, że $x+th \in U$ dla $t \in [0, 1]$. Wtedy istnieje $\theta \in (0, 1)$ taka, że

$$f(x+h) - f(x) = d_{x+\theta h}f(h).$$

Twierdzenie 1.5. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^2 \supset [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona i ciągła w kostce $[a, b] \times [c, d]$, a krzywe

$$x = \alpha(y), \quad x = \beta(y) \quad \text{dla } c \leq y \leq d$$

są ciągłe i nie wychodzą poza kostkę, to całka

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$$

jest funkcją ciągłą parametru y w $[c, d]$. Jeśli przyjmiemy jeszcze, że funkcja f ma w kostce $[a, b] \times [c, d]$ ciągłą pochodną f_y i że istnieją pochodne α_y i β_y , to powyższa całka ma pochodną względem parametru wyrażającą się wzorem

$$I_y = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_y(x, y) dx + \beta_y f(\beta(y), y) - \alpha_y f(\alpha(y), y),$$

gdzie $y \in [c, d]$.

Twierdzenie 1.6. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji $f_n : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ różniczkowalnych. Jeżeli ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ do funkcji g i ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo chociażby w jednym punkcie $x \in [a, b]$ do $f(x)$, to (f_n) jest zbieżny jednostajnie na $[a, b]$ do f i $f'(x) = g(x)$, $x \in [a, b]$.

Rozdział 2

Problem różniczkowy

Oznaczmy przez $\mathbb{R}_0^+$ zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Niech funkcje $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k} \rightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, \dots, g_k) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ zmiennych $(t, x, p, r) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}$, $\varphi_0, \varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_0 = (\psi_{01}, \dots, \psi_{0k}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ i stała $c \in \mathbb{R}$ będą zadane.

Rozważmy jednowymiarowy *nieliniowy układ* $(1+k)$ *równań różniczkowych* postaci

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t = f(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ v_t = g(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie $v = (v_1, \dots, v_k)$. Równania są słabo sprzężone, tzn. przez funkcje szukane. Pierwsze równanie w układzie (2.1) jest równaniem cząstkowym drugiego rzędu typu hiperbolicznego. Jeśli $c > 0$, to równanie to nazywane jest *równaniem telegrafistów*. Pozostałe k równań w (2.1) są równaniami zwyczajnymi pierwszego rzędu, z parametrem przestrzennym x .

Naszym głównym celem jest dowód twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności klasycznych, globalnych w czasie rozwiązań problemu początkowego (2.1), (2.2). Rozwiązania te mogą być ograniczone lub nieograniczone. Wykorzystamy dwie metody iteracyjne: *metodę Picarda* oraz *metodę monotoniczną dolnej i górnej funkcji*. W metodzie Picarda zakładamy w szczególności, że funkcje f i g oraz niektóre ich pochodne pierwszego rzędu spełniają globalny warunek Lipschitza względem p i r . W metodzie monotonicznej zakładamy analogiczny warunek, ale tylko na pewnych przedziałach. Pozwala to

uwzględnić np. trudne równania z członami wielomianowymi względem funkcji szukanych u i v . W drugiej metodzie zakładamy dodatkowo, że pewna modyfikacja funkcji f i funkcja g są niemalejące na wspomnianych przedziałach względem p i r .

Ponadto sformułujemy i udowodnimy *słabą zasadę maksimum* dla operatorów skojarzonych z równaniem drugiego rzędu w układzie (2.1). Zasadę tę nazywaną często *słabymi nierównościami różniczkowymi* wykorzystamy w dowodzie zbieżności metody monotonicznej.

W dowodach zbieżności obu metod w sposób istotny korzysta się z postaci całkowej równoważnej problemowi Cauchy'ego (2.1), (2.2) w odpowiedniej klasie funkcji.

Rozdział 3

Rozwiązanie fundamentalne, słaba zasada maksimum dla operatorów liniowych

Rozdział ten poświęcony jest omówieniu własności odpowiednich równań i operatorów liniowych związanych z pierwszym równaniem w (2.1).

Lemat 3.1. *Niech $c = \text{const} \in \mathbb{R}$, $a : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Podstawienie $u = we^{-\frac{c}{2}t}$ przekształca równanie*

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + a(t, x)u = 0 \quad (3.1)$$

w równoważne równanie

$$w_{tt} - w_{xx} = \left(\frac{c^2}{4} - a(t, x) \right) w. \quad (3.2)$$

Dowód. Wykonujemy elementarne obliczenia:

$$\begin{aligned} u_t &= w_t e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2} \right), \\ u_x &= w_x e^{-\frac{c}{2}t}, \\ u_{tt} &= w_{tt} e^{-\frac{c}{2}t} + w_t e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2} \right) + \left(w_t e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2} \right) \right) \left(-\frac{c}{2} \right), \\ u_{xx} &= w_{xx} e^{-\frac{c}{2}t}. \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe pochodne do równania (3.1), otrzymujemy po uproszczeniu równanie (3.2). $\square$

Zauważmy, że dla $a(t, x) \equiv \lambda > \frac{c^2}{4}$, $\lambda = \text{const}$ równanie (3.2) jest równaniem Kleina-Gordona. Równanie to wraz z warunkami początkowymi nie spełnia słabej

zasady maksimum (zobacz przykład 3.3).

Zdefiniujmy operator różniczkowy

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \frac{c^2}{4}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

działający na funkcje skalarne określone w $\mathbb{R}^2$. Niech $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ będzie przestrzenią dystrybucji w $\mathbb{R}^2$ i niech $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ będzie deltą Diraca (zobacz [13]). Wiadomo, że funkcja

$$U_0(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < t, \\ 0, & |x| \geq t \end{cases} \quad (3.4)$$

jest *rozwiązaniem fundamentalnym* dla operatora falowego $\square w = w_{tt} - w_{xx}$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, tzn. że

$$(U_0)_{tt} - (U_0)_{xx} = \delta \quad \text{w } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

w sensie dystrybucyjnym. Kładąc $a(t, x) \equiv \frac{c^2}{4}$ w lemacie 3.1, można zauważyć, że rozwiązanie fundamentalne dla operatora $\mathcal{L}$ w $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ jest postaci

$$U(t, x) = e^{-\frac{c}{2}t} U_0(t, x), \quad (3.5)$$

czyli

$$U_{tt} - U_{xx} + cU_t + \frac{c^2}{4}U = \delta \quad \text{w } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Wynika to stąd, że podstawienie $u = we^{-\frac{c}{2}t}$ przekształca w sposób równoważny równanie $\mathcal{L}u = 0$ w równanie $\square w = 0$.

Teraz sformułujemy twierdzenie o słabych nierównościach różniczkowych, nazywane często *słabą zasadą maksimum* dla nierówności. Niech operatory

$$\mathcal{L}_a u = u_{tt} - u_{xx} + cu_t + a(t, x)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}_0 u = u_t + \frac{c}{2}u, \quad (t, x) \in \{0\} \times \mathbb{R} \quad (3.7)$$

działają na funkcje skalarne u określone w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$; $\mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli $c \geq 0$, $a(t, x) \leq \frac{c^2}{4}$, $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ jest ciągła i $u \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ spełnia nierówności*

$$\mathcal{L}_a u \leq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}_0 u \leq 0, \quad (t, x) \in \{0\} \times \mathbb{R},$$

$$u \leq 0, \quad (t, x) \in \{0\} \times \mathbb{R},$$

to

$$u \leq 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Dowód. Uzasadnienie jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 3 z rozdziału 4 w [15], jeżeli operator $\mathcal{L}_a$ pomnożymy przez dodatnią funkcję $\tilde{u}(t, x) = e^{\frac{c}{2}t}$. $\square$

Poniższy przykład pokazuje, że twierdzenie 3.2 nie jest prawdziwe dla $a(t, x) \equiv \lambda > \frac{c^2}{4}$, $\lambda = \text{const.}$

Przykład 3.3. Niech $c = 0$, $\lambda = 1$. Funkcja $u(t, x) = -\cos t$ spełnia nierówności w założeniach twierdzenia 3.2, ale nie jest niedodatnia w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$.

Rozdział 4

Postać całkowa

W tym rozdziale udowodnimy lemat o postaci całkowej, który będzie miał zasadnicze znaczenie w dowodach twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemu różniczkowego (2.1), (2.2).

Rozważmy nieliniowy układ $(1 + k)$ równań całkowych postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, u(s, y), v(s, y)) + \frac{c^2}{4} u(s, y) \right] dy ds \\ \quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy \\ \quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)], \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ v(t, x) = \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, u(s, x), v(s, x)) ds, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Lemat 4.1. *Jeżeli:*

- (1) $f \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}, \mathbb{R}^k)$,
- (2) $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$,

to problem różniczkowy (1), (2) i układ równań całkowych (4.1) są równoważne w takim sensie, że każde rozwiązanie $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ problemu (1), (2) jest rozwiązaniem układu (4.1) i każde rozwiązanie $(u, v) \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{1+k})$, $v_x \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ układu (4.1) należy do $C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ i spełnia problem (1), (2).

Dowód. Najpierw wykażemy, że dowolne rozwiązanie $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ problemu różniczkowego (2.1), (2.2) jest rozwiązaniem układu całkowego (4.1). Pierwsze równanie w układzie (1) jest równoważne równaniu

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t + \frac{c^2}{4}u = f(t, x, u, v) + \frac{c^2}{4}u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Robimy podstawienie $u = we^{-\frac{c}{2}t}$. Obliczamy pochodne:

$$\begin{aligned} u_t &= w_t e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2}\right), \\ u_x &= w_x e^{-\frac{c}{2}t}, \\ u_{tt} &= w_{tt} e^{-\frac{c}{2}t} + w_t e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2}\right) + \left(w_t e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2}\right)\right) \left(-\frac{c}{2}\right), \\ u_{xx} &= w_{xx} e^{-\frac{c}{2}t}. \end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane wyniki do pierwszego równania w układzie (1), otrzymujemy następujące równanie

$$\begin{aligned} w_{tt} e^{-\frac{c}{2}t} + w_t e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2}\right) + w_t e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c}{2}\right) + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(\frac{c^2}{4}\right) \\ - w_{xx} e^{-\frac{c}{2}t} + c w_t e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(-\frac{c^2}{2}\right) = f(t, x, w e^{-\frac{c}{2}t}, v), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uproszczając, mamy

$$(w_{tt} - w_{xx}) e^{-\frac{c}{2}t} + w e^{-\frac{c}{2}t} \left(\frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{2}\right) = f(t, x, w e^{-\frac{c}{2}t}, v), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$$

i dalej po pomnożeniu przez $e^{\frac{c}{2}t}$ otrzymujemy

$$w_{tt} - w_{xx} = e^{\frac{c}{2}t} f(t, x, w e^{-\frac{c}{2}t}, v) + \frac{c^2}{4} w, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

A stąd problem (2.1), (2.2) równoważny jest układowi równań

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} = e^{\frac{c}{2}t} f(t, x, w e^{-\frac{c}{2}t}, v) + \frac{c^2}{4} w, & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ v_t = g(t, x, w e^{-\frac{c}{2}t}, v), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.2)$$

z warunkami początkowymi

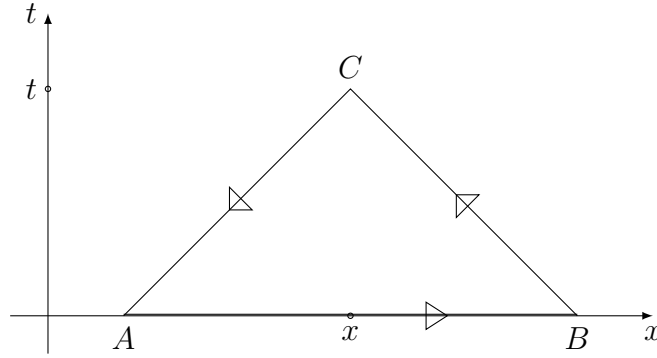
$$\begin{cases} w(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ v(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ w_t(0, x) = \frac{c}{2} \varphi_0(x) + \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Wykorzystując regularność funkcji g , możemy drugie równanie w układzie (4.2) scałkować względem czasu po przedziale $(0, t)$ dla dowolnie ustalonego $t \in \mathbb{R}_0^+$,

$$v(t, x) = \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, w(s, x) e^{-\frac{c}{2}s}, v(s, x)) ds, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Do pierwszego równania w układzie (4.2) zastosujemy metodę Riemanna (zobacz [15] str. 208). Ustalmy dowolny punkt $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ i niech D oznacza wnętrze

trójkąta $\Delta(x, t)$ o wierzchołkach $A = (x - t, 0)$, $B = (x + t, 0)$, $C = (x, t)$, a ∂D brzeg tego trójkąta zorientowany dodatnio w układzie współrzędnych $0xt$ (zobacz Rys. 1).



Rysunek 1. Trójkąt $\Delta(x, t)$

Definiujemy operator falowy

$$Lw = w_{xx} - w_{tt}, \quad (t, x) \in \overline{D}$$

działający na funkcje $w \in C^2(\overline{D}, \mathbb{R})$. Na podstawie twierdzenia Greena 1.2 stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \iint_D L[w] dx dt &= \int_{\partial D} w_t dx + w_x dt \\ &= \int_A^B (w_t dx + w_x dt) + \int_B^C (w_t dx + w_x dt) + \int_C^A (w_t dx + w_x dt). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $dt = 0$, $dt = -dx$ i $dt = dx$ na odcinkach AB , BC i CA , odpowiednio. Wobec tego

$$\iint_D L[u] dx dt = \int_A^B w_t dx - \int_B^C (w_x dx + w_t dt) + \int_C^A (w_x dx + w_t dt).$$

Z regularności funkcji w wynika, że $w_{xt} = w_{tx}$, więc pole wektorowe (w_x, w_t) jest potencjalne i całka nie zależy od drogi całkowania. A stąd

$$\iint_D L[u] dx dt = \int_A^B w_t dx - [w(C) - w(B)] + [w(A) - w(C)].$$

Po przekształceniu mamy

$$w(C) = -\frac{1}{2} \iint_D L[u] dx dt + \frac{1}{2} \int_A^B w_t dx + \frac{1}{2} [w(A) + w(B)].$$

Ponieważ $Lw(t, x) = -\left[e^{\frac{\varepsilon}{2}t} f(t, x, w e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}, v) + \frac{c^2}{4} w\right]$ dla $(t, x) \in \overline{D}$, więc z dowolności (t, x) otrzymujemy

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \left[e^{\frac{\varepsilon}{2}s} f(s, y, w(s, y) e^{-\frac{\varepsilon}{2}s}, v(s, y)) + \frac{c^2}{4} w(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} w_t(0, y) dy + \frac{1}{2} [w(0, x-t) + w(0, x+t)], \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wzory (4.4), (4.5) wraz z warunkami początkowymi (4.3) implikują, że (w, v) spełnia układ $(1 + k)$ równań całkowych postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} w(t, x) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \left[e^{\frac{c}{2}s} f(s, y, w(s, y), v(s, y)) + \frac{c^2}{4} w(s, y) \right] dy ds \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left[\frac{c}{2} \varphi_0(y) + \varphi_1(y) \right] dy \\ \quad + \frac{1}{2} [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)], \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ v(t, x) = \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, w(s, x), v(s, x)) ds, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Mnożąc pierwsze równanie w (4.6) przez $e^{-\frac{c}{2}t}$, dostajemy, że (u, v) jest rozwiązaniem układu całkowego (4.1).

Założmy teraz, że $(u, v) \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{1+k})$ jest rozwiązaniem układu całkowego (4.1) i $v_x \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$. Sprawdzimy, że $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ i jest rozwiązaniem problemu różniczkowego (2.1), (2.2). Dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia:

$$A(t, x, s) = (s, x + (t - s), u(s, x + (t - s)), v(s, x + (t - s))),$$

$$B(t, x, s) = (s, x - (t - s), u(s, x - (t - s)), v(s, x - (t - s))).$$

Korzystając z regularności f , g , φ_0 , ψ_0 , φ_1 i twierdzenia 1.5 po zróżniczkowaniu równań w (4.1), mamy:

$$u_t(t, x)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{c}{4} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, u(s, y), v(s, y)) + \frac{c^2}{4} u(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(A(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x + (t - s)) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(B(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x - (t - s)) \right] ds \\ &\quad - \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_1(x+t) + \varphi_1(x-t)) \\ &\quad - \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)) \\ &\quad - \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)) + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_{0_x}(x+t) - \varphi_{0_x}(x-t)) \\ &= -\frac{c}{4} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, u(s, y), v(s, y)) + \frac{c^2}{4} u(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(A(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x + (t - s)) \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(B(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x - (t - s)) \right] ds \\
& - \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_1(x+t) + \varphi_1(x-t)) \\
& - \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_x(x+t) - (\varphi_0)_x(x-t)), \\
u_x(t, x) & = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(A(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x + (t - s)) \right] ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(B(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x - (t - s)) \right] ds \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_1(x+t) - \varphi_1(x-t)) \\
& + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_0(x+t) - \varphi_0(x-t)) \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_x(x+t) + (\varphi_0)_x(x-t)), \\
u_{tt}(t, x) & = \frac{c^2}{8} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, u(s, y), v(s, y)) + \frac{c^2}{4} u(s, y) \right] dy ds \\
& - \frac{c}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(A(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x + (t - s)) \right] ds \\
& - \frac{c}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(B(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u(s, x - (t - s)) \right] ds \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f_x(A(t, x, s)) + f_p(A(t, x, s)) u_x(s, x + (t - s)) \right. \\
& + \sum_{i=1}^k f_{r_i}(A(t, x, s)) (v_i)_x(s, x + (t - s)) + \frac{c^2}{4} u_x(s, x + (t - s)) \left. \right] ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f_x(B(t, x, s)) + f_p(B(t, x, s)) u_x(s, x - (t - s)) \right. \\
& + \sum_{i=1}^k f_{r_i}(B(t, x, s)) (v_i)_x(s, x - (t - s)) + \frac{c^2}{4} u_x(s, x - (t - s)) \left. \right] ds \\
& + f(t, x, u(t, x), v(t, x)) + \frac{c^2}{4} u(t, x) \\
& + \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy - \frac{c}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_1(x+t) + \varphi_1(x-t)) \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_1)_x(x+t) - (\varphi_1)_x(x-t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c^3}{16} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy - \frac{c^2}{8} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)) \\
& - \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_x(x+t) - (\varphi_0)_x(x-t)) \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_{xx}(x+t) + (\varphi_0)_{xx}(x-t)),
\end{aligned}$$

$$u_{xx}(t, x)$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f_x(A(t, x, s)) + f_p(A(t, x, s)) u_x(s, x + (t-s)) \right. \\
& + \sum_{i=1}^k f_{r_i}(A(t, x, s)) (v_i)_x(s, x + (t-s)) + \frac{c^2}{4} u_x(s, x + (t-s)) \left. \right] ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f_x(B(t, x, s)) + f_p(B(t, x, s)) u_x(s, x - (t-s)) \right. \\
& + \sum_{i=1}^k f_{r_i}(B(t, x, s)) (v_i)_x(s, x - (t-s)) + \frac{c^2}{4} u_x(s, x - (t-s)) \left. \right] ds \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_1)_x(x+t) - (\varphi_1)_x(x-t)) \\
& + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_x(x+t) - (\varphi_0)_x(x-t)) \\
& + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_{xx}(x+t) + (\varphi_0)_{xx}(x-t)), \\
& v_t(t, x) = g(t, x, u(t, x), v(t, x)).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Widać, że $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$. Podstawiając (u, v) i obliczone wyżej pochodne do równania (2.1) i warunków (2.2), otrzymujemy, że są one spełnione. $\square$

Rozdział 5

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania globalnego

W tym rozdziale udowodnimy istnienie i jednoznaczność globalnego w czasie rozwiązania $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ problemu początkowego (2.1), (2.2). Wykorzystamy w tym celu dwie metody iteracyjne: metodę Picarda i metodę monotoniczną dolnego i górnego rozwiązania. Stosując metodę Picarda, zakładamy, że f i g wraz z niektórymi pierwszymi pochodnymi spełniają globalny warunek Lipschitza względem p, r . Natomiast używając metodę monotoniczną, przyjmujemy, że f i g oraz ich niektóre pierwsze pochodne spełniają lokalny warunek Lipschitza, tzn. na pewnych przedziałach.

5.1. Metoda Picarda

W przestrzeni wektorowej $(\mathbb{R}^d, +, \mathbb{R}, \cdot)$ definiujemy *normę maksimum*

$$\|y\| = \max_{i=1, \dots, d} |y_i|, \quad (5.1)$$

gdzie $y \in \mathbb{R}^d$. Z kolei w przestrzeni funkcji ciągłych $(C(\Omega, \mathbb{R}^d), +, \mathbb{R}, \cdot)$ *normę maksimum* określamy wzorem

$$\|z\|_\Omega = \max\{\|z(\omega)\| : \omega \in \Omega\}, \quad (5.2)$$

gdzie $z \in C(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem zwartym. Niech ponadto $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teraz sformułujemy dwa dobrze znane lematy, które będą użyte w dalszej części pracy. Lematy te dowiedzione są w monografii [14]. Następnie udowodnimy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności globalnego w czasie klasycznego rozwiązania problemu (2.1), (2.2) za pomocą metody Picarda.

Lemat 5.1. Niech (y_n) będzie ciągiem funkcji $y_n : \mathbb{R}^m \supset D \rightarrow \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$. Jeżeli

$$\forall x \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| \leq \alpha_n$$

i szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ jest zbieżny, to (y_n) jest jednostajnie zbieżny na D . Ponadto, jeśli wszystkie y_n są ciągłe, to jego granica jest ciągła.

Lemat 5.2. Niech $h : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ będzie ciągła i niech (y_n) , $y_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}_0$, będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym jednostajnie do y na $[\alpha, \beta]$.

Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^s h(t, y_n(t)) dt = \int_{\alpha}^s h(t, y(t)) dt, \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Twierdzenie 5.3. Załóżmy że:

- (1) $f \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}, \mathbb{R}^k)$,
- (2) f, g spełniają warunek Lipschitza ze stałą L względem p, r w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}$,
- (3) g_x, g_p, g_{r_i} , $i = 1, \dots, k$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą L_1 względem x, p, r w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}$,
- (4) $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$,
- (5) φ_0 spełnia warunek Lipschitza ze stałą L_0 w $\mathbb{R}$.

Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ problemu początkowego (2.1), (2.2).

Dowód. Z lematu 4.1 wynika, że problem początkowy (2.1), (2.2) jest równoważny układowi całkowemu (4.1). Z równoważności tej wynika, że wystarczy znaleźć jedyne ciągłe rozwiązanie (u, v) układu (4.1) takie, że v_x istnieje i jest ciągłe.

Niech $T \in \mathbb{R}^+$ będzie ustalone i niech $X \in \mathbb{R}$ będzie takie, że linie przechodzące przez punkty $(X - T, 0)$, (X, T) i $(X + T, 0)$, (X, T) tworzą z osią OX kąty $\frac{\pi}{4}$ i $-\frac{\pi}{4}$, odpowiednio. Oznaczmy przez $\Delta(X, T) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ trójkąt równoramienny o wierzchołkach $(X - T, 0)$, (X, T) , $(X + T, 0)$. Skonstruujemy ciągłe rozwiązanie (u, v) na $\Delta(X, T)$ z v_x ciągłą w $\Delta(X, T)$ układu (4.1). Następnie udowodnimy jego jednoznaczność. Zdefiniujemy ciąg (u_n, v_n) funkcji $u_n : \Delta(X, T) \rightarrow \mathbb{R}$, $v_n : \Delta(X, T) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $v_n = (v_{1n}, \dots, v_{kn})$, $n \in \mathbb{N}_0$ za pomocą wzoru rekurencyjnego Picarda:

$$\begin{aligned} u_0(t, x) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)], \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$v_0(t, x) = \psi_0(x),$$

$$u_{n+1}(t, x) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} \left[f(s, y, u_n(s, y), v_n(s, y)) + \frac{c^2}{4} u_n(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}[\varphi_0(x+t)+\varphi_0(x-t)]$$

$$v_{n+1}(t, x) = \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, u_n(s, x), v_n(s, x)) ds.$$

Korzystając z indukcji matematycznej i założeń (1), (4) wnioskujemy, że ciąg ten jest zdefiniowany poprawnie. Stosując indukcję matematyczną i uwzględniając założenia (1), (2), (4), otrzymujemy następujące nierówności:

$$|u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)| \leq \frac{\gamma^{n+1} M (L + \frac{c^2}{4})^n T (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (5.4)$$

$$\|v_{n+1}(t, x) - v_n(t, x)\| \leq \frac{\gamma^{n+1} M (L + \frac{c^2}{4})^n (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie $M = \max \left\{ \|f(\cdot, \cdot, u_0(\cdot, \cdot), v_0(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} + \frac{c^2}{4} \|u_0(\cdot, \cdot)\|_{\Delta(X, T)}, \|g(\cdot, \cdot, u_0(\cdot, \cdot), v_0(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} \right\}$, $\gamma = 1$, gdy $c \geq 0$ i $\gamma = e^{-\frac{\varepsilon}{2}T}$, gdy $c < 0$ dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że $\gamma \geq 1$.

Pokażemy indukcyjnie, że nierówności (5.4) rzeczywiście zachodzą dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

W pierwszym kroku indukcyjnym dla $n = 0$ mamy:

$$\begin{aligned} |u_1(t, x) - u_0(t, x)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} |f(s, y, u_0(s, y), v_0(s, y)) + \frac{c^2}{4} u_0(s, y)| dy ds \\ &\leq \frac{1}{2} \gamma M t \leq \gamma M T t, \\ \left\| \int_0^t g(s, y, u_0(s, y), v_0(s, y)) ds \right\| &\leq \int_0^t M ds \leq M t \leq \gamma M t. \end{aligned}$$

W drugim kroku indukcyjnym chcemy udowodnić prawdziwość implikacji:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)| &\leq \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n T (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow |u_{n+2}(t, x) - u_{n+1}(t, x)| &\leq \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} T (1+T)^{n+1} t^{n+2}}{(n+2)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v_{n+1}(t, x) - v_n(t, x)\| &\leq \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow \|v_{n+2}(t, x) - v_{n+1}(t, x)\| &\leq \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} (1+T)^{n+1} t^{n+2}}{(n+2)!} \end{aligned}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że poprzedniki obu implikacji są prawdziwe. Obliczamy:

$$\begin{aligned} |u_{n+2}(t, x) - u_{n+1}(t, x)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} |f(s, y, u_{n+1}(s, y), v_{n+1}(s, y)) - f(s, y, u_n(s, y), v_n(s, y))| dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-s)} \frac{c^2}{4} |u_{n+1}(s, y) - u_n(s, y)| dy ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \gamma L \left(|u_{n+1}(s, y) - u_n(s, y)| + \|v_{n+1}(s, y) - v_n(s, y)\| \right) dy ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \gamma \frac{c^2}{4} |u_{n+1}(s, y) - u_n(s, y)| dy ds \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \gamma \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \left(|u_{n+1}(s, y) - u_n(s, y)| + \|v_{n+1}(s, y) - v_n(s, y)\| \right) dy ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \gamma \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \left(|u_{n+1}(s, y) - u_n(s, y)| + \|v_{n+1}(s, y) - v_n(s, y)\| \right) dy ds \\
&\leq \gamma \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n (1+T)(1+T)^n s^{n+1}}{(n+1)!} dy ds \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} s^{n+1} dy ds \\
&\leq \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot \int_0^t (t-s) s^{n+1} ds \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot \left[t \frac{s^{n+2}}{n+2} - \frac{s^{n+3}}{n+3} \right]_0^t \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot \left[t \frac{t^{n+2}}{n+2} - \frac{t^{n+3}}{n+3} \right] \\
&\leq \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot t^{n+2} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 \cdot t^{n+2} \cdot T \cdot \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} \cdot T \cdot 2 \cdot \frac{1}{n+3} \\
&\leq \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} \cdot T \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} \cdot T \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} T (1+T)^{n+1} t^{n+2}}{(n+2)!},
\end{aligned}$$

$$\|v_{n+2}(t, x) - v_{n+1}(t, x)\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|g(s, x, u_{n+1}(s, x), v_{n+1}(s, x)) - g(s, x, u_n(s, x), v_n(s, x))\| ds \\
&\leq \gamma \int_0^t L \left(|u_{n+1}(s, x) - u_n(s, x)| + \|v_{n+1}(s, x) - v_n(s, x)\| \right) ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma \int_0^t \left(L + \frac{c^2}{4}\right) \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)(1+T)^n s^{n+1}}{(n+1)!} ds \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} (1+T)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left[\frac{s^{n+2}}{n+2} \right]_0^t \\
&= \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} (1+T)^{n+1} t^{n+2}}{(n+2)!},
\end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Zauważmy, że na podstawie nierówności (5.4), dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$, prawdziwe są oszacowania:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(t, x) - u_n(t, x)| &\leq \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n T (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}, \\
\|v_{n+1}(t, x) - v_n(t, x)\| &\leq \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Korzystając z kryterium d'Alemberta 1.3 sprawdzimy, że szeregi liczbowe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n T (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.5)$$

są zbieżne. Wykonujemy obliczenia:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} T (1+T)^{n+1} T^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n T (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} T (1+T)^{n+1} T^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n T (1+T)^n T^{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma \left(L + \frac{c^2}{4}\right) (1+T) T}{n+2} = 0, \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} (1+T)^{n+1} T^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^{n+2} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^{n+1} (1+T)^{n+1} T^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{\gamma^{n+1} M \left(L + \frac{c^2}{4}\right)^n (1+T)^n T^{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma \left(L + \frac{c^2}{4}\right) (1+T) T}{n+2} = 0.
\end{aligned}$$

Zatem szeregi (5.5) są zbieżne. Lemat 5.1 implikuje, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x) = u(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t, x) = v(t, x) \quad (5.6)$$

jednostajnie na $\Delta(X, T)$ i u, v są ciągłe.

Z lematu 5.2 o przejściu granicznym pod znakiem całki otrzymujemy, że (u, v) jest

rozwiązaniem ciągłym układu (4.1) w $\Delta(X, T)$.

Teraz chcemy pokazać, że v_x istnieje i jest ciągle w $\Delta(X, T)$. Aby to zrobić najpierw udowodnimy, że ciąg $((v_n)_x)$ jest wspólnie ograniczony w $\Delta(X, T)$, a później, że wszystkie funkcje v_n , $n \in \mathbb{N}_0$ spełniają w $\Delta(X, T)$ warunek Lipschitza z tą samą stałą. Następnie skorzystamy z lematu Arzeli-Ascoliego 1.1. Dla uproszczenia wprowadźmy oznaczenia:

$$A_n(t, x, s) = (s, x + (t - s), u_n(s, x + (t - s)), v_n(s, x + (t - s))),$$

$$B_n(t, x, s) = (s, x - (t - s), u_n(s, x - (t - s)), v_n(s, x - (t - s))),$$

$$C_n(x, s) = (s, x, u_n(s, x), v_n(s, x)).$$

Z indukcji i założeń (1), (4) wynika istnienie pochodnych $(u_n)_x$, $(v_n)_x$, $n \in \mathbb{N}_0$, a ponadto

$$\begin{aligned} (u_0)_x(t, x) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{c}{2}t}[\varphi_1(x+t) - \varphi_1(x-t)] \\ &+ \frac{c}{4}e^{-\frac{c}{2}t}[\varphi_0(x+t) - \varphi_0(x-t)] + \frac{1}{2}e^{-\frac{c}{2}t}[(\varphi_0)_x(x+t) + (\varphi_0)_x(x-t)], \\ (v_0)_x(t, x) &= (\psi_0)_x(x), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$(u_{n+1})_x(t, x) =$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(A_n(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u_n(s, x + (t - s)) \right] ds \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(B_n(t, x, s)) + \frac{c^2}{4} u_n(s, x - (t - s)) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_1(x+t) - \varphi_1(x-t)) + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} (\varphi_0(x+t) - \varphi_0(x-t)) \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} ((\varphi_0)_x(x+t) + (\varphi_0)_x(x-t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_{n+1})_x(t, x) &= (\psi_0)_x(x) + \int_0^t \left[g_x(C_n(x, s)) + g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^k g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) \right] ds. \end{aligned}$$

Ciągi (u_n) , (v_n) są wspólnie ograniczone na $\Delta(X, T)$, ponieważ są jednostajnie zbieżne na $\Delta(X, T)$. Ponadto z (5.7) wynika, że ciąg $((u_n)_x)$ też jest wspólnie ograniczony na $\Delta(X, T)$, tzn. że

$$\|(u_n)_x\|_{\Delta(X, T)} \leq c, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.8)$$

gdzie c jest dodatnią stałą. Z ciągłości $(\psi_0)_x$, g_x , g_p , g_{r_i} istnieją stałe dodatnie a, b takie, że

$$\|(v_{n+1})_x(t, x)\| \leq a + b \int_0^t \|(v_n)_x(s, x)\| ds, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\|(v_0)_x(t, x)\| \leq a$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$. Elementarne obliczenia implikują następujące oszacowanie

$$\|(v_n)_x(t, x)\| \leq a \sum_{i=0}^n \frac{(bt)^i}{i!} \leq a \exp(bt), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$ i dalej

$$\|(v_n)_x\|_{\Delta(X, T)} \leq a \exp(bT), \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.9)$$

A stąd ciąg $((v_n)_x)$ jest wspólnie ograniczony na $\Delta(X, T)$.

Z założeń (1), (2), (4), wspólnej ograniczoności ciągów (u_n) , (v_n) , $((u_n)_x)$, $((v_n)_x)$, twierdzenia o wartości średniej 1.4 zastosowanego do u_n i addytywności całki otrzymujemy, że pochodna $(u_n)_x$ spełnia warunek Lipschitza w $\Delta(X, T)$ z tą samą stałą L_2 dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$. Techniczne detale znalezienia stałej L_2 pomijamy. Te same argumenty wraz z założeniem (3) zamiast (2) oraz założeniem (5) dają nam oszacowania:

$$\begin{aligned} & \| (v_{n+1})_x(t, x) - (v_{n+1})_x(\bar{t}, \bar{x}) \| \quad (5.10) \\ & \leq \| (\psi_0)_x(x) - (\psi_0)_x(\bar{x}) \| \\ & + \left\| \int_0^t g_x(C_n(x, s)) ds - \int_0^{\bar{t}} g_x(C_n(\bar{x}, s)) ds \right\| \\ & + \left\| \int_0^t g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) ds - \int_0^{\bar{t}} g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x}) ds \right\| \\ & + \sum_{i=1}^k \left\| \int_0^t g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) ds - \int_0^{\bar{t}} g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x}) ds \right\|, \\ & \left\| \int_0^t g_x(C_n(x, s)) ds - \int_0^{\bar{t}} g_x(C_n(\bar{x}, s)) ds \right\| \\ & = \left\| \int_0^t g_x(C_n(x, s)) ds - \int_0^t g_x(C_n(\bar{x}, s)) ds - \int_t^{\bar{t}} g_x(C_n(\bar{x}, s)) ds \right\| \\ & \leq \int_0^t \| g_x(C_n(x, s)) - g_x(C_n(\bar{x}, s)) \| ds + d_1 |t - \bar{t}| \\ & \leq L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |u_n(s, x) - u_n(s, \bar{x})| + \|v_n(s, x) - v_n(s, \bar{x})\|] ds + d_1 |t - \bar{t}| \\ & \leq L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |(u_n)_x(s, x_1)| |x - \bar{x}| + \|(v_n)_x(s, x_2)\| |x - \bar{x}|] ds + d_1 |t - \bar{t}| \\ & \leq L_1 T (1 + c + a \exp(bT)) |x - \bar{x}| + d_1 |t - \bar{t}|, \\ & \left\| \int_0^t g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) ds - \int_0^{\bar{t}} g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x}) ds \right\| \\ & = \left\| \int_0^t g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) ds - \int_0^t g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x}) ds \right. \\ & \quad \left. - \int_t^{\bar{t}} g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x}) ds \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) - g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x})\| ds + d_2 c |t - \bar{t}| \\
&\leq \int_0^t \|g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, x) - g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, \bar{x})\| ds \\
&+ \int_0^t \|g_p(C_n(x, s))(u_n)_x(s, \bar{x}) - g_p(C_n(\bar{x}, s))(u_n)_x(s, \bar{x})\| ds + d_2 c |t - \bar{t}| \\
&\leq \int_0^t \|g_p(C_n(x, s))\| |(u_n)_x(s, x) - (u_n)_x(s, \bar{x})| ds \\
&+ c L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |u_n(s, x) - u_n(s, \bar{x})| + \|v_n(s, x) - v_n(s, \bar{x})\|] ds \\
&\quad + d_2 c |t - \bar{t}| \\
&\leq d_2 L_2 \int_0^t |x - \bar{x}| ds \\
&+ c L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |(u_n)_x(s, x_1)| |x - \bar{x}| + \|(v_n)_x(s, x_2)\| |x - \bar{x}|] ds \\
&\quad + d_2 c |t - \bar{t}| \\
&\leq [d_2 L_2 T + c L_1 T (1 + c + a \exp(bT))] |x - \bar{x}| + d_2 c |t - \bar{t}|, \\
&\left\| \int_0^t g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) ds - \int_0^{\bar{t}} g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x}) ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^t g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) ds - \int_0^t g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x}) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_t^{\bar{t}} g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x}) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) - g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x})\| ds \\
&\quad + d_3 a \exp(bT) |t - \bar{t}| \\
&\leq \int_0^t \|g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, x) - g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, \bar{x})\| ds \\
&\quad + \int_0^t \|g_{r_i}(C_n(x, s))(v_{in})_x(s, \bar{x}) - g_{r_i}(C_n(\bar{x}, s))(v_{in})_x(s, \bar{x})\| ds \\
&\quad + d_3 a \exp(bT) |t - \bar{t}| \\
&\leq \int_0^t \|g_{r_i}(C_n(x, s))\| |(v_{in})_x(s, x) - (v_{in})_x(s, \bar{x})| ds \\
&+ a \exp(bT) L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |u_n(s, x) - u_n(s, \bar{x})| + \|v_n(s, x) - v_n(s, \bar{x})\|] ds \\
&\quad + d_3 a \exp(bT) |t - \bar{t}| \\
&\leq d_3 \int_0^t \|(v_n)_x(s, x) - (v_n)_x(s, \bar{x})\| ds \\
&+ a \exp(bT) L_1 \int_0^t [|x - \bar{x}| + |(u_n)_x(s, x_1)| |x - \bar{x}| + \|(v_n)_x(s, x_2)\| |x - \bar{x}|] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_3a \exp(bT)|t - \bar{t}| \\
& \leq [a \exp(bT)L_1T(1 + c + a \exp(bT))]|x - \bar{x}| + d_3a \exp(bT)|t - \bar{t}| \\
& +d_3 \int_0^t \|(v_n)_x(s, x) - (v_n)_x(s, \bar{x})\| ds,
\end{aligned}$$

gdzie $x_1, x_2 \in [X-T, X+T]$ są pewnymi punktami pośrednimi, a d_1, d_2, d_3 są dodatnimi stałymi. Kładziemy:

$$\begin{aligned}
& a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x}) \tag{5.11} \\
& = \{L_0 + L_1T(1 + c + a \exp(bT)) + [d_2L_2T + cL_1T(1 + c + a \exp(bT))] \\
& +ka \exp(bT)L_1T(1 + c + a \exp(bT))\}|x - \bar{x}| \\
& +\{d_1 + d_2c + kd_3a \exp(bT)\}|t - \bar{t}|, \\
& b_1 = kd_3.
\end{aligned}$$

Z (5.10), (5.11) mamy

$$\begin{aligned}
& \|(v_{n+1})_x(t, x) - (v_{n+1})_x(\bar{t}, \bar{x})\| \\
& \leq a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x}) + b_1 \int_0^t \|(v_n)_x(s, x) - (v_n)_x(s, \bar{x})\| ds, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\
& \|(v_0)_x(t, x) - (v_0)_x(\bar{t}, \bar{x})\| \leq a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x})
\end{aligned}$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$. Elementarne rachunki i nierówność $a_1(s, s, x, \bar{x}) \leq a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x})$ implikują następującą nierówność

$$\begin{aligned}
& \|(v_n)_x(t, x) - (v_n)_x(\bar{t}, \bar{x})\| \\
& \leq a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x}) \sum_{i=0}^n \frac{(b_1 t)^i}{i!} \leq \exp(b_1 T) a_1(t, \bar{t}, x, \bar{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$. Zatem funkcje $(v_n)_x$ spełniają warunek Lipschitza na $\Delta(X, T)$ z taką samą stałą dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

Z (5.9), (5.12) i lematu Arzeli-Ascoliego 1.1 wynika, że istnieje jednostajnie zbieżny podciąg $((v_{n_i})_x)$ w $\Delta(X, T)$ i w konsekwencji, na mocy twierdzenia 1.6, v_x jest równa granicy tego podciągu i jest ciągłą.

Teraz udowodnimy, że układ (4.1) ma jedyne ciągłe rozwiązanie w $\Delta(X, T)$. Niech $(\tilde{u}, \tilde{v})$ będzie dowolnym, ciągłym rozwiązaniem (4.1) w $\Delta(X, T)$. Ale (u, v) dane wzorem (5.6) też jest rozwiązaniem (4.1). Korzystając z indukcji oraz założeń (1), (2), (4), otrzymujemy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}
|u_n(t, x) - \tilde{u}(t, x)| & \leq \frac{\gamma^{n+1} \widetilde{M}(L + \frac{c^2}{4})^n T(1 + T)^n t^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{5.13} \\
\|v_n(t, x) - \tilde{v}(t, x)\| & \leq \frac{\gamma^{n+1} \widetilde{M}(L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{M} = \max \left\{ \|f(\cdot, \cdot, \tilde{u}(\cdot, \cdot), \tilde{v}(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} + \frac{c^2}{4} \|\tilde{u}(\cdot, \cdot)\|_{\Delta(X, T)}, \|g(\cdot, \cdot, \tilde{u}(\cdot, \cdot), \tilde{v}(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} \right\}$, dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Z (5.6), (5.13) po przejściu do granicy

mamy, że $|u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \leq 0$, $\|v(t, x) - \tilde{v}(t, x)\| \leq 0$ w $\Delta(X, T)$ i w konsekwencji $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ na $\Delta(X, T)$.

Konstruujemy jedyne globalne ciągłe rozwiązanie (u, v) układu całkowego (4.1), sklejając rozwiązania (u, v) dane wzorem (5.6) na wszystkich trójkątach $\Delta(X, T)$. Korzystając z lematu 4.1, stwierdzamy, że $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ i spełnia zagadnienie Cauchy'ego (2.1), (2.2). Twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Uwaga 5.4. Ponieważ $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ na $\Delta(X, T)$ w dowodzie twierdzenia 5.3, więc nierówności (5.13) informują nas o tempie zbieżności metody analitycznej:

$$|u_n(t, x) - u(t, x)| \leq \frac{\gamma^{n+1} M_1 (L + \frac{c^2}{4})^n T (1 + T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\|v_n(t, x) - v(t, x)\| \leq \frac{\gamma^{n+1} M_1 (L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},$$

gdzie $M_1 = \max \left\{ \|f(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} + \frac{c^2}{4} \|u(\cdot, \cdot)\|_{\Delta(X, T)}, \|g(\cdot, \cdot, u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot))\|_{\Delta(X, T)} \right\}$, dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Uwaga 5.5. W dowodzie twierdzenia 5.3 zauważono, że ciąg $((u_n)_x)$ jest wspólnie ograniczony i wszystkie pochodne $(u_n)_x$, $n \in \mathbb{N}_0$ spełniają warunek Lipschitza z tą samą stałą L_2 . Na mocy twierdzenia Arzeli-Ascoliego 1.1 i twierdzenia 1.6 istnieje podciąg $((u_{n_l})_x)$ zbieżny jednostajnie do u_x w $\Delta(X, T)$. Ale z (5.7), (5.4) po prostych obliczeniach mamy następujące oszacowanie

$$|(u_{n+1})_x(t, x) - (u_n)_x(t, x)| \leq \frac{\gamma^{n+1} M (L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^n t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.14)$$

i w konsekwencji

$$|(u_{n+1})_x(t, x) - (u_n)_x(t, x)| \leq \frac{\gamma^{n+1} M (L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^n T^{n+1}}{(n+1)!}$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Z lematu 5.1 wynika, że cały ciąg $((u_n)_x)$ jest jednostajnie zbieżny w $\Delta(X, T)$. Twierdzenie 1.6 implikuje, że $((u_n)_x)$ zmierza jednostajnie do u_x w $\Delta(X, T)$.

5.2. Metoda monotoniczna

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności globalnego w czasie klasycznego rozwiązania za pomocą metody monotonicznej dolnego i górnego rozwiązania. Twierdzenie to implikuje także lokalizację tegoż rozwiązania. Przyjmujemy, że funkcje f i g generujące prawą stronę równań różniczkowych oraz ich niektóre pierwsze pochodne spełniają warunek Lipschitza i są w odpowiednim sensie monotoniczne na pewnych przedziałach wyznaczonych przez funkcję dolną i górną.

W $\mathbb{R}^k$ wprowadzamy następujący porządek: $y \leq \tilde{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y_i \leq \tilde{y}_i$, $i = 1, \dots, k$ dla dowolnych $y = (y_1, \dots, y_k)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k) \in \mathbb{R}^k$. W podobny sposób

określamy porządek w przestrzeni $C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$: $u \leq \tilde{u}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(t, x) \leq \tilde{u}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ dla dowolnych $u, \tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Analogicznie, w przestrzeni $C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$: $v \leq \tilde{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_i(t, x) \leq \tilde{v}_i(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ dla dowolnych $v = (v_1, \dots, v_k)$, $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k) \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$.

Funkcję $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, która spełnia układ nierówności

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t \leq f(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ v_t \leq g(t, x, u, v), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ \varphi_0(x) \geq u(0, x), & x \in \mathbb{R}, \\ \psi_0(x) \geq v(0, x), & x \in \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x) \geq u_t(0, x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.15)$$

nazywamy *rozwiązaniem dolnym* problemu (2.1), (2.2) w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Jeśli nierówności są odwrócone, to nazywamy ją *rozwiązaniem górnym* zagadnienia (2.1), (2.2) w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$.

Założenie A Istnieje co najmniej jedna para rozwiązań dolnych i górnych $(\underline{u}_0, \underline{v}_0)$, $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$, odpowiednio, problemu (2.1), (2.2) taka, że

$$\underline{u}_0 \leq \bar{u}_0, \underline{v}_0 \leq \bar{v}_0 \quad \text{w } \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}. \quad (5.16)$$

Dla danej pary rozwiązań dolnych i górnych $(\underline{u}_0, \underline{v}_0)$, $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ problemu (2.1), (2.2) spełniającej (5.16) definiujemy następujący sektor

$$\langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle = \{(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k) :$$

$$\underline{u}_0(t, x) \leq u(t, x) \leq \bar{u}_0(t, x), \underline{v}_0(t, x) \leq v(t, x) \leq \bar{v}_0(t, x), (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\}$$

oraz przedział

$$\langle m, M \rangle = \{(u, v) \in \mathbb{R}^{1+k} : m_0 \leq u \leq M_0, m \leq v \leq M\},$$

gdzie $m = (m_1, \dots, m_k)$, $M = (M_1, \dots, M_k)$,

$$m_0 = \inf\{\underline{u}_0(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\},$$

$$m_i = \inf\{\underline{v}_{0i}(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\},$$

$$M_0 = \sup\{\bar{u}_0(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\},$$

$$M_i = \sup\{\bar{v}_{0i}(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}\},$$

$\underline{v} = (\underline{v}_{01}, \dots, \underline{v}_{0k})$, $\bar{v} = (\bar{v}_{01}, \dots, \bar{v}_{0k})$, $i = 1, \dots, k$.

Definiujemy rekurencyjnie dwa ciągi $(\underline{u}_n, \underline{v}_n)$, $(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$ funkcji $\underline{u}_n, \bar{u}_n : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{v}_n, \bar{v}_n : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\underline{u}_{n+1} = f(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\underline{u}_n(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ (\underline{v}_{n+1})_t = g(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ \underline{u}_{n+1}(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \underline{v}_{n+1}(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (\underline{u}_{n+1})_t(0, x) = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{u}_{n+1} = f(t, x, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\bar{u}_n(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ (\bar{v}_{n+1})_t = g(t, x, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)), & (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \\ \bar{u}_{n+1}(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \bar{v}_{n+1}(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ (\bar{u}_{n+1})_t(0, x) = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.18)$$

gdzie operator $\mathcal{L}$ dany jest wzorem (3.3).

Twierdzenie 5.6. *Założmy, że Założenie A jest spełnione, a ponadto:*

- (1) $f \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle, \mathbb{R}^k)$,
- (2) f, g spełniają warunek Lipschitza ze stałą L względem p, r w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle$,
- (3) g_x, g_p, g_{r_i} , $i = 1, \dots, k$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą L_1 względem x, p, r w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle$,
- (4) $f(t, x, p, r) + \frac{c^2}{4}p$ i g są niemalejące względem p, r w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle$,
- (5) $c \geq 0$,
- (6) $\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\varphi_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\psi_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$,
- (7) $(\psi_0)_x$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L_0 w $\mathbb{R}$.

Wtedy:

- (i) dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $(\underline{u}_n, \underline{v}_n)$, $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$, $n \in \mathbb{N}_0$ problemów (5.17), (5.18), odpowiednio,
- (ii) nierówności

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_1 \leq \underline{u}_2 \leq \dots \leq \bar{u}_2 \leq \bar{u}_1 \leq \bar{u}_0,$$

$$\underline{v}_0 \leq \underline{v}_1 \leq \underline{v}_2 \leq \dots \leq \bar{v}_2 \leq \bar{v}_1 \leq \bar{v}_0,$$

są prawdziwe w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$,

- (iii) $(\underline{u}_n, \underline{v}_n)$, $(\bar{u}_n, \bar{v}_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ są dolnym i górnym rozwiązaniem problemu (2.1), (2.2) w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$, odpowiednio,
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x)) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{v}_n(t, x) - \underline{v}_n(t, x)) = 0$ niemal jednostajnie w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$,
- (v) funkcja

$$(u(t, x), v(t, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x))$$

$\in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ jest rozwiązaniem problemu (2.1), (2.2), jedynym w sektorze $\langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$.

Dowód. Zauważmy, że dla ustalonego $n \in \mathbb{N}_0$ prawe strony nierówności (5.17), (5.18) są znane i zależne tylko od (t, x) . Stąd twierdzenie 5.3, albo analiza postaci całkowej (4.1) i lemat 4.1, implikuje (i).

Zależności (ii), (iii) są bezpośrednią konsekwencją indukcji, Założenia A i następującej implikacji. Jeżeli $(\underline{u}_n, \underline{v}_n)$, $(\bar{u}_n, \bar{v}_n) \in \langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$ są, odpowiednio, dolnym i górnym rozwiązaniem (2.1), (2.2) w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ i $\underline{u}_n \leq \bar{u}_n$, $\underline{v}_n \leq \bar{v}_n$, to

$$\underline{u}_n \leq \underline{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n, \quad \underline{v}_n \leq \underline{v}_{n+1} \leq \bar{v}_n, \quad (5.19)$$

$$\underline{u}_n \leq \bar{u}_{n+1} \leq \bar{u}_n, \quad \underline{v}_n \leq \bar{v}_{n+1} \leq \bar{v}_n,$$

$$\underline{u}_{n+1} \leq \bar{u}_{n+1}, \quad \underline{v}_{n+1} \leq \bar{v}_{n+1}, \quad (5.20)$$

i $(\underline{u}_{n+1}, \underline{v}_{n+1}), (\bar{u}_{n+1}, \bar{v}_{n+1}) \in \langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$ są, odpowiednio, dolnym i górnym rozwiązaniem (2.1), (2.2) w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$. Aby tę implikację uzasadnić, przypuśćmy, że jej poprzednik jest prawdziwy. Najpierw wykażemy pierwszą nierówność z (5.19). Ponieważ $\underline{u}_n$ jest dolnym rozwiązaniem problemu (2.1), (2.2) i $\underline{u}_{n+1}$ jest zdefiniowane w (5.17), więc

$$\mathcal{L}\underline{u}_n \leq f(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\underline{u}_n(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}\underline{u}_{n+1} = f(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\underline{u}_n(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R},$$

a stąd mamy

$$\mathcal{L}(\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1}) \leq 0 \quad w \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Ponadto

$$\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1} \leq 0 \quad na \{0\} \times \mathbb{R}$$

i na podstawie założenia (5) otrzymujemy

$$\mathcal{L}_0(\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1}) \leq 0 \quad na \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 3.2 zastosowane do operatora $\mathcal{L}_a := \mathcal{L}$ daje nierówność

$$\underline{u}_n - \underline{u}_{n+1} \leq 0 \quad w \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Rozumując w podobny sposób jak wyżej i korzystając z założenia (4), otrzymujemy następujące relacje:

$$\mathcal{L}\underline{u}_{n+1} = f(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\underline{u}_n(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}\bar{u}_n \geq f(t, x, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\bar{u}_n(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{u}_{n+1} - \bar{u}_n) &\leq f(t, x, \underline{u}_n(t, x), \underline{v}_n(t, x)) + \frac{c^2}{4}\underline{u}_n(t, x) \\ &\quad - f(t, x, \bar{u}_n(t, x), \bar{v}_n(t, x)) - \frac{c^2}{4}\bar{u}_n \leq 0 \quad w \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\underline{u}_{n+1} - \bar{u}_n \leq 0 \quad na \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}_0(\underline{u}_{n+1} - \bar{u}_n) \leq 0 \quad na \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Wobec tego z twierdzenia 3.2 mamy

$$\underline{u}_{n+1} - \bar{u}_n \leq 0 \quad w \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}.$$

Zatem druga nierówność w (5.19) także jest prawdziwa. Pozostałe nierówności w (5.19) można udowodnić w podobny sposób, przy czym dla $\underline{v}_n$, $\bar{v}_n$, $\underline{v}_{n+1}$, $\bar{v}_{n+1}$ trzeba zastosować słabe nierówności różniczkowe dla równań zwyczajnych.

Teraz pokażemy (iv). Ustalmy $T \in \mathbb{R}^+$ i rozważmy trójkąt równoramienny $\Delta(X, T) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ występujący w dowodzie twierdzenia 5.1. Połóżmy

$$N_0 = \|\bar{u}_0 - \underline{u}_0\|_{\Delta(X, T)} + \|\bar{v}_0 - \underline{v}_0\|_{\Delta(X, T)}. \quad (5.21)$$

Z definicji (5.17), (5.18) oraz z analizy układu równań całkowych (4.1) i lematu 4.1 otrzymujemy wzory explicite na rozwiązania problemów (5.17), (5.18):

$$\begin{aligned} \underline{u}_{n+1}(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \underline{u}_n(s, y), \underline{v}_n(s, y)) + \frac{c^2}{4} \underline{u}_n(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)], \\ \underline{v}_{n+1}(t, x) &= \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, \underline{u}_n(s, x), \underline{v}_n(s, x)) ds, \\ \bar{u}_{n+1}(t, x) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \bar{u}_n(s, y), \bar{v}_n(s, y)) + \frac{c^2}{4} \bar{u}_n(s, y) \right] dy ds \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_1(y) dy + \frac{c}{4} e^{-\frac{c}{2}t} \int_{x-t}^{x+t} \varphi_0(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\frac{c}{2}t} [\varphi_0(x+t) + \varphi_0(x-t)], \\ \bar{v}_{n+1}(t, x) &= \psi_0(x) + \int_0^t g(s, x, \bar{u}_n(s, x), \bar{v}_n(s, x)) ds \end{aligned} \quad (5.22)$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Z indukcji oraz założeń (1), (2), (6) dostajemy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x) &\leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n T(1+T)^{n-1} t^n}{n!}, \\ \bar{v}_{ni}(t, x) - \underline{v}_{ni}(t, x) &\leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n (1+T)^{n-1} t^n}{n!} \end{aligned} \quad (5.23)$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $i = 1, \dots, k$, $n \in \mathbb{N}$.

Udowodnimy indukcyjnie, że oszacowania (5.23) rzeczywiście zachodzą dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dowód przebiega dość podobnie, jak dowód nierówności (5.4).

W pierwszym kroku indukcyjnym dla $n = 1$ mamy:

$$\bar{u}_1(t, x) - \underline{u}_1(t, x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \bar{u}_0(s, y), \bar{v}_0(s, y)) + \frac{c^2}{4} \bar{u}_0(s, y) \right] dy ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \underline{u}_0(s, y), \underline{v}_0(s, y)) + \frac{c^2}{4} \underline{u}_0(s, y) \right] dy ds \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} |f(s, y, \bar{u}_0(s, y), \bar{v}_0(s, y)) - f(s, y, \underline{u}_0(s, y), \underline{v}_0(s, y))| dy ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} [\bar{u}_0(s, y) - \underline{u}_0(s, y)] dy ds \\
& \leq \frac{1}{2} \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \cdot 2 \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} [\bar{u}_0(s, y) - \underline{u}_0(s, y)] + \|\bar{v}_0(s, y) - \underline{v}_0(s, y)\| dy ds \\
& \leq \left(L + \frac{c^2}{4} \right) N_0 \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} dy ds \leq \left(L + \frac{c^2}{4} \right) N_0 \int_0^t 2(t-s) ds \\
& = \left(L + \frac{c^2}{4} \right) N_0 \left[2ts - \frac{2s^2}{2} \right]_0^t = \left(L + \frac{c^2}{4} \right) N_0 \left[2t^2 - \frac{2t^2}{2} \right] \\
& \leq N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \cdot T \cdot t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{v}_{1i}(t, x) - \underline{v}_{1i}(t, x) \\
& \leq \|\bar{v}_1(t, x) - \underline{v}_1(t, x)\| \\
& = \left\| \int_0^t g(s, y, \bar{u}_0(s, y), \bar{v}_0(s, y)) ds - \int_0^t g(s, y, \underline{u}_0(s, y), \underline{v}_0(s, y)) ds \right\| \\
& \leq \int_0^t \|g(s, y, \bar{u}_0(s, y), \bar{v}_0(s, y)) - g(s, y, \underline{u}_0(s, y), \underline{v}_0(s, y))\| ds \\
& \leq L \int_0^t [\bar{u}_0(s, y) - \underline{u}_0(s, y)] + \|\bar{v}_0(s, y) - \underline{v}_0(s, y)\| ds \\
& \leq N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \int_0^t ds = N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \cdot t.
\end{aligned}$$

W drugim kroku chcemy udowodnić prawdziwość implikacji:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x) \leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n T(1+T)^{n-1} t^n}{n!} \\
& \Rightarrow \bar{u}_{n+1}(t, x) - \underline{u}_{n+1}(t, x) \leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} T(1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!}, \\
& \bar{v}_{ni}(t, x) - \underline{v}_{ni}(t, x) \leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n (1+T)^{n-1} t^n}{n!} \\
& \Rightarrow \bar{v}_{(n+1)i}(t, x) - \underline{v}_{(n+1)i}(t, x) \leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że poprzedniki obu implikacji są prawdziwe. Wykonujemy obliczenia:

$$\begin{aligned}
& \bar{u}_{n+1}(t, x) - \underline{u}_{n+1}(t, x) \\
& = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \bar{u}_n(s, y), \bar{v}_n(s, y)) + \frac{c^2}{4} \bar{u}_n(s, y) \right] dy ds \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-\frac{c}{2}(t-s)} \left[f(s, y, \underline{u}_n(s, y), \underline{v}_n(s, y)) + \frac{c^2}{4} \underline{u}_n(s, y) \right] dy ds \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} |f(s, y, \bar{u}_n(s, y), \bar{v}_n(s, y)) - f(s, y, \underline{u}_n(s, y), \underline{v}_n(s, y))| dy ds \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{4} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} [\bar{u}_n(s, y) - \underline{u}_n(s, y)] dy ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \cdot 2 \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \left[\bar{u}_n(s, y) - \underline{u}_n(s, y) \right] + \|\bar{v}_n(s, y) - \underline{v}_n(s, y)\| dy ds \\
&\leq \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n (1+T)^{n-1} s^n}{n!} (1+T) dy ds \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} s^n dy ds \\
&\leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot 2 \int_0^t (t-s) s^n ds \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot 2 \left[t \cdot \frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+2}}{n+2} \right]_0^t \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot 2 \left[t \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right] \\
&\leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot 2 \cdot t^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\leq \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} T (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

$$\bar{v}_{(n+1)i}(t, x) - \underline{v}_{(n+1)i}(t, x)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\bar{v}_{n+1}(t, x) - \underline{v}_{n+1}(t, x)\| \\
&= \left\| \int_0^t g(s, y, \bar{u}_n(s, y), \bar{v}_n(s, y)) ds - \int_0^t g(s, y, \underline{u}_n(s, y), \underline{v}_n(s, y)) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|g(s, y, \bar{u}_n(s, y), \bar{v}_n(s, y)) - g(s, y, \underline{u}_n(s, y), \underline{v}_n(s, y))\| ds \\
&\leq L \int_0^t \left[\bar{u}_n(s, y) - \underline{u}_n(s, y) \right] + \|\bar{v}_n(s, y) - \underline{v}_n(s, y)\| ds \\
&\leq L \int_0^t \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n (1+T)^n s^n}{n!} ds \\
&\leq \left(L + \frac{c^2}{4} \right) \cdot \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^n (1+T)^n}{n!} \cdot \int_0^t s^n ds \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot \left[\frac{s^{n+1}}{n+1} \right]_0^t \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n}{n!} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{N_0 \left(L + \frac{c^2}{4} \right)^{n+1} (1+T)^n t^{n+1}}{(n+1)!},
\end{aligned}$$

a to kończy dowód indukcyjny.

Oszacowania (5.23) implikują:

$$\bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x) \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n T(1+T)^{n-1} T^n}{n!}, \quad (5.24)$$

$$\bar{v}_{ni}(t, x) - \underline{v}_{ni}(t, x) \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n (1+T)^{n-1} T^n}{n!}$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $i = 1, \dots, k$, $n \in \mathbb{N}$. Bezpośrednio z (5.24) i (ii) otrzymujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{v}_n(t, x) - \underline{v}_n(t, x)) = 0 \quad (5.25)$$

i zbieżność ta jest jednostajna w $\Delta(X, T)$ oraz niemal jednostajna w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$.

Ciągi $(\underline{u}_n)$ i $(\bar{u}_n)$ są na podstawie (ii) monotoniczne i ograniczone. Wobec tego dla dowolnie ustalonego $(t, x) \in \Delta(X, T)$ są one zbieżne punktowo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n(t, x) = u_1(t, x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n(t, x) = u_2(t, x).$$

Z (5.25) wynika, że $u_1 = u_2 =: u$ w $\Delta(X, T)$. Ponownie stosujemy punkt (ii) i uzyskujemy oszacowania:

$$\begin{aligned} |\underline{u}_n(t, x) - u(t, x)| &\leq |\bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x)|, \quad (t, x) \in \Delta(X, T), \\ |\underline{u}_n(t, x) - u(t, x)| &\leq \|\bar{u}_n - \underline{u}_n\|_{\Delta(X, T)}, \quad (t, x) \in \Delta(X, T), \\ \|\underline{u}_n - u\|_{\Delta(X, T)} &\leq \|\bar{u}_n - \underline{u}_n\|_{\Delta(X, T)}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} |\bar{u}_n(t, x) - u(t, x)| &\leq |\bar{u}_n(t, x) - \underline{u}_n(t, x)|, \quad (t, x) \in \Delta(X, T), \\ |\bar{u}_n(t, x) - u(t, x)| &\leq \|\bar{u}_n - \underline{u}_n\|_{\Delta(X, T)}, \quad (t, x) \in \Delta(X, T), \\ \|\bar{u}_n - u\|_{\Delta(X, T)} &\leq \|\bar{u}_n - \underline{u}_n\|_{\Delta(X, T)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Zatem korzystając z (5.26), (5.27), (5.25), mamy, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{u}_n(t, x) = u(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n(t, x) = u(t, x) \quad (5.28)$$

jednostajnie w $\Delta(X, T)$. I dalej, funkcja u jest ciągła w $\Delta(X, T)$ jako jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych. Analogicznie dowodzimy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{v}_n(t, x) = v(t, x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{v}_n(t, x) = v(t, x) \quad (5.29)$$

jednostajnie w $\Delta(X, T)$ i v jest ciągła w $\Delta(X, T)$. Z lematu 5.2 o przejściu granicznym pod znakiem całki zastosowanego do równości rekurencyjnych (5.22) dostajemy, że (u, v) jest rozwiązaniem w $\Delta(X, T)$ układu całkowego (4.1). Istnienie ciągłego v_x w $\Delta(X, T)$ dostajemy analogicznie, jak w dowodzie twierdzenia 5.1. Pochodna ta jest równa granicy odpowiedniego podciągu $((\underline{v}_{n_l})_x)$ (i oczywiście $((\bar{v}_{n_l})_x)$). Ponadto z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że $(u, v) \in \langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$ w $\Delta(X, T)$.

Niech $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$ w $\Delta(X, T)$ będzie dowolnym ciągłym rozwiązaniem układu (4.1) w $\Delta(X, T)$. Stosując indukcję matematyczną i założenia (1), (2), (6), otrzymujemy następujące oszacowania:

$$|\bar{u}_n(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n T(1 + T)^{n-1} t^n}{n!}, \quad (5.30)$$

$$\|\bar{v}_n(t, x) - \tilde{v}(t, x)\| \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^{n-1} t^n}{n!}$$

gdzie N_0 jest zdefiniowane w (5.21), dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}$. Z (5.28), (5.29), (5.30) mamy, że $|u(t, x) - \tilde{u}(t, x)| \leq 0$, $\|v(t, x) - \tilde{v}(t, x)\| \leq 0$ w $\Delta(X, T)$ i w konsekwencji dostajemy, że $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ w $\Delta(X, T)$.

Konstruujemy jedyne globalne ciągłe rozwiązanie (u, v) układu całkowego (4.1) poprzez sklejanie rozwiązań na wszystkich trójkątach $\Delta(X, T)$. Korzystając z lematu 4.1, stwierdzamy, że otrzymane rozwiązanie $(u, v) \in C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ i spełnia zagadnienie Cauchy'ego (2.1), (2.2). Twierdzenie zostało udowodnione. $\square$

Uwaga 5.7. Ponieważ $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ w $\Delta(X, T)$ w dowodzie twierdzenia 5.6, więc nierówność (5.30) daje nam efektywne oszacowanie błędu metody analitycznej:

$$|\bar{u}_n(t, x) - u(t, x)| \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n T(1 + T)^{n-1} t^n}{n!},$$

$$\|\bar{v}_n(t, x) - v(t, x)\| \leq \frac{N_0(L + \frac{c^2}{4})^n (1 + T)^{n-1} t^n}{n!},$$

dla $(t, x) \in \Delta(X, T)$, $n \in \mathbb{N}$. Analogicznie takie same oszacowania są prawdziwe dla $|\underline{u}_n(t, x) - u(t, x)|$, $\|\underline{v}_n(t, x) - v(t, x)\|$.

Uwaga 5.8. Ponieważ założenia twierdzenia 5.6 są spełnione tylko w zbiorze $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \langle m, M \rangle$, więc jedyne rozwiązanie problemu (2.1), (2.2) jest zapewnione tylko w odniesieniu do powyższych górnych i dolnych rozwiązań i nie wyklucza istnienia innych rozwiązań poza sektorem $\langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$. Ale jeżeli założenia twierdzenia 5.6 są spełnione w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}$, to rozwiązanie problemu (2.1), (2.2) jest jednoznaczne bezwarunkowo.

Uwaga 5.9. Z dowodu twierdzeń 5.3, 5.6 wynika, że analogiczne twierdzenia są prawdziwe dla jednego równania (zamiast układu (2.1))

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t = f(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \quad (5.31)$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = \varphi_1(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.32)$$

gdzie $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_0, \varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i stała $c \in \mathbb{R}$ jest dana.

5.3. Konstrukcja dolnych i górnych rozwiązań, przykłady

W tym rozdziale przedstawimy sposób konstrukcji dolnych i górnych rozwiązań. Jeżeli f i g są ograniczone w $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$ i $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0$ są ograniczone w $\mathbb{R}$, to konstrukcja dolnych i górnych rozwiązań jest możliwa poprzez rozwiązanie odpowiednio skojarzonych problemów początkowych dla równań różniczkowych zwyczajnych.

Niech:

$$m(f) = \inf \{f(t, x, u, v) : (t, x, u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}\},$$

$$m(g) = \inf \{g(t, x, u, v) : (t, x, u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}\},$$

$$m(\varphi_0) = \inf \{\varphi_0(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$m(\varphi_1) = \inf \{\varphi_1(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$m(\psi_0) = \inf \{\psi_0(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$M(f) = \sup \{f(t, x, u, v) : (t, x, u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}\},$$

$$M(g) = \sup \{g(t, x, u, v) : (t, x, u, v) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{2+k}\},$$

$$M(\varphi_0) = \sup \{\varphi_0(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$M(\varphi_1) = \sup \{\varphi_1(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$M(\psi_0) = \sup \{\psi_0(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Rozważmy przypadek, gdy $c > 0$. Funkcje

$$\begin{aligned} \underline{u}_0(t, x) = \frac{1}{c^2} [m(f) - cm(\varphi_1)] e^{-ct} + \frac{1}{c} m(f)t \\ + \frac{1}{c^2} [c^2 m(\varphi_0) + cm(\varphi_1) - m(f)], \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\underline{u}_0(t, x) = m(g)t + m(\psi_0),$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(t, x) = \frac{1}{c^2} [M(f) - cM(\varphi_1)] e^{-ct} + \frac{1}{c} M(f)t \\ + \frac{1}{c^2} [c^2 M(\varphi_0) + cM(\varphi_1) - M(f)], \end{aligned}$$

$$\bar{u}_0(t, x) = M(g)t + M(\psi_0)$$

są rozwiązaniami dolnymi i górnymi problemu początkowego (2.1), (2.2), odpowiednio. Dla przykładu, dolne rozwiązanie $\underline{u}_0$ jest rozwiązaniem problemu początkowego drugiego rzędu

$$\begin{cases} y'' + cy' = m(f), \\ y(0) = m(\varphi_0), \\ y'(0) = m(\varphi_1). \end{cases} \quad (5.34)$$

W przypadku, gdy $c = 0$ otrzymujemy, że:

$$\underline{u}_0(t, x) = \frac{1}{2} m(f) t^2 + m(\varphi_1) t + m(\varphi_0), \quad (5.35)$$

$$\bar{u}_0(t, x) = \frac{1}{2}M(f)t^2 + M(\varphi_1)t + M(\varphi_0),$$

a $\underline{u}_0$ i $\bar{v}_0$ są takie same jak w (5.33).

Metody monotoniczne i konstrukcja dolnych i górnych rozwiązań z wykorzystaniem funkcji Greena dla skończonych i nieskończonych układów parabolicznych są badane w [1], [16], [17]. Czasami możliwe jest znalezienie rozwiązań dolnych i górnych bez użycia jakichkolwiek narzędzi matematycznych, jak w przykładzie 5.10

Przykład 5.10. Rozważamy nieliniowe równanie telegrafistów

$$u_{tt} - u_{xx} + cu_t = u(1 - u) \quad (5.36)$$

z warunkami początkowymi

$$\begin{cases} u(0, x) = \varphi_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.37)$$

gdzie $c \geq 2$ i $0 \leq \varphi_0(x) \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ jest klasy C^2 . Widać, że $\underline{u}_0(t, x) \equiv 0$ jest rozwiązaniem dolnym i $\bar{u}_0(t, x) \equiv 1$ jest rozwiązaniem górnym problemu różniczkowego (5.36), (5.37). Z twierdzenia 5.6 i uwagi 5.9 wynika, że problem (5.36), (5.37) ma jednoznaczne rozwiązanie globalne u klasy C^2 w sektorze $\langle \underline{u}_0, \bar{u}_0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Zauważmy, że funkcja $f(t, x, p) = p(1 - p)$ nie jest niemalejąca dla $p \in \langle m, M \rangle = \langle 0, 1 \rangle$, ale $f(t, x, p) + \frac{c^2}{4}p = p\left(\left(1 + \frac{c^2}{4}\right) - p\right)$ już jest niemalejąca na tym przedziale (zobacz założenie (4) w twierdzeniu 5.6).

Przykład 5.11. Rozważamy układ nieliniowy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + cu_t = \frac{1}{1+u^2} + \arctan v \\ v_t = \arctan(u + v) \end{cases} \quad (5.38)$$

z warunkami początkowymi (2.2), gdzie $c \geq 2$, $|\varphi_0(x)| \leq 1$, $|\psi_0(x)| \leq 1$, $|\varphi_1(x)| \leq 1$ dla $x \in \mathbb{R}$ i φ_0 jest klasy C^2 , φ_1, ψ_0 są klasy C^1 , zaś $(\varphi_0)_x$ spełnia warunek Lipschitza. Obliczając z (5.33), otrzymujemy: $\underline{u}_0 = \frac{1}{c^2}(-\frac{\pi}{2} + c)e^{-ct} - \frac{\pi}{2c}t + \frac{1}{c^2}(-c^2 - c + \frac{\pi}{2})$, $\underline{v}_0 = -\frac{\pi}{2}t - 1$, $\bar{u}_0 = \frac{1}{c^2}(1 + \frac{\pi}{2} - c)e^{-ct} + \frac{1}{c}(1 + \frac{\pi}{2})t + \frac{1}{c^2}(c^2 + c - 1 - \frac{\pi}{2})$, $\bar{v}_0 = \frac{\pi}{2}t + 1$. Założenie A jest spełnione i $\underline{u}_0, \underline{v}_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0$ są nieograniczone. Z twierdzenia 5.6 wynika, że problem (5.38), (2.2) ma jednoznaczne rozwiązanie globalne (u, v) klasy $C^2 \times C^1$ w sektorze $\langle (\underline{u}_0, \underline{v}_0), (\bar{u}_0, \bar{v}_0) \rangle$. Zauważmy, że $f(t, x, p, r) = \frac{1}{1+p^2} + \arctan r$ nie jest niemalejąca dla $(p, r) \in \langle m, M \rangle = \mathbb{R}^2$, ale $f(t, x, p, r) + \frac{c^2}{4}p = \frac{1}{1+p^2} + \frac{c^2}{4}p + \arctan r$ już jest niemalejąca na tym przedziale (zobacz założenie (4) w twierdzeniu 5.6).

Przykład 5.12. Rozważmy układ nieliniowy

$$\begin{cases} \tau u_{tt} - u_{xx} + u_t = H(u - a) - u - v \\ v_t = bu - dv \end{cases}, \quad (5.39)$$

gdzie $\tau \geq 0$ jest tzw. czasem relacji, a, b, d są stałymi rzeczywistymi i H jest funkcją Heaviside'a. Wyrażenie τu_{tt} , uwzględniające efekty pamięci związane z wewnętrzną strukturą ośrodka, jest generowane przez prawo Cattaneo

$$\tau \frac{\partial J}{\partial t} + J = -k \nabla u,$$

które jest uogólnieniem prawa Ficka

$$J = -k\nabla u,$$

gdzie J jest strumieniem generowanym przez u , zaś k jest dodatnią stałą rzeczywistą. Układ (5.39) jest uogólnieniem modelu McKeana [12]. Niestety układ (5.39) nie spełnia założeń twierdzeń 5.3 i 5.6, gdyż silnie nieliniowa funkcja H nie jest ciągła. Wiadomo jednak, że H można aproksymować funkcjami gładkimi, np. wielomianami [9], [12], [18], [21].

Spis symboli i oznaczeń

$\mathbb{R}, \mathbb{N}$ – zbiory liczb, odpowiednio, rzeczywistych i naturalnych
 $\mathbb{R}^+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
 $\mathbb{R}_0^+$ – zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych
 $\mathbb{R}^k$ – iloczyn kartezjański k zbiorów $\mathbb{R}$
 $\mathbb{N}_0^+$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich z zerem
 $(\mathbb{R}^d, +, \mathbb{R}, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa
 $(C(\Omega, \mathbb{R}^d), +, \mathbb{R}, \cdot)$ – przestrzeń wektorowa funkcji ciągłych
 $\|\cdot\|$ – norma maksimum w $(\mathbb{R}^d, +, \mathbb{R}, \cdot)$
 $\|\cdot\|_\Omega$ – norma maksimum w $(C(\Omega, \mathbb{R}^d), +, \mathbb{R}, \cdot)$
 $C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{1+k})$ – zbiór funkcji ciągłych
 $C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ – zbiór funkcji klasy C^1
 $C^2(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ – zbiór funkcji klasy C^2
 D – obszar
 ∂D – brzeg D
 $\overline{D}$ – domknięcie D
 K – krzywa
 δ – delta Diraca
 $\lim$ – granica
 $\int, \iint$ – całki
 $\Delta(X, T)$ – trójkąt
 $\square, \mathcal{L}, \mathcal{L}_a, \mathcal{L}_0, L$ – operatory
 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ – przestrzeń dystrybucji w $\mathbb{R}^2$
 U_0 – rozwiązanie fundamentalne
 $f_y, \alpha_y, \beta_y, u_t, u_x, u_{xt}, u_{tx}, u_{tt}, u_{xx}$ – pochodne
 $\underline{u}_n, \underline{v}_n, \overline{u}_n, \overline{v}_n$ – rozwiązania dolne i górne, odpowiednio

Bibliografia

- [1] Brzywczy S., Poznański R.R., *Mathematical neuroscience*, Adamic Press, Amsterdam 2014.
- [2] Evans J., Shenk N., *Solutions to axon equations*, Biophys. J. 10 (1970), 1090-1101.
- [3] Evans J.W., *Nerve axon equations: I linear approximations*, Indiana Univ. Math. J. 21 nr 9 (1972), 877-885.
- [4] Evans J.W., *Nerve axon equations: II stability at rest*, Indiana Univ. Math. J. 22 nr 1(1972), 75-90.
- [5] Evans J.W., *Nerve axon equations: III stability of the nerve impulse*, Indiana Univ. Math. J. 22 nr 6 (1972), 577-593.
- [6] Evans J.W., *Nerve axon equations: IV the stable and the unstable impulse*, Indiana Univ. Math. J. 24 nr 12 (1975), 1169-1190.
- [7] Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 2, PWN, Warszawa 1995.
- [8] Ghazaryan A., Latushkin Y., Schecter S., *Stability of traveling waves in partly parabolic systems*, Mathematical modeling of natural phenomena 8 (2013), 32-48.
- [9] Joseph D.D., Preziosi L., *Heat waves*, Rev. Mod. Phys. 61 nr 1 (1989), 41-73.
- [10] Krupa M., Sanstede B., Szmolyan P., *Fast and Slow Waves in the FitzHugh-Nagumo Equation*, J. Differential Equations 133 (1997), 49-97.
- [11] Li Y., *Maximum principles and the method of upper and lower solutions for time periodic problems of the telegraph equations*, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007), 997-1009.
- [12] Likus W., Vladimirov V.A., *Solitary waves in the model of active media, taking into account relaxing effects*, Rep. Math. Phys. 75 nr 2 (2015), 213-230.
- [13] Marcinkowska H., *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1993.
- [14] Myjak J., *Równania różniczkowe*, Wydawnictwa AGH, Kraków 2016.
- [15] Protter M. H., Weinberger H.F, *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag New York Inc., 1984.
- [16] Pudelko A., *Monotone iteration for infinite systems of parabolic equations with functional dependence*, Ann. Polon. Math. 90 (2007), 1-19.
- [17] Pudelko A., *Monotone iterative method for infinite systems of parabolic functional-differential equations with nonlocal initial conditions*, Topological Methods in Nonlinear Analysis 36 (2010), 101-117.
- [18] Rinzel J., Keller J.B., *Traveling waves solutions of a nerve conduction equation*, Biophys. J. 13 (1974), 1313-1337.
- [19] Sapa L., *Existence, uniqueness and estimates of classical solutions to some evolutionary system*, Opuscula Math. 35 nr 6, 2015.

- [20] Sapa L., *Global existence and uniqueness of a classical solution to some differential evolutionary system*, Rocky Mountain J. Math., przyjęta do druku, ukaże się w 2017, <http://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1464035938>.
- [21] Scott A.C., *Neuroscience: mathematical primer*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [22] Vladimirov V.A., Mączka Cz., *On the stability of kink-like and soliton-like solutions of the generalized convection-reaction-diffusion equation*, Rep. Math. Phys. 70 (2012), 313-329.